高考数学目标解题

洪学锋 著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书是作者近十年来研究高考数学命题与解题的重要成果。本书以 2013~2018 年全国高考文、理科数学甲、乙、丙卷全部试题为基本素材，仿照现行全国高考数学试卷的结构设计了 23 个试题背景，在每一个试题背景下梳理了若干个问题，并对相同问题的不同条件进行了认真分析，通过逐步调整研究对象（新目标）来探究“问题”与“条件”之间的联系，从而实现数学解题的最终目标——建立“条件”与“问题”之间的知识联系。

本书不仅提供了高考真题的详解精析，还在解题过程中备注了相关知识和解题思路；不仅介绍了为什么这样解题，更重要的是揭示了产生解题思路的过程。因此，本书既可作为高考数学解题教学的专用教材，也可作为学生按照“背景—问题—条件”查询解题方法的“真题解典”，还可以作为研究高考数学命题与解题的宝贵资料。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

高考数学目标解题 / 洪学锋著. —北京：电子工业出版社，2019.1
ISBN 978-7-121-35666-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①洪… Ⅲ. ①中学数学课－高中－题解－升学参考资料 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 262405 号

策划编辑：葛卉婷
责任编辑：葛卉婷
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编 100036
开　　本：850×1168　1/16　印张：26　　字数：832 千字
版　　次：2019 年 1 月第 1 版
印　　次：2019 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：79.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。
本书咨询联系方式：（010）88254596，geht@phei.com.cn

目标引领解题

（自序）

做人要找准方向，做事要找对路径，做题要找到目标。

“学数学就是学做题”似乎成了亘古不变的定律，然而，大多数同学始终没有学会究竟应该怎样做题。很多学校的高考数学复习主要靠同学们在书山题海中摸索，绝大多数教辅资料或试题解析常以“由题意可知”“由此可见”或“显然”等来遮掩一些既说不清也道不明解题思路的“来龙去脉”，甚至毫无征兆地、很突兀地冒出一个“等式”或“不等式”，虽然这些“式子”能在题意中“找到”合理的解释，但是，没有人告诉你这个“式子”是怎么来的，更没有人告诉你怎样才能“想到”去列出这个“式子”。可爱的同学们也很少去追究这个“式子”的来龙去脉，甚至还十分佩服这些“秒杀”解题技巧，于是诞生了诸多的解题“套路”或“模板”，然而在没有理解这些“套路”或“模板”精髓的情况下去做题，结果必然是“看上去都会，做起来都错”。

事实上，任何一道数学试题都是在特定的背景下，附加了一定的条件，让你去求解或求证若干个与条件相关的问题。因此，我们认为，数学试题的基本结构是“背景+条件+问题”，而解题的最终目标就是在这个特定的“背景”下，探寻“问题”与“条件”的知识联系。因此，解题过程就是“探寻”“知识联系”的过程，“探寻”的基本策略是将“条件”向“问题”演绎，或者由“问题”分析需要满足的“条件”，或者将“问题”与“条件”进行必要的“转化”。然而，“转化”的目标或方向是受学科“思想”支配的，“转化”的效率是受学科“方法”影响的。因此，“学做题”就是“学转化”，学会“发现”转化的目标，学会根据解题需要和自身知识的限制“调整”目标，从而在不断产生的新目标引领下进行解题。

“条件转化”需要基于题设条件的特征来采用不同的“转化方法”，“问题转化”需要基于不同的学科思想来决定“转化目标”。因此，解题过程实际上是在数学思想的支配下选用数学方法（行动）来搭建数学知识（联系）的桥梁，而解题过程中所用到的数学知识仅仅是解题的“道具”。在不同的思想支配下，运用不同的方法可能需要用到不同的知识（解题知识的障碍可以通过转换解题思路来回避）。总之，解题的宗旨就是探寻问题与条件的联系，解题思路（思想）决定了解题出路（方法），解题知识制约了解题思路的发展。因此，解题能力是在既有的知识储备基础之上，数学思想和方法灵活运用的综合表现。

本书在撰写过程中参考了大量研究资料，并在完稿后邀请20多位教师进行了审读与修改，尤其是邀请安庆一中洪汪宝老师帮助审读并修改了全部书稿，在此一并表示衷心感谢。欢迎大家加入“高考数学目标解题”QQ群（群号：534251483），以便共同研究高考数学的解题目标。

祝愿每一位同学都能在原有基础之上考得更好。

作　者

2018年10月30日

本书内容&使用方法

本书对最近六年（2013—2018 年）的全国（甲、乙、丙）卷文理科高考数学的所有试题做了大数据分析，仿照目前高考数学 23 题的试卷结构设置了 23 个背景，归纳了在不同背景下已经出现的“问题”以及相应的“条件”，对每一道试题做了详解精析，并且说明了“为什么这么做”和“怎样想起来这样做”。试图揭示根据“条件”或“问题”所产生的思维活动过程，帮助同学们学会“发现目标”和根据解题需要“调整目标”，并适时对典型的解题经验进行了“经验总结”。

本书的几种使用方法：

1. 高考复习找专题：依据目录按照“背景—问题—条件”系统地组织专题复习。
2. 遇到难题找真题：在遇到不会做的试题时按照“背景—问题—条件”去查找相似高考真题的解题思想、解题方法和解题经验。
3. 按照索引找原题：本书以索引的方式列出了 2013—2018 年全国（甲、乙、丙）卷文理科每一道试题解析在本书中的页码，可供读者检索。

题源信息标注规定：

我们约定用一个汉字和四位数字来表示题源信息：①用“甲”“乙“丙”表示全国Ⅱ、Ⅰ、Ⅲ卷，用“纲”表示大纲卷，用“京”表示北京卷等；②用四位阿拉伯数字表示试题的年份和题号，前两位数字表示年份，后两位数字表示题号；③为了区分文理科试题编号，文科题号依次用 01,02,⋯,24 编号，理科题号依次用 51,52,⋯,74 编号（相当于在原理科题号基础上+50）；④本书将全部解答题的一个大题拆分成 2~3 个小题进行归类研究，题号采用“-1”“-2”“-3”的形式。例如，（乙 1768-2）表示全国Ⅰ（乙）卷 2017 年理科（68−50=18）题第 2 小题，（浙 1701）表示浙江卷 2017 年第 1 题。

目录

第 1 题　集合背景

01

背景知识

我们把具有某种特征或属性的一些研究对象的总体叫做集合；这些研究对象统称为集合的元素；集合中的元素必须是确定的（确定性），互不相同的（互异性），并且与排列顺序无关的（无序性），即集合中的所有元素都具有确定性、互异性和无序性三种性质．如果两个集合中的元素是完全一样的，那么就称这两个集合相等．

空集及集合中的部分元素组成的集合称为原集合的子集，一个含有 n 个元素的集合共有 2^n 个子集（其中包括一个不含任何元素的空集，空集用符号 $\varnothing$ 表示）．

集合的表示方法有列举法、描述法和维恩图法：列举法就是将集合中的所有元素一一列举出来用 $\{\ \}$ 括起来，其中元素用逗号隔开；描述法用 $\{\ |\ \}$ 来表示，其中“|”前面的符号表示集合中的元素，“|”后面用文字语言或符号语言来表示集合元素所具有的共同特征或属性；维恩图法是用图形语言描述集合的方法．

问题 1　集合的交集运算

问题分析：集合运算的实质是对集合中元素的运算，两个集合的交集（符号“$\cap$”与“交”字相似）运算的实质是“寻找”两个集合中的共同元素．

条件 1.1　给定两个列举集合

条件分析：给定两个列举元素的集合求交集时，可以从元素个数较少的集合出发，分别取每一个元素与另一个集合中的元素作比较，看看是否属于另一个集合．

例 1.1（乙 1801）已知集合 $A=\{0,2\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（　）．

A．$\{0,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{0\}$　　D．$\{-2,-1,0,1,2\}$

解析：∵题设：$A=\{0,2\}$，$B=\{-2,-1,0,1,2\}$，∴集合 A，B 都是用列举法表示的集合．

又∵题求：$A\cap B=?$，∴必须知道运算符号 $\cap$ 表示交集运算，　认识交集运算符号

并且理解交集运算的实质是求两个集合都包含的共同元素．　理解交集运算的含义

计算“交集”的方法是拿元素较少的 A 集合中的每一个元素，分别到另一个集合中去寻找相同的元素，如果能找到相同元素，那么该元素即为交集中的元素，如果找不到则不是．　两个列举集合交集运算的方法

显然在集合 B 中既能找到集合 A 中的元素 0，也能找到集合 A 中的元素 2．因此，$A\cap B=\{0,2\}$．故选 A，不选 BCD．

例 1.2（甲 1802）已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$（　）．

A．$\{3\}$　　B．$\{5\}$　　C．$\{3,5\}$　　D．$\{1,2,3,4,5,7\}$

解析：∵问题是计算 $A\cap B=?$，∴需要认识符号 $\cap$ 表示交集运算　集合知识储备

∵集合 A，B 中都包含有 4 个元素，∴可以依次选取集合 A 中的每一个元素，逐一与集合 B 中的元素进行比较，两个集合中都有的元素即为交集中的元素．

又∵将集合 A 中的 1，3，5，7 分别与集合 B 中的元素进行比较发现：集合 B 中没有元素 1，7，只有 A 中的元素 3，5，∴ $A\cap B=\{3,5\}$．故选 C，不选 ABD.

例 1.3 （丙 1701）已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

解析：由题意可得 $A\cap B=\{2,4\}$，故 $A\cap B$ 中元素的个数为 2，所以选 B，不选 ACD.

条件 1.2　给定列举集合与一次不等式描述集合

条件分析：给定一个列举元素的集合与一个一次不等式描述集合求交集时，可以从列举集合出发，分别取每一个元素与描述集合的不等式作比较，看看是否属于该集合.

还可以在数轴上标出一次不等式描述集合的范围，并将列举集合的所有元素标注在数轴上，然后看不等式描述范围内包含哪些元素，即为交集的元素.

例 1.4 （乙 1601）设集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $A\cap B=$（　）.

A．$\{1,3\}$　　B．$\{3,5\}$　　C．$\{5,7\}$　　D．$\{1,7\}$

解析 1：∵ $B=\{x|2\leqslant x\leqslant 5\}$ 中包含 3，5 两个 A 中的元素，∴ $A\cap B=\{3,5\}$．故选 B，不选 ACD.

解析 2：如图 1.1 所示，在数轴上标出集合 A 与集合 B，看看在不等式描述的集合 B 中包含集合 A 中的哪几个元素，即为所求.

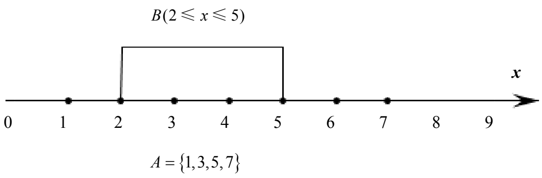


图 1.1

故选 B，不选 ACD.

> **经验总结**：对于由不等式描述的集合，在数轴上准确标出该集合的元素范围是个好方法.

例 1.5 （甲 1301）已知集合 $M=\{x|-3<x<1\}$，$N=\{-3,-2,-1,0,1\}$，则 $M\cap N=$（　）.

A．$\{-2,-1,0,1\}$　　B．$\{-3,-2,-1,0\}$　　C．$\{-2,-1,0\}$　　D．$\{-3,-2,-1\}$

解析 1：（顺向思维，分析法）

∵ $M=\{x|-3<x<1\}$，∴M 中取整数的 x 值有−2，−1，0.　　从条件出发进行分析

又∵ $N=\{-3,-2,-1,0,1\}$，∴ $M\cap N=\{-2,-1,0\}$．故选 C，不选 ABD.

解析 2：（逆向思维，排除法）

∵ $(M\cap N)\subseteq M$，∴不属于 M 的元素一定不属于 $M\cap N$.

∵ $-3\notin M$，∴排除 B、D 选项；又∵ $1\notin M$，∴排除 A，故选 C，不选 ABD.

例 1.6 （丙 1801/51）已知集合 $A=\{x\,|\,x-1\geqslant 0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（　）.

A．$\{0\}$　　B．$\{1\}$　　C．$\{1,2\}$　　D．$\{0,1,2\}$

解析：∵题设 $A=\{x\,|\,x-1\geqslant 0\}$，∴集合 A 中元素 x 的取值范围是 $x\geqslant 1$；

又∵题设 $B=\{0,1,2\}$，∴集合 B 中大于等于 1 的元素有 1 和 2.

因此，$A\cap B=\{1,2\}$.　　本题关键是要认识符号 $\cap$ 表示交集运算

故选 C，不选 ABD.

> **经验总结**：从选择题的四个选项中发现矛盾的选项可以直接进行排除，然后再用特殊值检验剩余选项，这是“秒杀”选择题的方法之一.

条件 1.3 给定列举集合与二次不等式描述集合

条件分析：给定一个列举元素的集合与一个二次不等式描述的集合求交集时，可以先求解二次不等式，然后将二次不等式描述的集合转化为一个或多个一次不等式描述的集合.

例 1.7 （甲 1601）已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x|x^2<9\}$，则 $A\cap B=$（ ）.

A. $\{-2,-1,0,1,2,3\}$ B. $\{-2,-1,0,1,2\}$ C. $\{1,2,3\}$ D. $\{1,2\}$

解析：∵ $B=\{x|x^2<9\}$，∴解 $x^2<9$ 可得：$-3<x<3$，又∵ $A=\{1,2,3\}$，∴检查 A 中的三个元素 1，2，3 是否在 $-3<x<3$ 内可得：$A\cap B=\{1,2\}$，故选 D，不选 ABC.

例 1.8 （甲 1551）已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x|(x-1)(x+2)<0\}$，则 $A\cap B=$（ ）.

A. $\{-1,0\}$ B. $\{0,1\}$ C. $\{-1,0,1\}$ D. $\{0,1,2\}$

解析 1：∵ $B=\{x|(x-1)(x+2)<0\}$，∴解 $(x-1)(x+2)<0$.

设 $y=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$，则这是一个开口向上（$a=1>0$）的抛物线.

令 $(x-1)(x+2)=0$，解得：$x_1=-2$，$x_2=1$，则 $(x-1)(x+2)<0$ 的解为：$-2<x<1$；因此，$A\cap B=\{-1,0\}$. 故选 A，不选 BCD.

解析 2：∵ $(x-1)(x+2)<0$，将 $(x-1)$ 与 $(x+2)$ 分别看成是两个实数，可得：

$\begin{cases}x-1>0\\x+2<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1<0\\x+2>0\end{cases}$；解 $\begin{cases}x-1>0\\x+2<0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x>1\\x<-2\end{cases}$ 无解；解 $\begin{cases}x-1<0\\x+2>0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x<1\\x>-2\end{cases}$，即 $-2<x<1$.

因此，$A\cap B=\{-1,0\}$. 故选 A，不选 BCD.

解析 3：∵ $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，且纵观 A、B、C、D 四个选项可见：$A\cap B$ 中只可能包含−1，0，1，2 四个元素，且四个选项中都包含“0”，所以只要将“−1”“1”和“2”三个元素代入 $(x-1)(x+2)<0$ 进行检验即可：显然，当 $x=1$ 和 $x=2$ 时，$(x-1)(x+2)\geqslant 0$. 因此，$A\cap B=\{-1,0\}$. 故选 A，不选 BCD.

> **经验总结**：从不同的思路出发往往会有不同的解析，当你从某一思路出发无法继续计算下去时，比如遇到需要使用的公式自己不记得了，不妨换个思路，也许可以避开不记得的公式.

例 1.9 （甲 1401）已知集合 $A=\{-2,0,2\}$，$B=\{x|x^2-x-2=0\}$，则 $A\cap B=$（ ）.

A. $\varnothing$ B. $\{2\}$ C. $\{0\}$ D. $\{-2\}$

解析 1：∵ $B=\{x|x^2-x-2=0\}$，∴解 $x^2-x-2=0$ 可得：$x_1=-1$，$x_2=2$. 即 $B=\{-1,2\}$. 因此，$A\cap B=\{2\}$. 故选 B，不选 ACD.

解析 2：∵ $A=\{-2,0,2\}$，∴分别将 $x=-2$，0，2，代入 $x^2-x-2=0$ 可得：当 $x=2$ 时，等式成立，因此，$A\cap B=\{2\}$. 故选 B，不选 ACD.

> **经验总结**：解析 1 采用演绎思维，将解一元二次方程所得两根作为集合 B 的元素与集合 A 求交集；解析 2 采用归纳思维，将集合 A 中的元素逐个代入方程进行检验，将所有满足方程的 A 中元素归纳起来作为交集. 很显然，当你不记得一元二次方程求根公式时，解析 2 不失为一种好方法.

例 1.10 （甲 1451）设集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，则 $M\cap N=$（ ）.

A. $\{1\}$ B. $\{2\}$ C. $\{0,1\}$ D. $\{1,2\}$

解析 1：将 $M=\{0,1,2\}$ 中的三个元素 0,1,2 分别代入不等式 $x^2-3x+2\leqslant 0$ 进行检验，经检验当 $x=1$，2 时，满足 $x^2-3x+2\leqslant 0$；当 $x=0$ 时，不满足 $x^2-3x+2\leqslant 0$. 故选 D，不选 ABC.

解析 2：解不等式 $x^2-3x+2\leqslant 0$.

令 $x^2-3x+2=0$，解得：$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$，即 $x_1=1$，$x_2=2$，故 $(x-1)(x-2)\leqslant 0$.

令 $y=x^2-3x+2$，则由二次函数图像可得 $y=(x-1)(x-2)\leqslant 0$ 的解集为 $[1,2]$．故选 D，不选 ABC．

例 1.11 （甲 1351）已知集合 $M=\left\{x\middle|(x-1)^2<4,\ x\in\mathbf{R}\right\}$，$N=\{-1,0,1,2,3\}$，则 $M\cap N=$（　）．

A．$\{0,1,2\}$　　B．$\{-1,0,1,2\}$　　C．$\{-1,0,2,3\}$　　D．$\{0,1,2,3\}$

解析：$\because M=\left\{x\middle|(x-1)^2<4,\ x\in\mathbf{R}\right\}$，$\therefore$ 解 $(x-1)^2<4$ 可得：$-2<x-1<2$，即 $-1<x<3$，因此，M 中的整数有 0，1，2．所以，$M\cap N=\{0,1,2\}$．故选 A，不选 BCD．

条件 1.4　给定列举集合与一次函数描述集合

条件分析：给定一个列举元素的集合与一个一次函数描述的集合求交集时，可以先求解一次函数描述的集合，在列举集合的函数值范围内先求出一次函数描述集合的函数值，然后转化为两个列举集合求交集．

例 1.12 （乙 1501）已知集合 $A=\{x|x=3n+2,\ n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{6,8,12,14\}$，则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为（　）．

A．5　　B．4　　C．3　　D．2

解析：$\because A=\{x|x=3n+2,\ n\in\mathbf{N}\}$，$\therefore A=\{2,5,8,11,14,\cdots\}$，从而 $A\cap B=\{8,14\}$．故选 D，不选 ABC．

条件 1.5　给定列举集合与二次函数描述集合

条件分析：给定一个列举元素的集合与一个二次函数描述的集合求交集时，必须先求解二次函数描述的集合，在列举集合的函数值范围内先求出二次函数描述集合的函数值，然后转化为两个列举集合求交集．

例 1.13 （乙 1301）已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{x|x=n^2,\ n\in A\}$，则 $A\cap B=$（　）．

A．$\{1,4\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{9,16\}$　　D．$\{1,2\}$

解析：$\because B=\{x\mid x=n^2,\ n\in A\}=\{1^2,2^2,3^2,4^2\}=\{1,4,9,16\}$，且 $A=\{1,2,3,4\}$，$\therefore A\cap B=\{1,4\}$．故选 A，不选 BCD．

条件 1.6　给定两个一次不等式描述的集合

条件分析：给定两个一次不等式描述的集合求交集时，可以在数轴上分别画出两个不等式描述集合的区域，然后确定两者的公共部分作为交集．

例 1.14 （乙 1401）已知集合 $M=\{x|-1<x<3\}$，$N=\{x|-2<x<1\}$，则 $M\cap N=$（　）．

A．$(-2,1)$　　B．$(-1,1)$　　C．$(1,3)$　　D．$(-2,3)$

解析：如图 1.2 所示在数轴上分别表示出集合 M 和集合 N 对应的区间．

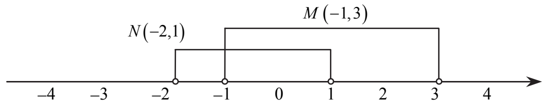


图 1.2

由图可见：$M\cap N=\{x|-1<x<1\}$，该集合用区间表示为 $M\cap N=(-1,1)$．故选 B，不选 ACD．

条件 1.7　给定一次不等式与二次不等式描述集合

条件分析：给定一个一次不等式与一个二次不等式描述的集合求交集时，必须先将二次函数描述的集合转化为两个一次不等式描述的集合进行求解．

例 1.15 （乙 1651）设集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x|2x-3>0\}$，则 $A\cap B=$（　）．

A．$\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$　　B．$\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$　　C．$\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{3}{2},3\right)$

分析：由本题所给条件：A，B 两个集合分别是用二次不等式和一次不等式描述的集合，因此，解题的思路是分别求解两个不等式，然后标在数轴上，从中“发现”其交集．$\because A=\{x|x^2-4x+3<0\}$，$\therefore$需要解二次不等式 $x^2-4x+3<0$，令 $x^2-4x+3=0$，由求根公式可得：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\dfrac{4\pm2}{2}$，解得：$x_1=1$，$x_2=3$．

因此，不等式 $x^2-4x+3<0$ 化为 $(x-1)(x-3)<0$． 此即因式分解

解析 1：将不等式 $(x-1)(x-3)<0$ 看成是两个代数式的乘积进行等价转换：

$\begin{cases}x-1<0\\x-3>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1>0\\x-3<0\end{cases}$，解 $\begin{cases}x-1<0\\x-3>0\end{cases}$ 无解；解 $\begin{cases}x-1>0\\x-3<0\end{cases}$ 得：$1<x<3$．

解析 2：令 $y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$，它是开口向上的抛物线，由“小于取中间”可得：$1<x<3$．

又$\because B=\{x|2x-3>0\}$，$\therefore$解 $2x-3>0$ 可得：$x>\dfrac{3}{2}$，又$\because \dfrac{3}{2}>1$，$\therefore A\cap B=\left\{x\middle|\dfrac{3}{2}<x<3\right\}=\left(\dfrac{3}{2},3\right)$，

故选 D，不选 ABC．

例 1.16（丙 1651）设集合 $S=\{x|(x-2)(x-3)\leqslant0\}$，$T=\{x|x>0\}$，则 $S\cap T=$（　）．

A．$[2,3]$　　B．$(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$　　C．$[3,+\infty)$　　D．$(0,2]\cup[3,+\infty)$

解析：$\because S=\{x|(x-2)(x-3)\leqslant0\}$，$\therefore 2\leqslant x\leqslant3$，又$\because T=\{x|x>0\}$，$\therefore x>0$．从而 $S\cap T=S$，即 $2\leqslant x\leqslant3$，故选 A，不选 BCD．

例 1.17（乙 1451）已知集合 $A=\{x|x^2-2x-3\geqslant0\}$，$B=\{x|-2\leqslant x\leqslant2\}$，则 $A\cap B=$（　）．

A．$[-2,-1]$　　B．$[-1,2)$　　C．$[-1,1]$　　D．$[1,2)$

解析：$\because A=\{x|x^2-2x-3\geqslant0\}$，$\therefore$解 $x^2-2x-3\geqslant0$ 可得：$(x+1)(x-3)\geqslant0$，对于开口向上的抛物线，由“大于取两端”可得：$x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant3$．

$\because A=\{x|x\leqslant-1\text{或}x\geqslant3\}$，且 $B=\{x|-2\leqslant x\leqslant2\}$，$\therefore A\cap B=\{x|-2\leqslant x\leqslant-1\}=[-2,-1]$．

故选 A，不选 BCD．

条件 1.8　给定两个曲线方程描述的集合

条件分析：给定两个曲线方程描述的集合求交集时，实际上就是求两条曲线的交点．集合的元素必定是一对数组，即坐标．

例 1.18（丙 1751）已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，$B=\{(x,y)|y=x\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为（　）．

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

解析：集合中的元素为点集，由题意可知：集合 A 表示以 $(0,0)$ 为圆心，半径为 1 的单位圆上所有点组成的集合，集合 B 表示直线 $y=x$ 上所有点组成的集合，而 $A\cap B$ 表示直线与圆的交点坐标．又因为圆心(0,0)到直线 $y=x$ 的距离为 0，所以直线过圆心，即直线与圆有两个交点，故 $A\cap B$ 中有两个元素．故选 B，不选 ACD．

问题 2　集合的并集运算

问题分析：集合运算的实质是集合中元素的运算，两个集合的并集（符号“$\cup$”与“并”字头相似）运算的实质是“寻找”两个集合包含的共同元素．

条件 2.1　给定两个列举集合

条件分析：给定两个列举元素的集合求并集时，可以以元素个数较多的集合为基础，分别将元素个数

较少的集合中的元素逐个添加到其中.

例 1.19 （甲 1701）设集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $A\cup B=$（　）.

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,3,4\}$

解析：由题意知 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$．故选 A，不选 BCD.

条件 2.2　给定列举集合与二次不等式描述集合

条件分析：给定一个列举元素的集合与一个二次不等式描述的集合求并集时，既可以先求解二次不等式描述的集合，然后转化成两个列举集合求并集，也可以将列举集合中的元素逐个代入二次不等式进行排除.

例 1.20 （甲 1652）已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x|(x+1)(x-2)<0,\ x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cup B=$（　）.

A. $\{1\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{-1,0,1,2,3\}$

解析 1：$\because B=\{x|(x+1)(x-2)<0,\ x\in\mathbf{Z}\}$，$\therefore$ 解 $(x+1)(x-2)=0$ 可得：$x_1=-1,\ x_2=2$，将 $y=(x+1)(x-2)$ 看成开口向上的抛物线，由“小于取中间”可得：$-1<x<2$，又 $\because x\in\mathbf{Z}$，$\therefore B=\{0,1\}$，即有 $A\cup B=\{0,1,2,3\}$．故选 C，不选 ABD.

解析 2：（**排除法**）$\because$ 问题是求 $A\cup B$，即求集合 A 与集合 B 的并集，$\therefore$ 结果应不少于集合 A，即排除选项 A 和选项 B，比较选项 C 和选项 D 可取 $x=-1$ 代入 $(x+1)(x-2)<0$，不符合条件. 故选 C，不选 ABD.

条件 2.3　给定两个一次不等式描述的集合

条件分析：给定两个一次不等式描述的集合求并集时，必须把两个一次不等式描述的范围“合并”在一起作为并集的计算结果.

例 1.21 （甲 1501）已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，则 $A\cup B=$（　）.

A. $(-1,3)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,2)$　　D. $(2,3)$

解析：$\because A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，$\therefore A\cup B=\{x|-1<x<3\}$．　注意是并集

故选 A，不选 BCD.

问题 3　集合的补集运算

问题分析：集合运算的实质是集合中元素的运算，两个集合的补集（符号“$\complement_A B$”表示求集合 A 中除去集合 B 中元素之外的所有元素）运算的实质是“寻找”两个集合中的不同元素.

条件 3.1　给定两个列举集合

条件分析：给定两个列举集合求补集时，可以在元素较多的集合中，把元素较少的集合中的元素全部“划去”，剩余的元素即为所求.

例 1.22 （丙 1601）设集合 $A=\{0,2,4,6,8,10\}$，$B=\{4,8\}$，则 $\complement_A B=$（　）.

A. $\{4,8\}$　　B. $\{0,2,6\}$　　C. $\{0,2,6,10\}$　　D. $\{0,2,4,6,8,10\}$

解析：$\because$ 在集合 A 中把集合 B 中的两个元素“4”和“8”删掉，即为所求，$\therefore \complement_A B=\{0,2,6,10\}$，故选 C，不选 ABD.

例 1.23 （乙 1852）已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-x-2>0\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}} A=$（　）.

A. $\{x\,|-1<x<2\}$　　B. $\{x\,|-1\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x\,|\,x<-1\}\cup\{x\,|\,x>2\}$　　D. $\{x\,|\,x\leqslant -1\}\cup\{x\,|\,x\geqslant 2\}$

分析：题设 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，为求 $\complement_{\mathbf{R}}A=$？需要先解：$x^2-x-2>0$.

令 $x^2-x-2=0$，则由一元二次方程求根公式可得：$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}$.

解得：$x_1=-1$，$x_2=2$，因此，$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. 即解 $(x+1)(x-2)>0$.

解析 1：将 $(x+1)(x-2)$ 想象成有理数 $(x+1)$ 与 $(x-2)$ 的乘积，根据有理数乘法运算法则可得：$(x+1)(x-2)>0$ 等效于 $\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x+1<0\\x-2<0\end{cases}$，解 $\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\end{cases}$ 得：$x>2$，解 $\begin{cases}x+1<0\\x-2<0\end{cases}$ 得：$x<-1$.

故不等式 $(x+1)(x-2)>0$ 的解为 $x<-1$ 或 $x>2$.

解析 2：将 $(x+1)(x-2)$ 想象成开口向上的抛物线 $y=x^2-x-2$ 的函数值，由函数表达式想象出函数图像可得：$y=x^2-x-2>0$ 的解为 $x<-1$ 或 $x>2$.

因此，$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$. 故选 B，不选 ACD.

开口向上的抛物线“大于取两端”

问题 4 集合的交集与并集运算

问题分析：集合运算的实质是集合中元素的运算，对于选项中既包含交集又包含并集的选择题，需要分别计算两个集合的交集与并集.

条件 4.1 给定两个一次不等式描述的集合

条件分析：给定两个一次不等式描述的集合求交集和并集时，可以在数轴上分别画出两个不等式描述集合的区域，然后确定两者的公共区域作为交集，两者的所有区域为并集.

例 1.24 （乙 1701）已知集合 $A=\{x\mid x<2\}$，$B=\{x\mid 3-2x>0\}$，则（ ）.

A. $A\cap B=\left\{x\mid x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　B. $A\cap B=\varnothing$　　C. $A\cup B=\left\{x\mid x<\dfrac{3}{2}\right\}$　　D. $A\cup B=\mathbf{R}$

解析：$\because B=\{x\mid 3-2x>0\}$，$\therefore$ 解 $3-2x>0$ 可得：$x<\dfrac{3}{2}$. 在数轴上分别画出集合 A 与集合 B 的区域如图 1.3 所示.

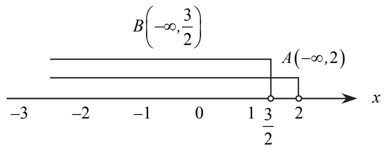


图 1.3

即 $A\cap B=\{x\mid x<2\}\cap\left\{x\mid x<\dfrac{3}{2}\right\}=\left\{x\mid x<\dfrac{3}{2}\right\}$，$A\cup B=\{x\mid x<2\}\cup\left\{x\mid x<\dfrac{3}{2}\right\}=\{x\mid x<2\}$，故选 A，不选 BCD.

条件 4.2 给定一次不等式描述与二次不等式描述的集合

条件分析：给定一个一次不等式描述和一个二次不等式描述的集合求交集和并集时，必须先求解二次不等式，然后在数轴上分别画出两个不等式描述集合的区域，最后确定两者的公共区域作为交集，两者的所有区域为并集.

例 1.25 （乙 1351）已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x>0\}$，$B=\{x\mid -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$，则（ ）.

A. $A\cap B=\varnothing$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$　　C. $B\subseteq A$　　D. $A\subseteq B$

解析：$\because A=\{x|x^2-2x>0\}$，$\therefore$解 $x^2-2x>0$ 可得：$x(x-2)>0$，由“开口向上，大于取两端”可得：$x<0$ 或 $x>2$.

$\because A=\{x|x<0或x>2\}$，且 $B=\{x|-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\}$. 在数轴上分别画出集合 A 与集合 B 的区域如图 1.4 所示.

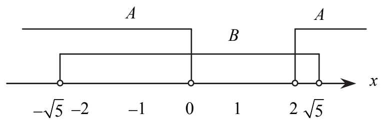


图 1.4

$\therefore A\cap B=\{x|-\sqrt{5}<x<0或2<x<\sqrt{5}\}$；$A\cup B=\mathbf{R}$，故选 B，不选 ACD.

条件 4.3　给定一次不等式描述与指数不等式描述的集合

条件分析：给定一个一次不等式和一个指数不等式描述的集合求交集和并集时，必须先求解指数不等式，然后在数轴上分别画出两个不等式描述集合的区域，最后确定两者的公共区域为交集，两者的所有区域为并集.

例 1.26（乙 1751）已知集合 $A=\{x|x<1\}$，$B=\{x|3^x<1\}$，则（　）.

A. $A\cap B=\{x|x<0\}$　　B. $A\cup B=\mathbf{R}$　　C. $A\cup B=\{x|x>1\}$　　D. $A\cap B=\varnothing$

解析：由 $3^x<1$ 可得：$3^x<3^0$ 且 $3>1$，$\therefore x<0$，即 $B=\{x|x<0\}$，因此 $A\cap B=\{x|x<1\}\cap\{x|x<0\}=\{x|x<0\}$，而 $A\cup B=\{x|x<1\}\cup\{x|x<0\}=\{x|x<1\}$，故选 A，不选 BCD.

问题 5　集合元素的求解

问题分析：集合运算的实质是集合中元素的运算，对于求解集合元素的问题，需要关注集合元素的确定性和互异性.

条件 5.1　给定列举集合与一元二次方程描述集合的交集

条件分析：集合运算的实质是集合中元素的运算，对于给定两个集合的交集，需要利用集合元素的确定性和互异性进行求解.

例 1.27（甲 1752）设集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{x|x^2-4x+m=0\}$. 若 $A\cap B=\{1\}$，则 $B=$（　）.

A. $\{1,-3\}$　　B. $\{1,0\}$　　C. $\{1,3\}$　　D. $\{1,5\}$

解析 1：由 $A\cap B=\{1\}$ 可得：$1\in B$，因此，$x=1$ 是方程 $x^2-4x+m=0$ 的根，所以将 $x=1$ 代入方程 $x^2-4x+m=0$ 可得：$m=3$. 再将 $m=3$ 代入 $x^2-4x+m=0$ 可得：$x^2-4x+3=0$，解得：$x_1=1$，$x_2=3$. 即 $B=\{1,3\}$. 故选 C，不选 ABD.

解析 2：$\because$ 从四个选项可见：$1\in B$，且从方程 $x^2-4x+m=0$ 可得：$x_1+x_2=4$，$\therefore x_2=4-x_1=4-1=3$，即 $B=\{1,3\}$. 故选 C，不选 ABD.

例 1.28（甲 1852）已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 3，x\in\mathbf{Z}，y\in\mathbf{Z}\}$，则 A 中元素的个数为（　）.

A. 9　　B. 8　　C. 5　　D. 4

解析：$\because A=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 3，x\in\mathbf{Z}，y\in\mathbf{Z}\}$，$\therefore$从这个条件应该“看到”如下信息：①集合 A 的元素为 (x,y)，即横坐标为 x，纵坐标为 y 的点；②点 (x,y) 满足 $x^2+y^2\leqslant 3$，即点 (x,y) 落在圆 $x^2+y^2=3$ 的圆周上和圆内，注意圆的半径是 $\sqrt{3}<2$，而不要误以为是 3；③点 (x,y) 的坐标满足 $x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{Z}$，即坐标的取值范围在整数集合 $\mathbf{Z}$ 内，这里需要知道符号 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合，因此 $x=\{-1,0,1\}$，$y=\{-1,0,1\}$，即 (x,y) 可取 $(-1,-1)$，$(-1,0)$，$(-1,1)$，$(0,-1)$，$(0,0)$，$(0,1)$，$(1,-1)$，$(1,0)$，$(1,1)$ 9 个点，故选 A.

第 2 题　复数背景

02

背景知识

我们把形如 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$ 的数叫做复数 z，其中 i 为虚数单位，a 叫做复数 z 的实部，b 叫做复数 z 的虚部；$\overline{z}=a-b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$ 与 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$ 互为共轭复数；$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 称为复数 z 的模，显然，$|\overline{z}|=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，且 $z\cdot\overline{z}=z^2=|\overline{z}|^2=a^2+b^2$．

设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+d\mathrm{i}(c,\ d\in\mathbf{R})$，则 $z_1=z_2\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$．即两个复数相等的充分必要条件是：两个复数的实部与虚部都相等．

$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；$\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$；$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$；$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$；$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$．

$x=\mathrm{i}$ 是方程 $x^2=-1$ 的一个根，方程 $x^2=-1$ 的另一个根是 $x=-\mathrm{i}$．

复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$ 一一对应，与向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$ 一一对应．

虚数单位 i 与实数进行四则运算时，原有加、减、乘、除等运算法依然成立．

问题 1　复数的基本运算

问题分析：由于形如 $z=a+b\mathrm{i}$ 的“数”称为复数，因此，多个复数的基本运算可以看成是多个 $(a+b\mathrm{i})$ 代数式的运算，只需将虚数单位 i 视为“实数”与其他实数（a 或 b）进行四则运算，并运用 $\mathrm{i}^2=-1$ 即可.

条件 1.1　给定复数的简单代数式

条件分析：遇到简单复数代数式的化简可以将虚数单位 i 视为一个“实数”字母，直接运用四则运算法则进行化简，并及时运用 $\mathrm{i}^2=-1$ 即可.

例 2.1（甲 1702）$(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=$（　）.

A．$1-\mathrm{i}$　　B．$1+3\mathrm{i}$　　C．$3+\mathrm{i}$　　D．$3+3\mathrm{i}$

解析：$\because(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=2+\mathrm{i}+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=1+3\mathrm{i}$，$\therefore$ 选 B，不选 ACD.

例 2.2（乙 1703）下列各式的运算结果为纯虚数的是（　）.

A．$\mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2$　　B．$\mathrm{i}^2(1-\mathrm{i})$　　C．$(1+\mathrm{i})^2$　　D．$\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$

解析：$\because$“纯虚数”是指 $a=0$ 且 $b\neq0$ 的复数，$\therefore$ 本题的目标是寻求化简结果为 $b\mathrm{i}(b\neq0)$ 的复数代数式. 理论上说，这种问题需要逐个化简，直至找到结果为 $b\mathrm{i}$ 的复数代数式为止.

但是，在本题的四个选项中，$\because$ 选项 A 与选项 C 相差“i”倍，$\therefore$ 先对选项 A 或选项 C 进行化简．$\because(1+\mathrm{i})^2=1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=2\mathrm{i}$ 为纯虚数，$\therefore$ 选 C，不选 ABD.

例 2.3（甲 1801）$\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=$（　）.

A．$3-2\mathrm{i}$　　B．$3+2\mathrm{i}$　　C．$-3-2\mathrm{i}$　　D．$-3+2\mathrm{i}$

解析：$\because\mathrm{i}(2+3\mathrm{i})=2\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2=-3+2\mathrm{i}$，　①将 i 当作“字母”进行代数运算；②利用 $\mathrm{i}^2=-1$ 代换

$\therefore$ 选 D，不选 ABC.

例 2.4 （丙 1802/52）$(1+i)(2-i)=$（ ）.

A. $-3-i$　　B. $-3+i$　　C. $3-i$　　D. $3+i$

解析：$\because (1+i)(2-i)=1\times2+1\times(-i)+i\times2+i\times(-i)=2-i+2i-i^2=3+i$.　　利用 $i^2=-1$ 化简

$\therefore$选 D，不选 ABC.

条件 1.2　给定复数的分式代数式

条件分析：对于分数形式的复数代数式，化简的基本思路是先对分子、分母分别进行化简，然后分子、分母再同乘以分母的共轭复数实现分母的“实数化”，最后再用实数分母分别去除（复数）分子的实部和虚部.

例 2.5 （乙 1452）$\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=$（ ）.

A. $1+i$　　B. $1-i$　　C. $-1+i$　　D. $-1-i$

解析：$\because \dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}=\dfrac{(1+i)^2(1+i)}{(1-i)^2}$　　将分子的 3 次幂化成 2 次幂与 1 次幂的乘积

$=\dfrac{2i}{-2i}(1+i)$　　利用 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 公式及 $i^2=-1$ 化简

$=-1-i$　　将分子、分母都有的 $2i$ 当成公约数约掉

$\therefore$选 D，不选 ABC.

例 2.6 （乙 1302）$\dfrac{1+2i}{(1-i)^2}=$（ ）.

A. $-1-\dfrac{1}{2}i$　　B. $-1+\dfrac{1}{2}i$　　C. $1+\dfrac{1}{2}i$　　D. $1-\dfrac{1}{2}i$

解析：$\dfrac{1+2i}{(1-i)^2}=\dfrac{1+2i}{1-2i+i^2}$　　对分母使用 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 公式

$=\dfrac{1+2i}{-2i}$　　利用 $i^2=-1$ 进行化简

$=\dfrac{(1+2i)i}{-2i\cdot i}$　　$\because$分母是个纯虚数，$\therefore$分子、分母同乘以 i，实现分母实数化

$=\dfrac{i+2i^2}{2}=\dfrac{-2+i}{2}=-1+\dfrac{1}{2}i$，故选 B，不选 ACD.

例 2.7 （甲 1402）$\dfrac{1+3i}{1-i}=$（ ）.

A. $1+2i$　　B. $-1+2i$　　C. $1-2i$　　D. $-1-2i$

解析：$\because \dfrac{1+3i}{1-i}=\dfrac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$　　分子、分母同乘以分母的共轭复数实现分母实数化

$=\dfrac{1+i+3i+3i^2}{1-i^2}$

$=\dfrac{-2+4i}{2}$　　分子逐项相乘，分母反用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 公式及 $i^2=-1$

$=-1+2i$.　　用实数分母分别去除分子的实部和虚部

$\therefore$选 B，不选 ACD

例 2.8 （甲 1751）$\dfrac{3+i}{1+i}=$（ ）.

A. $1+2i$　　B. $1-2i$　　C. $2+i$　　D. $2-i$

解析：$\because \dfrac{3+i}{1+i}=\dfrac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$ 分子、分母同乘以分母的共轭复数实现分母实数化

$=\dfrac{3-3i+i-i^2}{2}$ 分子逐项相乘，分母反用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 公式及 $i^2=-1$

$=2-i$，

∴选 D，不选 ABC.

例 2.9 （甲 1851）$\dfrac{1+2i}{1-2i}=$（　）.

A. $-\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$　　B. $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$　　C. $-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$　　D. $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$

解析：$\dfrac{1+2i}{1-2i}=\dfrac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\dfrac{(1+2i)^2}{1^2-(2i)^2}=\dfrac{1^2+4i+(2i)^2}{1+4}=\dfrac{-3+4i}{5}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$.

故选 D，不选 ABC.

条件 1.3　给定复数的对应点位置

条件分析：给定复数的对称形式，需要根据复平面上对应点的位置确定复数的基本形式，然后再做相应计算.

例 2.10 （甲 1452）设复数 z_1，z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称，$z_1=2+i$，则 $z_1z_2=$（　）.

A. -5　　B. 5　　C. $-4+i$　　D. $-4-i$

解析：$\because z_1=2+i$，且复数 z_1，z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称，

$\therefore z_2=-2+i$，因此，$z_1z_2=(2+i)(-2+i)=i^2-2^2=-1-4=-5$. 故选 A，不选 BCD.

问题 2　有关共轭复数的计算

问题分析：由于复数 $z=a+bi$ 的共轭复数为 $\overline{z}=a-bi$. 因此，计算共轭复数的关键是要求出复数的实部 a 与虚部 b.

条件 2.1　给定复数的代数形式

条件分析：给定复数的代数形式可以直接写出其共轭复数，然后再做代数运算.

例 2.11 （丙 1652）若 $z=1+2i$，则 $\dfrac{4i}{z\overline{z}-1}=$（　）.

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-i$

解析：$\because z=1+2i$，$\therefore \overline{z}=1-2i$，$z\overline{z}=1^2-(2i)^2=5$，$\therefore \dfrac{4i}{z\overline{z}-1}=\dfrac{4i}{5-1}=i$. 故选 C，不选 ABD.

条件 2.2　给定复数 z 的方程

条件分析：给定复数方程必须先解复数方程求出复数，然后直接写出其共轭复数，最后做代数运算.

例 2.12 （甲 1602）设复数 z 满足 $z+i=3-i$，则 $\overline{z}=$（　）.

A. $-1+2i$　　B. $1-2i$　　C. $3+2i$　　D. $3-2i$

解析：$\because$ 题设 $z+i=3-i$，$\therefore z=3-2i$， 先把复数 z 整体看成未知数解复数方程

从而 $\overline{z}=3+2i$. 再根据共轭复数与原复数的虚部互为相反数直接写出共轭复数

故选 C，不选 ABD.

问题 3 有关复数的模计算

问题分析：由于复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模为 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$．因此，计算复数的模的关键是要求出复数的实部 a 与虚部 b．

条件 3.1 给定复数的代数形式

条件分析：给定复数的代数形式，可以直接确定其共轭复数和模，然后再进行相关计算．

例 2.13 （丙 1602）若 $z=4+3\mathrm{i}$，则 $\dfrac{\overline{z}}{|z|}=$（ ）．

A．1　　B．-1　　C．$\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$　　D．$\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$

解析：$\because z=4+3\mathrm{i}$，$\therefore \overline{z}=4-3\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\dfrac{\overline{z}}{|z|}=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{5}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}\mathrm{i}$．故选 D，不选 ABC．

条件 3.2 给定复数的实部和虚部方程式

条件分析：给定复数的实部和虚部方程式，需要根据复数相等的条件列出实部相等和虚部相等的方程组，然后通过解方程组确定复数的实部和虚部，最后进行相关计算．

例 2.14 （乙 1652）设 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$，其中 x，y 是实数，则 $|x+y\mathrm{i}|=$（ ）．

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

解析：由于本题所给条件是包含两个未知实数 x，y 的复数“方程”，因此，解题的思路是利用复数相等条件建立关于 x，y 的方程组进行求解．

由题设 $(1+\mathrm{i})x=1+y\mathrm{i}$ 可得：$x+x\mathrm{i}=1+y\mathrm{i}$，　先从题设条件出发，化简条件

根据复数相等条件可得：$\begin{cases}x=1\\x=y\end{cases}$，　再利用复数相等条件列方程组

解得：$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$．　解方程组求得复数实部与虚部

因此，$|x+y\mathrm{i}|=|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$．　最后利用复数模的定义公式进行计算

故选 B，不选 ACD．

条件 3.3 给定复数的分式代数式

条件分析：给定复数分式代数式需要将其先化简成复数．

例 2.15 （甲 1302）$\left|\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\right|=$（ ）．

A．$2\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

解析 1：$\because \dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}^2}=1-\mathrm{i}$，　先同乘分母的共轭复数实现分母实数化，再化简

$\therefore \left|\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\right|=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$．　最后利用复数模的定义公式进行计算

故选 C，不选 ABD．

经验总结：复数分母实数化的有效方法是分式的分子和分母同时乘以分母的共轭复数．

解析 2：由题意可得：$\left|\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|2|}{|1+\mathrm{i}|}$　利用分数的模等于模的分数变形

$=\dfrac{2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.　分别计算分子和分母的模并化简

经验总结：计算分式的模可以分别计算分子和分母的模，这种方法往往会被忽略.

例 2.16（乙 1403）设 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 2

解析：$\because z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}+\mathrm{i}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}+\mathrm{i}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$；　同乘分母的共轭复数实现实数化分母

或 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}+\dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

$\therefore |z|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　利用复数模的定义公式进行计算

故选 B，不选 ACD.

例 2.17（乙 1802/51）设 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

解析 1：$\because z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=\dfrac{1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{-1+\mathrm{i}+\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}=\dfrac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$.

解析 2：$\because z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=\dfrac{1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(\mathrm{i}-1)^2}{(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}-1)}=\dfrac{\mathrm{i}^2-2\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}^2-1}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{-2}=\mathrm{i}$，

$\therefore |z|=1$.

解析 3：$\because z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}+2\mathrm{i}=\dfrac{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}+2\mathrm{i}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{2}+2\mathrm{i}=\mathrm{i}$，$\therefore |z|=\sqrt{0^2+1^2}=1$.

解析 4：$\because z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=\dfrac{1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}+2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，$\therefore |z|=\left|\dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|-1+\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$.

故选 C，不选 ABD.

条件 3.4　给定复数的“整式方程”

对于包含复数的“整式方程”，必须先解整式方程求解复数 z，再求其模 $|z|$.

例 2.18（丙 1752）设复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

解析 1：$\because$ 由题意可得：$z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}^2}=1+\mathrm{i}$，　解方程，并将复数化简

$\therefore |z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.　利用复数模的计算公式求解

解析 2：$\because$ 由题意可得：$z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，　先解方程求复数

$\therefore |z|=\left|\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=\frac{|2\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}$　　利用分数的模等于模的分数变形

$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.　　分别计算分子和分母的模

故选 C，不选 ABD.

条件 3.5　给定复数的“分式方程”

条件分析：对于包含复数的“分式方程”，必须先解分式方程求解复数 z，再求其模 $|z|$.

例 2.19（乙 1551）设复数 z 满足 $\frac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$，则 $|z|=$（　）.

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

解析：$\because$ 题设 $\frac{1+z}{1-z}=\mathrm{i}$，　　将其视为关于 z 的方程

$\therefore 1+z=\mathrm{i}(1-z)$，即 $(1+\mathrm{i})z=-1+\mathrm{i}$，　　视 z 为变量，解一元一次方程

解得：$z=\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-1+\mathrm{i}+\mathrm{i}+1}{2}=\mathrm{i}$，　　同乘分母的共轭复数将分母实数化并进行化简

因此，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0+1}=1$.　　利用复数模的计算公式求解

故选 A，不选 BCD.

问题 4　复数方程的求解

问题分析：对于复数方程的求解，可以将复数 z 整体看成是一个未知数，仿照实数方程求解.

条件 4.1　给定基本的复数方程

条件分析：对于给定基本的复数方程，既可以仿照代数方程进行求解，也可以用待定系数法解方程组.

例 2.20（甲 1352）设复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则 $z=$（　）.

A. $-1+\mathrm{i}$　　B. $-1-\mathrm{i}$　　C. $1+\mathrm{i}$　　D. $1-\mathrm{i}$

解析 1：$\because$ 题设 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，$\therefore z=\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$　　视 z 为未知数，直接仿照代数方程求解

$=\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2\mathrm{i}-2}{2}=-1+\mathrm{i}$.　　同乘分母的共轭复数将分母实数化并进行化简

解析 2：设 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，　　设复数的标准形式，目标求 a，b

则由题设可得：$(1-\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})=2\mathrm{i}$，

即 $(a+b)+(b-a)\mathrm{i}=2\mathrm{i}$.　　将等号两边化成复数的代数形式

根据复数相等的充要条件可得：$\begin{cases}a+b=0\\ b-a=2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$，因此 $z=-1+\mathrm{i}$.

解二元一次方程组求出 a，b，最后确定所求复数 z

故选 A，不选 BCD.

经验总结：解析 1 是基于整体思想：即将复数 z 看成是一个整体，直接解方程；解析 2 是基于方程思想，用待定系数法，列方程组求解.

例 2.21（乙 1503）已知复数 z 满足 $(z-1)\mathrm{i}=\mathrm{i}+1$，则 $z=$（　）.

A. $-2-\mathrm{i}$　　B. $-2+\mathrm{i}$　　C. $2-\mathrm{i}$　　D. $2+\mathrm{i}$

解析 1：$\because (z-1)\mathrm{i}=\mathrm{i}+1$，　　先把复数 z 整体看成未知数解方程

$\therefore z=\dfrac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}}+1=2-\mathrm{i}$.　　再利用复数的计算

解析 2：设 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，　　设复数的标准形式，目标求 a，b

则由题设可得：$(a+b\mathrm{i}-1)\mathrm{i}=\mathrm{i}+1$，即 $-b+(a-1)\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$.　　将等号两边化成复数的代数形式

根据复数相等的充要条件可得：$\begin{cases}-b=1\\ a-1=1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$，因此 $z=2-\mathrm{i}$.　　解二元一次方程组求出 a，b，最后确定所求复数 z

故选 C，不选 ABD.

条件 4.2　给定包含具体复数的模的复数方程

条件分析：对于包含具体复数的模的复数方程，必须先计算具体复数的模，然后仿照代数方程进行求解.

例 2.22　（乙 1352）若复数 z 满足 $(3-4\mathrm{i})z=|4+3\mathrm{i}|$，则复数 z 的虚部为（　）.

A. -4　　B. $-\dfrac{4}{5}$　　C. 4　　D. $\dfrac{4}{5}$

解析：$\because$ 题设 $(3-4\mathrm{i})z=|4+3\mathrm{i}|$，

而 $|4+3\mathrm{i}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，　　先利用复数模的定义公式计算 $|4+3\mathrm{i}|$

$\therefore z=\dfrac{5}{3-4\mathrm{i}}$，　　把复数 z 整体看成未知数解一元一次方程

即 $z=\dfrac{5(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}$　　同乘分母的共轭复数将分母实数化

$=\dfrac{5(3+4\mathrm{i})}{3^2-(4\mathrm{i})^2}=\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$，　　分母反用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 公式及 $\mathrm{i}^2=-1$

因此复数 z 的虚部为 $\dfrac{4}{5}$.　　最后根据复数的一般形式确定虚部

问题 5　有关实部或虚部参数的求解

问题分析：对于有关实部或虚部参数的求解问题，基本上都是需要基于复数相等的条件，列出方程（组）进行求解.

条件 5.1　给定复数代数式自身的虚部和实部相等

条件分析：因为任何一个复数代数式的化简结果必然是一个复数，因此当给定其虚部与实部相等时必须先将其化简为复数的基本形式.

例 2.23　（乙 1602）设 $(1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})$ 的虚部和实部相等，其中 a 为实数，则 $a=$（　）.

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

解析：$\because (1+2\mathrm{i})(a+\mathrm{i})=a+\mathrm{i}+2\mathrm{i}(a+\mathrm{i})=a+\mathrm{i}+2a\mathrm{i}-2=(a-2)+(1+2a)\mathrm{i}$.

$\therefore$ 根据题设“虚部和实部相等”可得：$a-2=1+2a$，　　根据题设条件列方程

解得：$a=-3$. 故选 A，不选 BCD.

条件 5.2　给定含有参数的复数方程

条件分析：对于含有参数的复数方程可将其化为两个复数相等，再利用复数相等的条件列方程组求解.

例 2.24　（甲 1502）若 a 为实数，且 $\frac{2+a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=3+\mathrm{i}$，则 $a=$（　）.

A．-4　　B．-3　　C．3　　D．4

解析：$\because \frac{2+a\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=3+\mathrm{i}$，$\therefore 2+a\mathrm{i}=(1+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})=2+4\mathrm{i}$，

根据复数相等条件可得：$a=4$.　　∵只求一个参数，∴直接比较实部或虚部即可

故选 D，不选 ABC.

例 2.25　（甲 1552）若 a 为实数，且 $(2+a\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=-4\mathrm{i}$，则 $a=$（　）.

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

解析：$\because (2+a\mathrm{i})(a-2\mathrm{i})=-4\mathrm{i}$，$\therefore 4a+(a^2-4)\mathrm{i}=-4\mathrm{i}$，$\therefore \begin{cases}4a=0\\a^2-4=-4\end{cases}$，解得：$a=0$．故选 B，不选 ACD.

> **经验总结**：有关复数实部或虚部参数的求解问题，几乎都要利用或转化为两个复数相等的条件，进而利用复数相等的充要条件进行求解.

条件 5.3　给定复数在复平面内对应点的位置

条件分析：对于给定含参复数在复平面内对应点的位置，可以根据位置列出实部或虚部的取值范围不等式组，然后进行求解.

例 2.26　（甲 1651）已知复数 $z=(m+3)+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是（　）.

A．$(-3,1)$　　B．$(-1,3)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-3)$

解析：（分析法）∵题设 $z=(m+3)+(m-1)\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点在第四象限，

$\therefore \begin{cases}m+3>0\\m-1<0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}m>-3\\m<1\end{cases}$，即 $-3<m<1$，故选 A，不选 BCD.

问题 6　复数在复平面内对应点的位置判断

问题分析：复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 在复平面内以横轴为实轴，以纵轴为虚轴.

条件 6.1　给定复数的代数式

条件分析：为了确定给定代数式的复数在复平面内对应点的位置，需要将其化为基本形式，然后再根据实部与虚部的正负确定其所在象限.

例 2.27　（丙 1702）复平面内表示复数 $z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})$ 的点位于（　）.

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

解析：$\because z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})=-1-2\mathrm{i}$，$\therefore z=\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})$ 表示复数的点位于第三象限．故选 C，不选 ABD.

第 3 题　逻辑用语背景

03

背景知识

用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫命题，其中，判断为真的句子叫真命题，判断为假的句子叫假命题．设原命题为：若 p，则 q；则逆命题为：若 q，则 p；否命题为：若 $\neg p$，则 $\neg q$；逆否命题为：若 $\neg q$，则 $\neg p$．

互为逆否命题的两个命题是等价命题（同真或同假），互逆命题或互否命题的真假无关联．

若 $p \Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件；若 $p \Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充要条件．

若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件．

“或”“且（与）”“非”是三个逻辑联结词（对应集合的“并集”“交集”和“补集”运算），用逻辑联结词将简单命题联结起来构成复合命题，复合命题有三种形式：p 或 q，记为 $p \vee q$（$\vee$ 似 or 的 r）；p 且 q，记为 $p \wedge q$（$\wedge$ 似 and 的 a）；非 p，记为 $\neg p$．

复合命题的真假判定：“真真与真”“假假或假”“真否为假”“假否为真”．

“对所有的”“对任意一个”“对每一个”“对一切”“任给”等短语在逻辑用语中称为全称量词（用 $\forall$ 表示），含有全称量词的命题叫做全称命题．

“存在一个”“至少有一个”“有一个”“有些”“有某个”“有的”等短语在逻辑用语中称为特称量词（用 $\exists$ 表示），含有特称量词的命题叫做特称命题．

问题 1　命题真假的判断

问题分析：由于命题是可以判断真假的陈述句，因此，命题应该包含条件和结论两个重要组成部分．判断一个命题的真假，既可以从条件出发通过严格的逻辑推理，证明结论正确，从而断定命题为真；也可以从条件中举某一特例否定结论，即可说明命题为假．对于复合命题的判断，必须先判断组成复合命题的基本命题的真假，再依据“真真与真”“假假或假”“真否为假”“假否为真”来判定复合命题的真假．

条件 1.1　给定“关于复数”的命题

条件分析：对于复数背景的命题，可以根据复数的运算法则来进行判断．

例 3.1　（乙 1753）设有下面四个命题，其中的真命题为（　）．

p_1：若复数 z 满足 $\dfrac{1}{z} \in \mathbf{R}$，则 $z \in \mathbf{R}$；p_2：若复数 z 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$，则 $z \in \mathbf{R}$；

p_3：若复数 z_1，z_2 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$，则 $z_1 = \overline{z_2}$；p_4：若复数 $z \in \mathbf{R}$，则 $\overline{z} \in \mathbf{R}$．

A．p_1，p_3　　B．p_1，p_4　　C．p_2，p_3　　D．p_2，p_4

解析：由于四个选项是四个命题的“组合”，因此需要先分别判断四个命题的“真伪”．

事实上，认真观察四个选项可见：在 A、B 选项中包含 p_1，在 C、D 选项中包含 p_2．

因此，只要判断 p_1 或 p_2，即可排除 A、B 或 C、D．

同理可见，在 A、C 选项中包含 p_3，在 B、D 选项中包含 p_4．

因此，只要判断 p_3 或 p_4 即可排除 A、C 或 B、D．

综上所述，只要在“p_1或p_2”与“p_3或p_4”中各判断一个命题即可确定选项：

p_1：设$z=a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})$，则$\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$．若$\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$，则$b=0$，即$z=a\in\mathbf{R}$，故$p_1$正确；

p_2：取$z=\mathrm{i}$，满足$z^2=\mathrm{i}^2=-1\in\mathbf{R}$，但$z=\mathrm{i}\notin\mathbf{R}$，故$p_2$不正确；

p_3：取$z_1=\mathrm{i}$，$z_2=\mathrm{i}$，满足$z_1z_2=\mathrm{i}^2=-1\in\mathbf{R}$，但$z_1=\mathrm{i}\neq\overline{z_2}=-\mathrm{i}$，故$p_3$不正确；

p_4：若复数$z\in\mathbf{R}$，则复数z为实数，因此其共轭复数也为实数，故p_4正确．

由此可见：对“p_1或p_2”做出判断后，很容易排除C、D，确认选项为A或B．

再对“p_3或p_4”做出判断后，即可排除A，确认B选项．故选B，不选ACD．

经验总结：本题中命题p_2和p_3均需要采用“特殊值”进行判断，如果想不到此方法还可以本着先易后难的原则，先判断出p_1和p_4都是正确的，然后在四个选项中将正确的命题打“√”，即可确认B选项正确．

条件 1.2　给定“不等式组解集”的命题

条件分析：对于不等式组解集的命题，可以考虑借助作图来判断命题的真假．

例 3.2（乙 1459）不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-2y\leqslant 4\end{cases}$的解集记为$D$．有下面四个命题，其中真命题是（　）．

p_1：$\forall(x,y)\in D,x+2y\geqslant -2$，　　p_2：$\exists(x,y)\in D,x+2y\geqslant 2$

p_3：$\forall(x,y)\in D,x+2y\leqslant 3$，　　p_4：$\exists(x,y)\in D,x+2y\leqslant -1$

A．p_2，p_3　　B．p_1，p_4

C．p_1，p_2　　D．p_1，p_3

解析：作出$\begin{cases}x+y\geqslant 1\\ x-2y\leqslant 4\end{cases}$的可行域如图3.1所示，并根据四个命题确定目标函数z，设$z=x+2y$，则$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$，显然，目标函数的几何意义是直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$截距的两倍．由图可见，当直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$过$A(2,-1)$时，截距最小，即$z_{\min}=2+2\times(-1)=0$，因此，目标函数$z\geqslant 0$，据此判断命题$p_1$，$p_2$为真．故选C，不选ABD．

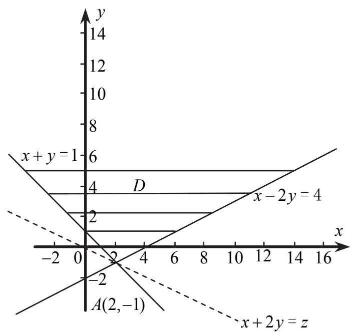


图 3.1

条件 1.3　给定“有关充要条件”的命题

条件分析：对于有关充要条件的命题，需要分别考虑命题的充分性（由条件能推导出结论成立）与必要性（由结论能反推出条件成立）．

例 3.3（甲 1403）函数$f(x)$在$x=x_0$处导数存在，若p：$f'(x_0)=0$，q：$x=x_0$是$f(x)$的极值点，则（　）．

A．p是q的充分必要条件　　B．p是q的充分条件，但不是q的必要条件

C．p是q的必要条件，但不是q的充分条件　　D．p既不是q的充分条件，也不是q的必要条件

解析：$\because$若$f'(x_0)=0$，则x_0不一定是$f(x)$的极值点，例如，$f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，$f'(0)=0$，因为0的两侧，导数值皆大于0，故$x=0$不是$f(x)$的极值点．　　由条件p不一定能推导出结论q

$\therefore p$不是q的充分条件．因此，排除A和B；

又$\because$若x_0是$f(x)$的极值点，则$f'(x_0)=0$，　　由结论q能够推导出条件p

$\therefore p$是q的必要条件．因此，排除D．故选C，不选ABD．

条件 1.4　给定全称命题和特称命题

条件分析：对于全称命题和特称命题的原命题和否命题的“与”“或”命题的判断，需要首先判断原命题的“是（真）”与“非（假）”，然后，基于原命题与逆否命题互为等价命题进行判断.

例 3.4　（乙 1305）已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x<3^x$；命题 q：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^3=1-x^2$，则下列命题中为真命题的是（　）.

A．$p\wedge q$　　B．$\neg p\wedge q$　　C．$p\wedge\neg q$　　D．$\neg p\vee\neg q$

解析：∵命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x<3^x$，∴取 $x=-1$，或由 $y=a^x(a>1)$ 可知：

当 $x<0$ 时，命题 p 为假，命题 $\neg p$ 为真；

同理可得：当 $x\geqslant 0$ 时，命题 $\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$2^x\geqslant 3^x$ 为真.

综上所述，命题 $\neg p$：$\exists x\in\mathbf{R}$，$2^x\geqslant 3^x$ 为真.　关注真命题

又令 $f(x)=x^3+x^2-1$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(0)\cdot f(1)<0$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有零点，即 $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^3=1-x^2$．故命题 q 为真（$\neg q$ 为假）.　关注真命题

又∵ $\wedge$ 表示和的含义，∴ $\neg p\wedge q$ 为真．故选 B，不选 ACD.

> **经验总结：**两个命题的“与”或“非”组成的命题称为复合命题．复合命题的“真假”判断可以依据如下原则．对于“与”命题：“两真为真，一假为假（其余为假）”；对于“或”命题：“两假为假，一真为真（其余为真）”.

条件 1.5　给定含有多个参数的三次函数解析式

条件分析：根据题设条件，结合选项问题逐个分析.

例 3.5　（甲 1311/60）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，下列结论中错误的是（　）.

A．$\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)=0$

B．函数 $y=f(x)$ 的图像是中心对称图形

C．若 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,x_0)$ 单调递减

D．若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x_0)=0$

解析：遇到“下列结论中错误的是”这类问题，一般都需要逐个排除，除非一眼能看出错误的选项并加以验证.

A 选项：∵当 $c=0$ 时，$f(0)=0$，∴ $\exists x_0=0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)=0$.

当 $c\neq 0$ 时，$x\to-\infty$，$f(x)=x^3(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x^3})<0$；$x\to+\infty$，$f(x)=x^3(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{c}{x^3})>0$.

根据“零点存在定理”，$\exists x_0\in\mathbf{R}$，使 $f(x_0)=0$．故 A 选项正确.

B 选项：∵ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，且 $(x+m)^3=x^3+3mx^2+3m^2x+m^3$，

∴令 $a=3m$ 可得：$f(x)=(x+m)^3+bx+c-3m^2x-m^3=(x+m)^3+(b-3m^2)x+(c-m^3)$，

即 $f(x)-(c-m^2)=(x+m)^3+(b-3m^2)x$.

设 $F(x)=f(x)-(c-m^2)=(x+m)^3+(b-3m^2)x$，则∵ $y=x^3+nx$ 是关于 $(0,0)$ 对称的奇函数，

∴ $F(x)$ 是关于 $(-m,0)$ 对称的奇函数，从而 $f(x)$ 是关于 $(-m,c-m^2)$ 对称的奇函数，故 B 选项正确.

C 选项：∵ $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 是开口向上的抛物线，令 $f'(x)=0$ 可解得：$x=x_1$，$x=x_2$.

设 $x_1<x_2$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调递增，在 (x_1,x_2) 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $x_0=x_2$ 处取得极小值，即在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，故 C 选项错误.

D 选项：若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，则一定有 $f'(x_0)=0$，故 D 选项正确．综上所述，选 C，不选 ABD.

问题 2 写出特称命题或全称命题的否定

问题分析：关于特称命题或全称命题的否定，首先要判定所给命题究竟是特称命题还是全称命题，尤其是对于一些“全称量词”不太明确的命题，需要补充全称量词后再验证是否与原命题相符；其次是在改写为否定的过程中必须做到两点：一是将“全称量词”与“特称量词”进行“互换（对调）”来改写命题的条件，二是对所给（全称或特称）命题的结论进行“否定”。

条件 2.1 给定特称命题

条件分析：对于给定的特称命题，改写为否定的基本方法是：将“特称”命题改为“全称”命题，然后否定原特称命题的结论. 例如，特称命题 p：$\exists x_0 \in M$，$p(x_0)$ 的否定为 $\neg p$：$\forall x \in M$，$\neg p(x)$.

例 3.6 （乙 1553）设命题 p：$\exists n \in \mathbf{N}$，$n^2 > 2^n$，则 $\neg p$ 为（ ）.

A. $\forall n \in \mathbf{N}$，$n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in \mathbf{N}$，$n^2 \leqslant 2^n$ C. $\forall n \in \mathbf{N}$，$n^2 \leqslant 2^n$ D. $\exists n \in \mathbf{N}$，$n^2 = 2^n$

解析：∵题设命题 p：$\exists n \in \mathbf{N}$，$n^2 > 2^n$，

由于命题 p 中包含有“∃”（特称）符号， 判断全称命题“∀”和特称命题“∃”的依据

因此，命题 p 是一个特称命题.

又∵问题中“$\neg p$”包含“¬”（否定）符号， “$\neg p$”的含义：命题 p 的否定

∴问题转化为写出题设特称命题的“否定”. 写出特称命题的否定

所谓“否定”首先要“否定”原命题的结论：即将 $n^2 > 2^n$ 改为 $n^2 \leqslant 2^n$， 结论否定

其次需要将特称（∃）命题改为全称（∀）命题. 命题条件转换

因此，$\neg p$：$\forall n \in \mathbf{N}$，$n^2 \leqslant 2^n$. 构成特称命题的否定

故选 C，不选 ABD.

条件 2.2 给定全称命题

条件分析：对于给定的全称命题，改写为其否命题的基本方法是：将“全称”命题改为“特称”命题，然后否定原“全称”命题的结论. 例如，“全称”命题 p：$\forall x \in M$，$p(x)$ 的否定为 $\neg p$：$\exists x_0 \in M$，$\neg p(x_0)$.

例 3.7 （浙 1654）命题“$\forall x \in \mathbf{R}$，$\exists n \in \mathbf{N}^*$，使得 $n \geqslant x^2$”的否定形式是（ ）.

A. $\forall x \in \mathbf{R}$，$\exists n \in \mathbf{N}^*$，使得 $n < x^2$ B. $\forall x \in \mathbf{R}$，$\forall n \in \mathbf{N}^*$，使得 $n < x^2$

C. $\exists x \in \mathbf{R}$，$\exists n \in \mathbf{N}^*$，使得 $n < x^2$ D. $\exists x \in \mathbf{R}$，$\forall n \in \mathbf{N}^*$，使得 $n < x^2$

解析：∵命题条件“$\forall x \in \mathbf{R}$，$\exists n \in \mathbf{N}^*$”转换为“$\exists x \in \mathbf{R}$，$\forall n \in \mathbf{N}^*$”，命题结论“$n \geqslant x^2$”的否定是“$n < x^2$”.

∴命题“$\forall x \in \mathbf{R}$，$\exists n \in \mathbf{N}^*$，使得 $n \geqslant x^2$”的否定是“$\exists x \in \mathbf{R}$，$\forall n \in \mathbf{N}^*$，使得 $n < x^2$”.

故选 D，不选 ABC.

例 3.8 （鄂 1403）命题“$\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 \neq x$”的否定是（ ）.

A. $\forall x \notin \mathbf{R}$，$x^2 \neq x$ B. $\forall x \in \mathbf{R}$，$x^2 = x$

C. $\exists x \notin \mathbf{R}$，$x^2 \neq x$ D. $\exists x \in \mathbf{R}$，$x^2 = x$

解析：∵“$\forall x \in \mathbf{R}$”转换为“$\exists x \in \mathbf{R}$”，“$x^2 \neq x$”的否定是“$x^2 = x$”，

∴原命题的否定是“$\exists x \in \mathbf{R}$，$x^2 = x$”，故选 D，不选 ABC.

例 3.9 （川 1354）设 $x \in \mathbf{Z}$，集合 A 是奇数集，集合 B 是偶数集. 若命题 p：$\forall x \in A$，$2x \in B$，则（ ）.

A. $\neg p$：$\forall x \in A$，$2x \notin B$ B. $\neg p$：$\forall x \notin A$，$2x \notin B$

C. $\neg p$：$\exists x \notin A$，$2x \in B$ D. $\neg p$：$\exists x \in A$，$2x \notin B$

解析：∵四个选项都是“$\neg p$”，∴问题的实质是写出题设命题的否定.

∵题设命题 p：$\forall x \in A$，$2x \in B$，∴题设命题的否定为 $\exists x \in A$，$2x \notin B$.

故选 D，不选 ABC.

例 3.10 （皖 1157）命题“所有能被 2 整除的数都是偶数”的否定是（　）.

A．所有不能被 2 整除的数都是偶数　　B．所有能被 2 整除的数都不是偶数

C．存在一个不能被 2 整除的数是偶数　　D．存在一个能被 2 整除的数不是偶数

解析：本题的关键是要确定所给命题“所有能被 2 整除的数都是偶数”为全称命题，然后把全称量词“所有能被 2 整除的数”改为特称量词“存在一个能被 2 整除的数”，再将结论“是偶数”改为否定结论“不是偶数”．故选 D，不选 ABC.

> **经验总结：**① 全称命题与特称命题的“否定”仅仅是转换条件和否定结论，而不是原命题的“否命题”，既要否定“结论”，也要否定“条件”；② 将原命题改写为否命题时，不要受否命题真假的影响：不要以为否命题不成立（为“假”）就怀疑自己将否命题写错了.

问题 3　写出原命题的逆否命题

问题分析：命题的逆否命题，是指将原命题的“条件”和“结论”先进行对调再同时进行否定．特别需要注意：“逆否命题”是需要同时对条件和结论进行否定的.

条件 3.1　给定原命题

条件分析：对于给定命题，改写其逆否命题的基本方法是：将原命题的结论否定后作为条件，再将原命题的条件否定后作为结论.

例 3.11 （鲁 1505）设 $m\in\mathbf{R}$，命题“若 $m>0$，则方程 $x^2+x-m=0$ 有实根”的逆否命题是（　）.

A．若方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，则 $m>0$

B．若方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，则 $m\leqslant 0$

C．若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根，则 $m>0$

D．若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根，则 $m\leqslant 0$

解析：∵原命题的条件是“若 $m>0$”，结论是“方程 $x^2+x-m=0$ 有实根”.

∴逆否命题的结论是“$m\leqslant 0$”，条件是“方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根”.

因此，逆否命题为“若方程 $x^2+x-m=0$ 没有实根，则 $m\leqslant 0$”.

故选 D，不选 ABC.

第 4 题　合情推理背景

04

背景知识

合情推理包含归纳推理和类比推理两种基本推理方法．

归纳推理：根据某类事物的部分对象具有的某些特征，推测出该类事物的全部对象都具有这种特征的推理方法，是"从部分到整体，从个别到一般"的推理方法，属于不完全归纳推理．

类比推理：根据两类事物（对象）具有某些类似特征及其中一类事物（对象）具有某些已知特征，推测出另一类事物（对象）也具有（相似）这些已知特征的推理方法，是"从特殊到特殊"的推理．类比可以从以下几个方面进行：定义类比、性质类比、过程类比、方法类比和结构类比．

虽然合情推理可以为证明提供思路与方向，但是，合情推理仅仅是"合乎情理"的推理，它所得到的结论不一定正确，需要进行验证．（一般考题中合情推理的结论唯一）

问题 1　推测（归纳）全体事物的特征

问题分析：推测全体事物的特征问题属于从一类事物部分对象的已知特征推测出该类事物全体对象的一般特征，是"从个别到一般，从部分到全体"的归纳推理. 推理的关键是要"找到"个别对象或部分对象的特征.

条件 1.1　给定某些事物(或对象)的某些特征

条件分析：当给定某些事物(或对象)的某些特征时，关键是要找到不同对象之间的特征变化，进而发现特征变化的规律.

例 4.1　（鲁 1561）观察下列各式：

$C_1^0=4^0$；

$C_3^0+C_3^1=4^1$；

$C_5^0+C_5^1+C_5^2=4^2$；

$C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=4^3$；

……

照此规律，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$C_{2n-1}^0+C_{2n-1}^1+C_{2n-1}^2+\cdots+C_{2n-1}^{n-1}=$____________.

解析：∵观察各式可见：① 每一行都是一个等式；②第 m 行等式的左边是从 C_{2m-1}^0 到 C_{2m-1}^{m-1} 的连续 m 项之和；③ 第 m 行等式的右边是 4^{m-1} .

∴第 n 行的计算结果应该是 4^{n-1}，即 $C_{2n-1}^0+C_{2n-1}^1+C_{2n-1}^2+\cdots+C_{2n-1}^{n-1}=4^{n-1}$.

例 4.2　（鲁 1612）观察下列等式：

$(\sin\frac{\pi}{3})^{-2}+(\sin\frac{2\pi}{3})^{-2}=\frac{4}{3}\times1\times2$；

$(\sin\frac{\pi}{5})^{-2}+(\sin\frac{2\pi}{5})^{-2}+(\sin\frac{3\pi}{5})^{-2}+(\sin\frac{4\pi}{5})^{-2}=\frac{4}{3}\times2\times3$；

$(\sin\frac{\pi}{7})^{-2}+(\sin\frac{2\pi}{7})^{-2}+(\sin\frac{3\pi}{7})^{-2}+\cdots+(\sin\frac{6\pi}{7})^{-2}=\frac{4}{3}\times3\times4$；

$(\sin\frac{\pi}{9})^{-2}+(\sin\frac{2\pi}{9})^{-2}+(\sin\frac{3\pi}{9})^{-2}+\cdots+(\sin\frac{8\pi}{9})^{-2}=\frac{4}{3}\times4\times5$；

……

照此规律，$(\sin\frac{\pi}{2n+1})^{-2}+(\sin\frac{2\pi}{2n+1})^{-2}+(\sin\frac{3\pi}{2n+1})^{-2}+\cdots+(\sin\frac{2n\pi}{2n+1})^{-2}=$____________.

解析：∵①第 n 行的左边有 n 项；②每一行计算结果的首项都是 $\frac{4}{3}$；③第 n 行计算结果的后两项依次是 $n(n+1)$．∴推测最后一行的计算结果是 $\frac{4}{3}n(n+1)$，即：

$(\sin\frac{\pi}{2n+1})^{-2}+(\sin\frac{2\pi}{2n+1})^{-2}+(\sin\frac{3\pi}{2n+1})^{-2}+\cdots+(\sin\frac{2n\pi}{2n+1})^{-2}=\frac{4}{3}n(n+1)$．

例 4.3　（陕 1516）观察下列等式：

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$；

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$；

……

据此规律，第 n 个等式可为____________.

解析：观察等式可知：① 第 n 个等式的左边有 $2n$ 个数相加减，奇数项为正，偶数项为负，且每一项的分子均为 1，分母是从 1 到 $2n$ 的连续正整数；②等式的右边是等式左边的后 n 项和，即从第 n+1 项到第 $2n$ 项的和：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$．故第 n 个等式可为：

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

例 4.4　（陕 1364）观察下列等式：

$1^2=1$；

$1^2-2^2=-3$；

$1^2-2^2+3^2=6$；

$1^2-2^2+3^2-4^2=-10$；

……

照此规律，第 n 个等式可为_____________.

解析：∵第 n 个等式左侧为 $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2$，∴分 n 为偶数、奇数两种情况进行讨论：

当 n 为偶数时，分组求和：$(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+[(n-1)^2-n^2]=-\frac{n(n+1)}{2}$；

当 n 为奇数时，第 n 个等式$=-\frac{n(n-1)}{2}+n^2=\frac{n(n+1)}{2}$．

综上所述，第 n 个等式：$1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=\frac{(-1)^{n+1}}{2}n(n+1)$．

例 4.5　（陕 1313）观察下列等式：

$(1+1)=2\times1$

$(2+1)(2+2)=2^2\times1\times3$

$(3+1)(3+2)(3+3)=2^3\times1\times3\times5$

……

照此规律，第 n 个等式可为________.

解析：观察式子左侧可见：第 n 行共有 n 个因式相乘，第 n 行的因式都是从 $(n+1)$ 开始，到 $(n+n)$ 结束，即左式为 $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$；

观察式子右侧可见：第 n 行的第一项都是 2^n，第 n 行的后续项依次是 n 个连续奇数的乘积，即右式为 $2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$，

因此，第 n 个等式可为 $(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+n)=2^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$.

例 4.6 （鄂 1217）传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上面画点或用小石子表示数．他们研究过如图 4.1 所示的（若干个）三角形数：

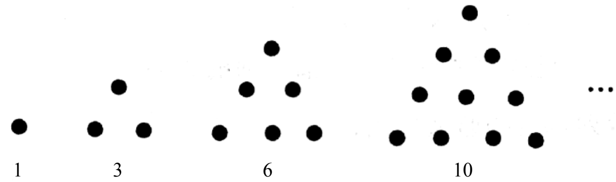


图 4.1

（依次）将（每一个）三角形的点数 $1,3,6,10,\cdots$ 记为数列 $\{a_n\}$，将可被 5 整除的三角形点数按从小到大的顺序组成一个新数列 $\{b_n\}$，可以推测：b_{2012} 是数列 $\{a_n\}$ 中的第______项；$b_{2k-1}=$__________．（用 k 表示）

解析：∵由图可见：每一个三角形的点数都是以 1 为首项，公差为 1 的等差数列的前若干项和，其中，第 1 个三角形的点数为前 1 项的和，第 2 个三角形的点数为前 2 项的和，……

∴三角形点数 $1,3,6,10,\cdots$ 的通项公式可以为 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.　利用等差数列前 n 项和计算公式

据此可以写出数列 $\{a_n\}$ 的前若干项：$1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,66,78,91,105,110,\cdots$

发现其中能被 5 整除的为 $10,15,45,55,105,110$，故 $b_1=a_4$，$b_2=a_5$，$b_3=a_9$，$b_4=a_{10}$，$b_5=a_{14}$，$b_6=a_{15}$.

从而由上述规律可猜想：$b_{2k}=a_{5k}=\dfrac{5k(5k+1)}{2}$（$k$ 为正整数），　①

$b_{2k-1}=a_{5k-1}=\dfrac{(5k-1)(5k-1+1)}{2}=\dfrac{5k(5k-1)}{2}$，　②

故 $b_{2012}=b_{2\times1006}=a_{5\times1006}=a_{5030}$.　利用①式得出结论

即 b_{2012} 是数列 $\{a_n\}$ 中的第 5030 项.

问题 2　推测（类比）个别事物的特征

问题分析：推测个体特征（结果）的问题属于从一类事物的已知特征推测出另一类事物的这类特征问题，即从特殊到特殊的推理，应当采用类比的推理方法，常用的类比方法有：定义类比、性质类比、过程类比、方法类比和结构类比．但是，在实际的推理问题中，往往需要先借助归纳的方法归纳出事物的共同属性，然后再进行类比推理．也就是说，归纳推理和类比推理往往需要综合运用.

条件 2.1　给定某些事物的某些相同特征

条件分析：先归纳出所有事物的共同特征，再类比出个别事物的具体特征.

例 4.7 （乙 1414/64）甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A、B、C 三个城市时，甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；乙说：我没去过 C 城市；丙说：我们三人去过同一个城市．由此可判断乙去过的城市为________.

解析：∵最终是要判断乙去过哪个城市．∴首先需要对甲、乙、丙去过的城市进行推测．

∵甲说没去过 B 城市，∴推测甲可能去过 A、C 两个城市；

又∵乙说没去过 C 城市，∴推测乙可能去过 A、B 两个城市；

又∵丙说三人同去过同一个城市，∴推测丙至少去过甲、乙都去过的 A 城市；

对甲、乙、丙去过的城市进行归纳可得：他们都去过 A 城市．　归纳事物的共同属性

又∵甲说我去过的城市比乙多，　将甲、乙去过的城市进行类比可得

∴甲去过 A 和 C 城市，而乙只去过 A 城市．至此，可以判断：乙去过的城市为 A．

例 4.8　（甲 1709/57）甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩，老师说："你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩．"看后甲对大家说："我还是不知道我的成绩．"根据以上信息，则（　）．

A．乙可以知道四人的成绩　　B．丁可以知道四人的成绩

C．乙、丁可以知道对方的成绩　　D．乙、丁可以知道自己的成绩

分析：由于从四个选项来看，本题的结论是需要判定乙和丁可以知道成绩的对象，属于对个体特征的推测，因此属于从特殊到特殊的推理，故应采用"类比"的方法进行推理．

解析：∵题设"四人中有 2 位优秀，2 位良好"，

∴成绩的等级只有"优秀"和"良好"两种．

∵甲在看了乙、丙的成绩后说还不知道自己的成绩，

∴需要借此来推断乙、丙的成绩，即将乙、丙的成绩与两个人可能的成绩进行类比．

由于成绩只有"优秀"和"良好"，因此，两个人的成绩只有三种可能：一是两人优秀，二是两人良好，三是一人优秀一人良好．

由于甲在看了乙、丙成绩后还不知道自己的成绩，

因此乙、丙的成绩只能是一人优秀一人良好，　将两人的成绩与三种可能类比

从而甲、丁的成绩也是一人优秀一人良好．　将甲、丁的成绩与乙、丙的成绩和四人的成绩类比

又∵题设"给乙看丙的成绩"，∴根据"乙、丙一人优秀一人良好"可以知道：乙在看到了丙的成绩之后，也能推测出自己的成绩了．　将丙的成绩与乙、丙的成绩类比

又丁看到了甲的成绩后则知道了自己的成绩．　将甲、丁的成绩与乙、丙的成绩类比

综上所述，乙看到了丙的成绩，推测出了自己的成绩；丁看到了甲的成绩，推测出了自己的成绩．

因此，归纳乙、丁所知道的成绩可得：他们都知道了自己的成绩．　归纳

故选 D，不选 ABC．

条件 2.2　给定某些事物的某些不同特征

条件分析：先类比出事物的不同特征，再依据不同特征进行类比．

例 4.9　（甲 1616/65）有三张卡片，分别写有 1 和 2，1 和 3，2 和 3．甲、乙、丙三人各取走一张卡片，甲看了乙的卡片后说："我与乙的卡片上相同的数字不是 2．"乙看了丙的卡片后说："我与丙的卡片上相同的数字不是 1．"丙说："我的卡片上的数字之和不是 5．"则甲的卡片上的数字是__________．

解析：∵最终目标是确定甲所拿卡片上的数字，　基于三人所拿卡片与题设卡片进行类比

∴必须先确定乙和丙所拿卡片上的数字．

分析三人所说的"话"，　类比出相同事物三个人的不同特征：甲、乙均是与别人比，丙说的自己

可以确定丙拿的不是"2，3"卡片，而甲、乙必有一人拿了"2，3"卡片．　据此分别类推

假设甲拿了"2，3"：

∵甲说："我与乙的卡片上相同的数字不是 2"，∴ 乙拿了"1，3"，丙拿了"1，2"，这与乙所说"我与丙的卡片上相同的数字不是 1"相矛盾；

假设乙拿了"2，3"：

∵甲说："我与乙的卡片上相同的数字不是 2"，∴甲拿了"1，3"，丙拿了"1，2"，这与乙所说"我与丙的卡片上相同的数字不是 1"（实际相同数字是 2）相一致．

因此，甲拿了"1，3"，乙拿了"2，3"，丙拿了"1，2"卡片．

第 5 题 计数原理背景

05

背景知识

分类加法计数原理：如果完成一件事情共有 n 类不同的方案，在第 1 类方案中有 m_1 种方法，在第 2 类方案中有 m_2 种方法，……，在第 n 类方案中有 m_n 种方法，那么完成这件事情共有 $M=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.（注意：n 类方案共有 M 种方法，分类不重不漏，每类计数准确.）

分步乘法计数原理：如果完成一件事情共有 n 个（相同或不同）步骤，做（完成）第 1 步有 m_1 种方法，做（完成）第 2 步有 m_2 种方法，……，做（完成）第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事情共有 $M=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种方法.（注意：n 步方法共有 M 种方法，分步完整无缺，每步计数准确.）

排列：从 n 个不同元素中取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列.（注意：由于“按一定顺序排成的一列”称为“一个排列”，因此，“按不同顺序排成的列”会产生或形成不同的排列.）

排列数：从 n 个不同元素中（不放回地）取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个元素的所有可能的取法即不同排列的个数，叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的排列数．排列数的计算公式为 $\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$，这个公式可以用分步（乘法）计数原理来解释：将取出 m 个元素看成是经历 m 步，每步取出 1 个元素，其中第 1 步是从 n 个元素中取出 1 个元素，共有 n 种取法；第 2 步是从 $(n-1)$ 个元素中取出 1 个元素，共有 $(n-1)$ 种取法，……，第 m 步是从 $(n-m+1)$ 个元素中取出 1 个元素，共有 $(n-m+1)$ 种取法.

组合：从 n 个不同元素中取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个元素组成一组，叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的一个组合.［注意：“一个组合”仅仅与该组合中的 m 个元素有关，而与 m 个元素被抽取的先后顺序（或排列）无关，因此，组合是无序的］

组合数：从 n 个不同元素中（有放回地）取出 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个元素的所有可能的取法即不同组合的个数，叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的组合数．组合数的计算公式为 $\mathrm{C}_n^m=\dfrac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

二项式定理：$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^nb^0+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+\mathrm{C}_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+\mathrm{C}_n^na^{n-n}b^n$.

（注意：①二项展开式共有 $n+1$ 项，按 a 的指数从 n 开始逐项降幂排列，按 b 的指数从 0 到 n 排列；②每项 a，b 的指数和为 n；③第 $m+1$ 项是 $T_{m+1}=\mathrm{C}_n^ma^{n-m}b^m$；④第 $m+1$项的二项式系数是组合数 C_n^m .）

问题 1 与结果的顺序（或位置）有关的排列数问题

问题分析：遇到与结果的顺序（或位置）有关的问题都需要计算排列数.

条件 1.1 给定人数少于任务（项目）数量的条件并且每人都有任务

条件分析：当给定人数少于任务（项目）数量且每人都有任务时，通常需要计算从“任务”数中抽取“人数”的排列数.

例 5.1 （粤 1562）某高三毕业班有 40 人，同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言，那么全班共写了________条毕业留言.（用数字作答）

解析 1：（算术解法）∵两两彼此给对方留言，

∴每人给除自己之外的 39 人都写了留言，故 40 人写了 $40\times39=1560$（条）.

解析 2：（排列解法）∵两两彼此给对方写一条毕业留言相当于从 40 人中任选两人的排列数，

∴全班共写了 $A_{40}^{2}=40\times39=1560$（条）毕业留言，故应填 1560.

例 5.2　（纲 1364）6 个人排成一行，其中甲、乙两人不相邻的不同排法共有______种.（填数字）

解析：∵题设“甲、乙两人不相邻”，∴不能将“甲、乙”捆为“一体”，只能分开来插“空”.

第一步：先计算除甲、乙之外的 4 人有多少种不同的排法.

∵除甲、乙之外的 4 个人虽然没有特别要求，但是不同的人“站”在不同的位置就属于不同的排法，

∴这是典型的计算“四中取四”排列数的问题，故有 $A_4^4=4!=4\times3\times2\times1=24$（种）排法.

第二步：∵4 个人“两两”之间可以形成 3 个“空”，再加上两端各有一个“空”，即除甲、乙之外的 4 个人可以形成 5 个“空”位．将甲、乙两人插入这 5 个“空”当中，插在不同的两个“空”位置，就是两种不同的排列，

因此，这相当于从 5 个“空”位中“抽”两个“空”位（不仅与数量有关，而且与位置有关），有 $A_5^2=5\times4=20$（种）.

最后根据分步计数法可得共有 $A_4^4\cdot A_5^2=24\times20=480$（种）排法.

例 5.3　（丙 1662）定义“规范 01 数列”$\{a_n\}$如下：$\{a_n\}$共有 $2m$ 项，其中 m 项为 0，m 项为 1，且对任意 $k\leqslant 2m$，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中 0 的个数不少于 1 的个数．若 m=4，则不同的“规范 01 数列”共有（　）.

A．18 个　　B．16 个　　C．14 个　　D．12 个

解析：本题初看是“数列”问题，但细看则是排列问题.

∵$\{a_n\}$共有 $2m$ 项，其中有 m 项个 0，m 项个 1，

∴问题的实质是 m 个 0，m 个 1，如何排列.

又∵对任意 $k\leqslant 2m$，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 中 0 的个数不少于 1 的个数.

∴令 $m=1$，则 $a_1=0$，$a_2=1$ 或 $a_1=1$，$a_2=0$（不合，删），

当 m=4 时，$a_1=0$，$a_8=1$，或 $a_1=1$，$a_8=0$（不合，删），

以 $a_1=0$，$a_8=1$列表，如表 5.1 所示.

表 5.1

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	1	1	1	1
2	0	0	0	1	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1	0	1	1
4	0	0	0	1	1	1	0	1
5	0	0	1	0	0	1	1	1
6	0	0	1	0	1	0	1	1
7	0	0	1	0	1	1	0	1
8	0	0	1	1	0	1	0	1
9	0	0	1	1	0	0	1	1
10	0	1	0	0	0	1	1	1
11	0	1	0	0	1	0	1	1
12	0	1	0	0	1	1	0	1
13	0	1	0	1	0	1	0	1
14	0	1	0	1	0	0	1	1

因此，不同的“规范 01 数列”共有 14 个，故选 C，不选 ABD.

例 5.4 （川 1556）用数字 0，1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，其中比 40000 大的偶数共有（　）.

A．144 个　　B．120 个　　C．96 个　　D．72 个

解析：∵题设用数字 0，1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，

∴相当于在 6 个数字中取 5 个进行排列（即不放回地抽取）.

又∵要求“比 40000 大”，∴万位上的数字只能是 4 或 5.

又∵要求“是偶数”，∴个位上的数字只能是 0，2 或 4.

若万位上排 4，则个位上只能是 0 或 2：当个位排 0 时，中间三位是从“1，2，3，5”4 个数字中抽取 3 个进行排列，共有 A_4^3（种）；当个位排 2 时，中间三位是从“0，1，3，5”4 个数字中抽取 3 个进行排列，也有 A_4^3（种）．由分类计数原理可得，共有 $2A_4^3=2\times4\times3\times2=48$（个）偶数.

若万位上排 5，则个位上可以是 0，2 或 4，中间的三位数依旧是从剩余的 4 个数字中抽取 3 个，因此，由分类计数原理可得，共有 $3A_4^3=3\times4\times3\times2=72$（个）偶数.

最后，再根据分类计数原理可得，总共有 $48+72=120$（个）偶数．故选 B，不选 ACD.

问题 2　与结果的顺序（或位置）无关的组合数问题

问题分析：遇到与结果的顺序（或位置）无关的问题需要计算组合数.

条件 2.1　给定目标或行进路线

条件分析：当给定目标或行进路线时，需要确定目标的形式或行进路径的数量.

例 5.5 （纲 1314）从进入决赛的 6 名选手中决出 1 名一等奖，2 名二等奖，3 名三等奖，则可能的决赛结果共有________种.（用数字作答）

解析：由于每一位选手都有可能获得一等奖、二等奖或三等奖，因此需要根据可能的获奖等级分三步进行研究.

第一步：因为 6 位选手都有可能获得一等奖，所以可能的结果有 $C_6^1=\dfrac{6!}{(6-1)!\times1!}=\dfrac{6!}{5!}=6$（种）；

第二步：因为剩余的 5 位选手都有获得 2 个二等奖的机会，所以有 $C_5^2=\dfrac{5!}{2!\times(5-2)!}=\dfrac{5!}{2!\times3!}=\dfrac{5\times4\times3!}{2!\times3!}=\dfrac{5\times4}{2}=10$（种）；

第三步：因为剩余的 3 位选手都是三等奖，所以有 $C_3^3=\dfrac{3!}{3!\times0!}=1$（种）.（注意：$0!=1$）

根据分步乘法计数原理可得，可能的决赛结果共有 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_3^3=6\times10\times1=60$（种）.

> **经验总结：**由于每一个可能的（等级）结果仅仅与（获奖名额）数字有关，而与结果（获奖）顺序无关，因此每一个（等级）可能的结果是典型的计算组合数问题.

例 5.6 （纲 1405/55）有 6 名男医生、5 名女医生，从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组，则不同的选法共有（　）.

A．60 种　　B．70 种　　C．75 种　　D．150 种

解析：∵从 6 名男医生中选出 2 名男医生共有 $C_6^2=\dfrac{6!}{2!\times(6-2)!}=\dfrac{6!}{2!\times4!}=\dfrac{6\times5\times4!}{2!\times4!}=15$（种）选法，从 5 名女医生中选出 1 名女医生共有 $C_5^1=\dfrac{5!}{1!\times(5-1)!}=\dfrac{5\times4!}{1\times4!}=5$（种）选法.

∴根据分步乘法计数原理可得，共有 $C_6^2 \cdot C_5^1 = 15 \times 5 = 75$（种）选法．故选 C，不选 ABD．

例 5.7（沪 1510）在报名的 3 名男教师和 6 名女教师中，选取 5 人参加义务献血，要求男、女教师都有，则不同的选取方式的种数为________（结果用数值表示）．

分析：∵要求选取的 5 人中男、女教师都有，∴选取的方式可以按男、女教师分为若干类．

解析 1：∵男教师只有 3 人，数量较少，∴以抽取男教师的人数为分类标准

第一类：抽取（3 人中）1 名男教师、（6 人中）4 名女教师．

根据分步计数原理可得共有 $C_3^1 \cdot C_6^4 = \dfrac{3!}{1! \times 2!} \times \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{3 \times 2!}{2!} \times \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = 45$（种）抽法．

第二类：抽取（3 人中）2 名男教师、（6 人中）3 名女教师．

根据分步计数原理可得共有 $C_3^2 \cdot C_6^3 = \dfrac{3!}{2! \times 1!} \times \dfrac{6!}{3! \times 3!} = \dfrac{3 \times 2!}{2!} \times \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = 60$（种）抽法．

第三类：抽取（3 人中）3 名男教师、（6 人中）2 名女教师．

根据分步计数原理可得共有 $C_3^3 \cdot C_6^2 = \dfrac{3!}{3! \times 0!} \times \dfrac{6!}{2! \times 4!} = 1 \times \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = 15$（种）抽法．

最后根据分类计数原理可得共有 $45 + 60 + 15 = 120$（种）抽法．

解析 2：女教师有 6 人，最多只能抽 5 人，确保至少有 1 名男教师，但最少也要抽 2 名女教师以抽取女教师的人数为标准进行分类．

第一类：抽取（6 人中）2 名女教师，（3 人中）3 名男教师．

根据分步计数原理可得共有 $C_6^2 \cdot C_3^3 = \dfrac{6!}{4! \times 2!} \times \dfrac{3!}{3! \times 0!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} \times 1 = 15$（种）抽法．

第二类：抽取（6 人中）3 名女教师，（3 人中）2 名男教师．

根据分步计数原理可得共有 $C_6^3 \cdot C_3^2 = \dfrac{6!}{3! \times 3!} \times \dfrac{3!}{2! \times 1!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} \times 3 = 60$（种）抽法．

第三类：抽取（6 人中）4 名女教师，（3 人中）1 名男教师．

根据分步计数原理可得共有 $C_6^4 \cdot C_3^1 = \dfrac{6!}{4! \times 2!} \times \dfrac{3!}{1! \times 2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} \times 3 = 45$（种）抽法．

最后根据分类计数原理可得共有 $15 + 60 + 45 = 120$（种）抽法．

解析 3：间接计算：用 9 名教师抽 5 名教师的抽法减去 6 名女教师中抽 5 名女教师的抽法

第一步：从 3 名男教师和 6 名女教师共 9 人中抽取 5 人的不同抽法：$C_9^5 = \dfrac{9!}{5! \times 4!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$（种）．

第二步：从 6 名女教师中抽到 5 名女教师共有 $C_6^5 = \dfrac{6!}{5!} = 6$（种）抽法．

第三步：从 9 名教师中抽取 5 名教师的抽法中减去从 6 名女教师中抽取 5 名女教师的抽法有 $126 - 6 = 120$（种）．

例 5.8（纲 1109）4 位同学每人从甲、乙、丙 3 门课程中选修 1 门，则恰有 2 人选修课程甲的不同选法共有（　）．

A．12 种　　B．24 种　　C．30 种　　D．36 种

解析：∵4 人从 3 门课程中选 1 门，∴这是一个“放回再取”的组合问题．

关键是要理解“恰有 2 人选修课程甲”的含义是：另外 2 人选修的课程不同且从乙、丙中选．

因此，问题转化为：如何把 2 个人“捆”在一起，将 4 个人“变”成“3”个人，让“捆”在一起的那“1”个人先拿走一门课程，剩下的 2 人分别从剩余的 2 门课程中选一门．

第一步：在 4 个人中任选 2 人“捆”在一起的“捆”法有 $C_4^2 = \dfrac{4!}{2! \times 2!} = 6$（种）；

第二步：剩下 2 人中的第一个人从 2 门课程中选一门的选法有 $C_2^1=\dfrac{2!}{1!\times 1!}=2$（种）；

第三步：最后 1 个人从 2 门课程中选一门的选法有 $C_2^1=\dfrac{2!}{1!\times 1!}=2$（种）.

根据分步计数原理可得，共有 $C_4^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1=6\times 2\times 2=24$（种）选法，故选 B，不选 ACD.

例 5.9（纲 1157）某同学有同样的画册 2 本，同样的集邮册 3 本，从中取出 4 本赠送给 4 位朋友，每位朋友 1 本，则不同的赠送方法共有（　）.

A．4 种　　B．10 种　　C．18 种　　D．20 种

解析：本题的关键是对“不同的赠送方法”的理解：由于画册 2 本少于 4 本，集邮册 3 本也少于 4 本，因此，不会出现 4 人都是画册或集邮册的情况．即“每位朋友 1 本”的结果必然是既有画册又有集邮册．以数量较少的画册为对象来分（经验：分类数量较少），可能出现的赠送结果只有两类：一类是 1 本画册、3 本集邮册，另一类是 2 本画册、2 本集邮册．所谓“不同的赠送方法”应该理解为给 4 人的“不同赠送结果”．因此，问题转化为“两类赠送结果”有多少种组合方式.

第一类：1 本画册送给 4 人中的 1 人，剩余的 3 人自然送集邮册，必然出现 4 种方式，即 $C_4^1=4$（种）.

第二类：2 本画册送给 4 人中的 2 人，剩余的 2 人自然送集邮册，共有不同的抽法是 $C_4^2=\dfrac{4!}{2!\times 2!}=\dfrac{4\times 3\times 2\times 1}{2\times 2}=6$（种）.

由分类计数法可得，共有 $C_4^1+C_4^2=4+6=10$（种）不同的赠送方式．故选 B，不选 ACD.

经验总结：对于类似“多”人选“多”物（课程、书等）的问题，关键在于根据对选“物”结果的要求进行分类，进而转化为在不同“类”下的选“人”问题，最后根据分类计数法进行求解．只是在每一“类”的计数过程中可能需要利用“分步计数”.

例 5.10（陕 1258）两人进行乒乓球比赛，先赢 3 局者获胜，决出胜负为止，则所有可能出现的情形（各人输赢局次的不同视为不同情形）共有（　）.

此题必须假设“非赢即输”，即无“平局”出现

A．10 种　　B．15 种　　C．20 种　　D．30 种

解析：假设 A、B 两人比赛，以 A 为研究对象，可能出现的结果有 A3B0、A4B1、A5B2；以 B 为研究对象，可能出现的结果有 B3A0、B4A1、B5A2．因此每个人都可能出现“打三局连胜”“打四局三胜”和“打五局三胜”的三类“决出胜负”的情形.

“打”字表示至少打

第一类：“三局连胜”只有 $C_3^3=1$（种）情形；第二类：“四局三胜”有 $C_4^3-C_3^3=4-1=3$（种）情形（减去“前三局连胜”的一种情形）；第三类：“五胜两负”有 $C_5^3-C_4^3=\dfrac{5!}{3!2!}-4=6$（种）情形．由分类计数法可得：从一个选手的角度可能出现 $1+3+6=10$（种）情形；再由分类计数法可得：从另一位选手的角度也可能出现 10（种）情形，因此共有 20（种）情形．故选 C，不选 ABD.

经验总结：由解析可得，比赛结果可能出现 $C_5^3=10$（种）情形．相当于只需要考虑五局三胜即可.

例 5.11（甲 1756）安排 3 名志愿者完成 4 项工作，每人至少完成 1 项，每项工作由 1 人完成，则不同的安排方式共有（　）.

A．12 种　　B．18 种　　C．24 种　　D．36 种

解析：由题意可知：由于 4 项工作由 3 个人完成，因此至少有 1 个人需要完成两项工作，而其余两个人每人只完成 1 项工作．即整个工作的安排可以分两步来进行.

第一步：看看 4 项工作能组成多少种 2 项工作供一个人去完成，相当于看看从 4 项工作中任取 2 项一共有多少种取法．由于所取的结果都是给同一个人去完成，因此与取到的顺序无关，故第一步是典型的组合数求解问题，即共有 $C_4^2=\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=\dfrac{4\times 3}{2!}=6$（种）取法.

第二步：将由 4 项任取 2 项组成的 1“大项”任务与另外 2 项任务分给 3 个人，相当于计算从 3 个不同的“数”中任取 3 个“数”有多少种取法，问题的关键是由于取出来的先后顺序相当于分配给 3 个人的顺序，因此，依次取出来的任务不同也就是分配给每个人的任务不同．所以，这一步应该是“3 中取 3”的排列数 $A_3^3=3\times2\times1=6$．

最后，由分步乘法计数原理可得，不同的任务安排方式共有 $C_4^2\times A_3^3=6\times6=36$（种）．故选 D，不选 ABC．

例 5.12 （乙 1865）从 2 位女生，4 位男生中选 3 人参加科技比赛，且至少有 1 位女生入选，则不同的选法共有________种．(用数字填写答案)

解析 1：(穷举法，归纳推理)

∵“至少有 1 位女生”包含“只有 1 位女生”和“共有 2 位女生”两种情况，

∴按照分类计数原理：所有不同的选法是这两种情况选法的总和．

第一种情况“只有 1 位女生”的选法可以分为两步：第一步是从题设的 2 位女生中任选一位，选法有 C_2^1 种；第二步是从题设的 4 位男生中选择 $3-1=2$（位），共有 C_4^2 种选法．根据分步计数原理，第一种情况共有 $C_2^1\cdot C_4^2=\dfrac{2!}{1!(2-1)!}\times\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=2\times\dfrac{4\times3\times2!}{2!\times2!}=12$（种）选法；

同理，第二种情况共有 $C_2^2\cdot C_4^1=1\times\dfrac{4!}{1!(4-1)!}=\dfrac{4\times3!}{3!}=4$（种）选法．

故总共有 $12+4=16$（种）选法．

解析 2：(求余法，逆向思维)

∵现有 2 女 4 男共 6 人，选择 3 人的不同选法有 $C_6^3=\dfrac{6!}{3!(6-3)!}=\dfrac{6\times5\times4\times3!}{3!\times3!}=\dfrac{6\times5\times4}{3!}=20$（种）．

而没有女生，只有男生的选法是从 4 个男生中选择 3 人，共有 $C_4^3=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}=\dfrac{4\times3!}{3!\times1}=4$（种）选法．

∴至少有 1 位女生入选的选法有 $20-4=16$（种）．

> **经验总结：**① 解排列组合问题常以元素（或位置）为主体，先满足特殊元素(或位置)，再考虑其他元素（或位置）；② 不同元素的分配问题，往往是先分组再分配．分组常有不均匀分组、均匀分组和部分均匀分组三种类型．

例 5.13 （甲 1655）如图 5.1 所示，小明从街道的 E 点处出发，先到 F 点处与小红会合，再一起到位于 G 点处的老年公寓参加志愿者活动，则小明到老年公寓可以选择的最短路径条数为（ ）．

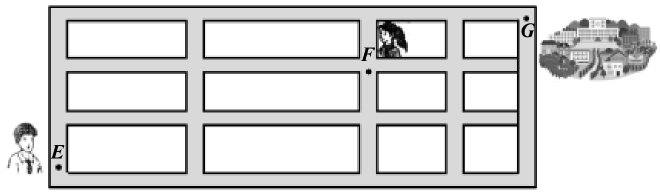


图 5.1

A．24　　B．18　　C．12　　D．9

解析：∵所问“最短路径”包含两层含义：一是最短，二是路径（不是路程）．

∴“路径”需要考虑方向，而最短需要考虑“路径”的“数量”．

整个过程分为两大步：第一大步为 $E\to F$；第二大步为 $F\to G$．

第一大步：$E\to F$（小明从 E 到 F 与小红会合）．

第 1 步：小明从 E 出发有“向上”和“向右”两种（与先后无关）选择，故有 C_2^1 种选择；

第 2 步：小明从 E 出发后有两类结果：一是到达第一个节点开始分叉；二是直接到达第二个节点．其

中，第一类结果又有C_2^1种选择，而第二类结果只有C_1^1种选择．因此，第 2 步有$C_2^1+C_1^1$种选择．

因此，第一大步可选择的路径有$C_2^1\left(C_2^1+C_1^1\right)=2\times3=6$（条）．

第二大步：$F\to G$（小明与小红一起从F到公寓G）．

他俩从F出发后共有 3 条最短路径可以到达公寓G．

第 1 条：他俩从F出发后“向上”，然后“右拐”直到公寓；

第 2 条：他俩从F出发“向右”到达“节点”，然后从这个“节点”出发继续直行再“左拐”到达公寓；

第 3 条：他俩从F出发“向右”到达“节点”，然后从这个“节点”出发先“向上”再“右拐”到公寓．

因此，根据分步计数原理可得：从E到G共有$6\times3=18$（条）路径．故选 B，不选 ACD．

问题 3 展开式指定项系数的计算

问题分析：$(a+b)^n$的第$m+1$项是$T_{m+1}=C_n^m a^{n-m}b^m$，第$m+1$项的二项式系数是组合数C_n^m，灵活运用这一结论即可计算出二项展开式中某指定项的系数．

条件 3.1 给定一个二项式的幂代数式

条件分析：遇到形如$\left(A^p+A^q\right)^n$的代数式，利用$(a+b)^n$的第$m+1$项是$T_{m+1}=C_n^m a^{n-m}b^m$，第$m+1$项的系数是组合数C_n^m可得：$\left(A^p+A^q\right)^n$的第$m+1$项是$T_{m+1}=C_n^m A^{p(n-m)}A^{qm}=C_n^m A^{pn+(q-p)m}$．

例 5.14（乙 1664）$\left(2x+\sqrt{x}\right)^5$的展开式中，$x^3$的系数是______．

解析：$\because\left(2x+\sqrt{x}\right)^5$展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}\left(\sqrt{x}\right)^r=C_5^r2^{5-r}x^{5-\frac{r}{2}}(r=0,1,\cdots,5)$，

$\therefore$当$r=4$时，$T_5=C_5^r2^{5-r}x^{5-\frac{r}{2}}=C_5^4\cdot2^1x^3=\dfrac{5!}{4!\cdot1!}\times2x^3=10x^3$，故$x^3$的系数为 10．

例 5.15（丙 1855）$\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$的展开式中$x^4$的系数为（　）．

A．10　　B．20　　C．40　　D．80

解析：$\because\left(x^2+\dfrac{2}{x}\right)^5$展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\left(x^2\right)^{5-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r=C_5^r2^rx^{10-3r}$，

$\therefore$令$10-3r=4$可解得：$r=2$，所以x^4的系数为$C_5^22^2=\dfrac{5!}{2!(5-2)!}\times4=\dfrac{5\times4\times3!\times4}{2\times3!}=40$．

故选 D，不选 ABC．

> **经验总结：**求解此类问题可以分两步进行：第一步根据所给出的条件（特定项）和通项公式，建立方程来确定指数；第二步是根据所求的指数再求所求解的项．

条件 3.2 给定一个二项式的幂与一个代数式的乘积

条件分析：遇到形如$\left(\cdots+Ax^2+Bx+D+Ex^{-1}+\cdots\right)(a+b)^n$的代数式，可以用多项式的每一项去乘$(a+b)^n$，然后利用$(a+b)^n$展开式的第$m+1$项的二项式系数是组合数$C_n^m$，可以确定指定项系数的求和代数式．

例 5.16（乙 1756）$\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$展开式中$x^2$的系数为（　）．

A．15　　B．20　　C．30　　D．35

解析：因为 $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6=1\times(1+x)^6+\frac{1}{x^2}(1+x)^6$，其中 $(1+x)^6$ 展开式中 x^2 项的系数为 $C_6^2=\frac{6!}{2!(6-2)!}=\frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!}=15$，$\frac{1}{x^2}(1+x)^6$ 展开式中 x^2 项的系数即为 $(1+x)^6$ 中 x^4 项的系数 $C_6^4=\frac{6!}{4!(6-4)!}=\frac{6\times5\times4!}{4!\times2\times1}=15$，所以整个展开式中 x^2 的系数为 $15+15=30$．故选 C，不选 ABD.

例 5.17　（乙 1463）$(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的系数为________.

解析：$\because (x+y)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}y^r\ (r=0,1,\cdots,8)$.

$\therefore$ 当 $r=6$ 时，$T_7=C_8^6x^{8-6}y^6=28x^2y^6$；当 $r=7$ 时，$T_8=C_8^7x^{8-7}y^7=8x^1y^7$；

因此 $(x-y)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^7 的项为 $xT_8-yT_7=8x^2y^7-28x^2y^7=-20x^2y^7$，故 x^2y^7 的系数为 -20.

例 5.18　（丙 1754）$(x+y)(2x-y)^5$ 的展开式中 x^3y^3 的系数为（　）.

A．-80　　　B．-40　　　C．40　　　D．80

解析：$(x+y)(2x-y)^5=x(2x-y)^5+y(2x-y)^5$.

由 $(2x-y)^5$ 展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(-y)^r$ 可得：

当 $r=3$ 时，$x(2x-y)^5$ 展开式中 x^3y^3 的系数为 $C_5^3\times2^2\times(-1)^3=-40$；

当 $r=2$ 时，$y(2x-y)^5$ 展开式中 x^3y^3 的系数为 $C_5^2\times2^3\times(-1)^2=80$.

则 x^3y^3 的系数为 $80-40=40$．故选 C，不选 ABD.

经验总结：求两个多项式的积的特定项，可先化简或利用分类加法计数原理讨论求解.

条件 3.3　给定一个三项式的幂

条件分析：遇到形如 $(Ax^2+Bx+Cy)^n$ 的代数式，可以先将 (Ax^2+Bx) 看成是一个整体“项”，然后用二项式定理进行求解.

例 5.19　（乙 1560）$(x^2+x+y)^5$ 的展开式中，x^5y^2 的系数为（　）.

A．10　　　B．20　　　C．30　　　D．60

解析 1：（整体思想）$\because (a+b)^n$ 的第 $m+1$ 项是 $T_{m+1}=C_n^m a^{n-m}b^m$，$\therefore$ 在 $(x^2+x+y)^5$ 中先将 (x^2+x) 看成是一个“整体”，则有 $(x^2+x+y)^5$ 展开式中的第 $m+1$ 项是 $T_{m+1}=C_5^m(x^2+x)^{5-m}y^m$.

因此，当 $m=2$ 时，y^2 的“系数”是 $C_5^2(x^2+x)^3$.

又 $\because (x^2+x)^3$ 的第 $k+1$ 项是 $T_{k+1}=C_3^k x^{2(3-k)}x^k=C_3^k x^{6-k}$.

因此，当 $k=1$ 时，x^5y^2 的系数为 $C_5^2\cdot C_3^1=\frac{5!}{2!(5-2)!}\times\frac{3!}{1!(3-1)!}=\frac{5!}{2!2!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times2}=30$.

解析 2：（计数原理）$\because (x^2+x+y)^5=(x^2+x+y)(x^2+x+y)(x^2+x+y)(x^2+x+y)(x^2+x+y)$，

且 $x^5y^2=(x^2)^2\cdot x\cdot y^2$，　将目标分解成三个基本项的乘积，为后续“取数”奠定基础

$\therefore$ x^5y^2 的系数相当于在 2 个 (x^2+x+y) 中取 x^2，在 1 个 (x^2+x+y) 中取 x，在 2 个 (x^2+x+y) 中取 y 的方法数，即 x^5y^2 的系数为 $C_5^2C_3^1C_2^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}\times\frac{3!}{1!(3-1)!}\times\frac{2!}{2!(2-2)!}=30$，故选 C，不选 ABD.

问题 4 二项展开式中项数的求解

问题分析：由于$(a+b)^n$的第$m+1$项是$T_{m+1}=C_n^m a^{n-m}b^m$，第$m+1$项的二项式系数是组合数C_n^m，因此，项数问题必然与组合数有关.

条件 4.1 给定二项式偶次幂系数最大值与加 1 次幂系数最大值的关系

条件分析：先确定二项式展开式中系数最大值的项数，再利用两个最大值之间的关系列方程求解.

例 5.20 （乙 1359）设m为正整数，$(x+y)^{2m}$展开式的二项式系数的最大值为a，$(x+y)^{2m+1}$展开式的二项式系数的最大值为b，若$13a=7b$，则$m=$（ ）.

A．5 B．6 C．7 D．8

解析：$\because (a+b)^n=\sum\limits_{r=0}^{r=n}C_n^r a^{n-r}b^r$，$\therefore (x+y)^{2m}$展开式的系数为$C_{2m}^r=\dfrac{(2m)!}{r!(2m-r)!}$.

当$r=m$时，$(x+y)^{2m}$展开式的系数最大， 偶数幂的中间两项系数最大

即由题设可得：$a=C_{2m}^m$，可以证明：$C_{2m}^{m-1}=C_{2m}^{m+1}=\dfrac{m}{m+1}C_{2m}^m<C_{2m}^m$.

同理可得：$b=C_{2m+1}^{m+1}$. 奇数幂的中间项系数最大

又$\because$题设$13a=7b$，$\therefore 13C_{2m}^m=7C_{2m+1}^{m+1}$， 方程思想

即$13\times\dfrac{(2m)!}{m!m!}=7\times\dfrac{(2m+1)!}{(m+1)!m!}$，解得$m=6$，故选 B，不选 ACD.

问题 5 二项展开式中参数的求解

问题分析：由于$(a+b)^n$的第$m+1$项是$T_{m+1}=C_n^m a^{n-m}b^m$，第$m+1$项的二项式系数是组合数C_n^m，因此，参数问题必然与组合数有关.

条件 5.1 给定一个二项展开式中某项的系数

条件分析：利用通项与题设的项数和系数列方程求解.

例 5.21 （甲 1463）$(x+a)^{10}$的展开式中，x^7的系数为 15，则$a=$______.（用数字填写答案）

解析：$\because$二项展开式第$n+1$项的通项为$T_{n+1}=C_{10}^{10-n}x^n a^{10-n}$，$\therefore$当$n=7$时，$C_{10}^3a^3=15$，解得：$a=\dfrac{1}{2}$.

条件 5.2 给定一个多项式与二项展开式中某项的系数

条件分析：利用多项式、通项及题设的项数和系数列方程求解.

例 5.22 （甲 1355）已知$(1+ax)(1+x)^5$的展开式中x^2的系数为 5，则$a=$（ ）.

A．–4 B．–3 C．–2 D．–1

解析：$\because (1+x)^5$中x^1项的系数为C_5^4，$(1+x)^5$中x^2项的系数为C_5^3，

$\therefore aC_5^4+C_5^3=5$. 即$ax$与$(1+x)^5$中$x^1$项的系数相乘得到$x^2$项，再加上$(1+x)^5$中$x^2$项的系数$C_5^3$

解得：$a=-1$．故选 D，不选 ABC.

例 5.23 （甲 1565）$(a+x)(1+x)^4$的展开式中x的奇数次幂项的系数之和为 32，则$a=$__________.

解析：$\because (1+x)^4=(x^2+2x+1)^2=x^4+4x^2+1+4x^3+2x^2+4x=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$，

$\therefore (a+x)(1+x)^4$ 的奇数次幂项为 $4ax^3$，$4ax$，x^5，$6x^3$，x，$\therefore 4a+4a+1+6+1=32$.

即 $8a=24$，解得：$a=3$.

条件 5.3　给定未知项数的二项展开式的各项系数

条件分析：先利用二项式定理取特殊值列方程求出项数，然后再利用通项进行求解.

例 5.24　（AQ1863）如果 $\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为 128，则展开式中 $\dfrac{1}{x^4}$ 的系数是________.

解析：设 $\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^n=\left[\left(3\sqrt{x}\right)+\left(-\dfrac{1}{x}\right)\right]^n$，则二项展开式有 $0\to n$ 共 $n+1$ 项，其中的第 $m+1$ 项 $(m=0,1,\cdots,n)$ 为：$T_{m+1}=\mathrm{C}_n^m\left(-x^{-1}\right)^{n-m}\left(3\sqrt{x}\right)^m=(-1)^{n-m}3^m\dfrac{n!}{m!(n-m)!}x^{\frac{3m}{2}-n}$.　其中 $a=-x^{-1}$，$b=3\sqrt{x}$

由二项式定理可得：$\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^n=\sum\limits_{m=0}^{n}T_{m+1}$，即 $\sum\limits_{m=0}^{n}\left[(-1)^{m-n}3^n\dfrac{n!}{m!(n-m)!}x^{\frac{3n}{2}-m}\right]=\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^n$.

$\because$ 题设各项系数之和为128，　从条件确定目标：计算各项系数之和

$\therefore$ 由上式可得：当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{m=0}^{n}\left[(-1)^{m-n}3^n\dfrac{n!}{m!(n-m)!}\right]=2^n$，　函数思想：将二项式看成 x 的函数

即 $2^n=128$（利用条件列方程），解得：$n=7$.　解指数方程

$\because$ 目标是求 $\dfrac{1}{x^4}$ 的系数，$\therefore$ 令 $\dfrac{3m}{2}-n=-4$ 得：$m=\dfrac{2(n-4)}{3}=\dfrac{2\times(7-4)}{3}=2$.

$\because T_{m+1}=(-1)^{n-m}3^m\dfrac{n!}{m!(n-m)!}x^{\frac{3m}{2}-n}$，$\therefore$ 将 $n=7$，$m=2$ 代入上式可得 $\dfrac{1}{x^4}$ 的系数为：

$(-1)^{n-m}3^m\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=(-1)^5\times 3^2\times\dfrac{7!}{2!5!}=-9\times\dfrac{7\times6\times5!}{2\times1\times5!}=-9\times21=-189$.

经验总结：令 $x=0$ 可得常数项；令 $x=-1$ 可得奇数次项系数和与偶数次项系数和之差.

第 6 题　概率背景

06

背景知识

事件与基本事件空间：在一定的条件下必将发生的事件叫做（该条件下的，下同）必然事件；在一定条件下不可能发生的事件叫做不可能事件；必然事件和不可能事件统称为确定事件；在一定条件下有可能发生，也可能不发生的事件叫做随机事件．在试验中能够描述其他事件且不能再分的最简单的随机事件称为基本事件，其他事件都可以用基本事件来描述（描绘或表示）；所有基本事件构成的集合称为基本事件空间（Ω）.

随机事件的频率：在相同的条件下重复 n 次试验，观察到某一事件 A 出现了 m（$m\leqslant n$）次，我们把 m 称为事件 A 出现的频数，称事件 A 出现（次数）的比例 $\dfrac{m}{n}$ 为事件 A 出现的频率．

随机事件的概率：虽然随机事件 A 在每次试验中是否发生是不能预知的，但是在大量的重复试验中，随机事件 A 发生的频率会逐渐稳定在 $[0,1]$ 中的某个常数上，这个常数可以用来度量事件 A 发生的可能性大小，称为事件 A（发生）的概率，记作 $P(A)$，显然 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$．

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生（也可能都不发生），则称事件 A 与事件 B 为互斥事件（即 $A\cap B=\varnothing$），且 $P(A+B)=P(A)+P(B)$．

若 A 表示事件 A 发生，$\overline{A}$ 表示事件 A 不发生，则 $A\cap\overline{A}=\varnothing$，即 A 与 $\overline{A}$ 肯定是互斥事件．因为事件 A 与 $\overline{A}$ 中必有一个发生，所以称 A 与 $\overline{A}$ 是对立事件，即必有一个发生的两个互斥事件称为对立事件，且 $P\left(A+\overline{A}\right)=P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1$．（即事件 A 发生与不发生的总概率为 1）

古典概型：如果在一次试验中，所有可能出现的基本事件（结果）只有有限个，并且每一个基本事件（结果）出现的可能性是相等的，那么我们把具有这两个特点的概率模型称为古典概率模型（简称古典概型）.

在基本事件总数为 n 的古典概型中，如果随机事件 A 包含的基本事件数为 m，那么随机事件 A 发生的概率 $P(A)=\dfrac{m}{n}$．

几何概型：如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，那么称这样的概率模型为几何概率模型（简称几何概型）．几何概型的概率公式为：$P(A)=\dfrac{\text{构成事件}A\text{的区域长度（面积或体积）}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度（面积或体积）}}$．

相互独立事件：如果两个事件发生的概率彼此毫无影响，那么这两个事件称为相互独立事件．相互独立的两个事件同时发生的概率等于每个独立事件发生的概率的乘积．

对于两个事件 A 和 B，且 $P(A)>0$，在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率叫做条件概率：$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$．

问题 1　古典概型的概率计算

问题分析：由古典概型的概率计算公式可知：古典概型概率的计算关键在于确定基本事件总数和所求事件中包含的基本事件的数量．古典概型中基本事件的探求方法如下：

（1）列举法．

（2）树状图法：适用于较为复杂的问题中基本事件的探求，对于基本事件有“有序”与“无序”区别的问题通常采用树状图法．

（3）列表法：适用于多元素基本事件的求解问题，通过列表把复杂的问题简单化，抽象的问题具体化．

条件 1.1　给定“放回去再取”的排列方式

条件分析：从有限的元素中随机抽取后，再放回去继续随机抽取．这种“放回去再取”的问题实际上是有限元素的逐个“有序”排列问题，解决这类问题的基本方法是列表法．

例 6.1　（甲 1711）从分别写有 1，2，3，4，5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为（　）．

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{2}{5}$

解析：如表 6.1 所示，表中的横（行）坐标表示第一次取到的数，纵（列）坐标表示第二次取到的数．

表 6.1

	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

由表可见：“有放回地连续抽取两张卡片”总共（即最多）有 25 种不同的抽取结果，即“有放回地连续抽取两张卡片”的事件总数为 25．

而“第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数”的事件总数为 10，即满足“（第一次）横坐标大于（第二次）纵坐标”（在上述表格的左下方）共有 10 种情形，因此，所求“第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数”事件的概率为 $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$．故选 D，不选 ABC．

> **经验总结**：对于类似有限元素的排列及其概率问题，可以采用列表法列出所有可能的结果，再分别“数”出满足条件的结果数和所有可能的结果数，最后用两者比值作为满足条件的事件发生的概率．

条件 1.2　给定“不放回再取”的排列方式

条件分析：从有限的元素中随机抽取后，不再放回继续随机抽取．这种“不放回再取”的问题实际上是有限元素的“无序”排列问题，即组合问题，解决这类问题既可以采用列举法，也可以采用组合数法．

例 6.2　（乙 1603）为美化环境，从红、黄、白、紫 4 种颜色的花中任选 2 种花种在一个花坛中，余下的 2 种花种在另一个花坛中，则红色和紫色的不种在同一花坛中的概率是（　）．

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{6}$

解析：∵从 4 种花中任取 2 种共有红黄、红白、红紫、黄白、黄紫和白紫共 6 种取法，而“红色和紫

色的不种在同一花坛中”相当于共有红黄、红白、黄紫、白紫 4 种结果.

将条件进行转化：相当于先取红花再取黄花或白花，或者先取紫花再取白花或黄花.

∴所求概率为：$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$．故选 C，不选 ABD.

例 6.3 （乙 1504）如果 3 个整数可作为一个直角三角形三条边的边长，则称这 3 个数为一组勾股数，从 1，2，3，4，5 中任取 3 个不同的数，则 3 个数构成一组勾股数的概率为（　）.

A．$\frac{3}{10}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{1}{10}$　　D．$\frac{1}{20}$

解析 1：∵从 1，2，3，4，5 中任取 3 个不同的数所有可能的取法为：(1,2,3)、(1,2,4)、(1,2,5)、(1,3,4)、(1,3,5)、(1,4,5)、(2,3,4)、(2,3,5)、(2,4,5)和(3,4,5)共 10 种；而能成为一组勾股数的只有(3,4,5)一组，因此，所求概率为$\frac{1}{10}$．故选 C，不选 ABD.

解析 2：∵从 1，2，3，4，5 中任取 3 个不同的数共有 C_5^3 种取法，而 1，2，3，4，5 中只有 3，4，5 这一组勾股数，构成一组勾股数的取法有 C_3^3 种，∴所求概率 $P=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{\frac{3!}{3!0!}}{\frac{5!}{3!2!}}=\frac{1}{\frac{5\times4}{2\times1}}=\frac{1}{10}$，故选 C，不选 ABD.

例 6.4 （乙 1413）将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行，则 2 本数学书相邻的概率为________.

解析 1：设数学书为 A，B，语文书为 C，则三本书共有(A,B,C)，(A,C,B)，(B,C,A)，(B,A,C)，(C,A,B)，(C,B,A)6 种排列方法，其中 2 本数学书（A 和 B）相邻的情况有 4 种，故所求概率为 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

解析 2：∵3 本书所有可能的排列方法（数）为 $A_3^3=\frac{3!}{(3-3)!}=6=2+2+2$；将 2 本数学书排在一起有 2 种排法，而 2 本数学书（看成 1 本书）与 1 本语文书又有 2 种排法，所以 2 本数学书排在一起总共有 $2\times2=4$（种）方法．∴所求概率为 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

经验总结：解析 2 中，由于 A，B，C 三个字母需要全部被抽中，即全排列，因此任取三个的结果事实上与抽取的顺序有关.

例 6.5 （乙 1455）4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动，则周六、周日都有同学参加公益活动的概率为（　）.

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{7}{8}$

解析 1：**（直接法）** 直接计算每天都有人参加活动的情形数量.

∵每位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动共有 $C_2^1=2$（种）情形，

∴4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动共有 $C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=2^4=16$（种）情形.

又∵周六、周日都有同学参加公益活动可能有两种情形：

①每天 2 人共有 $C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6$（种）情形；②一天 1 人，另一天 3 人，共有 $C_4^1C_3^3+C_3^3C_4^1=C_4^1A_2^1=\frac{4!}{1!3!}\times\frac{2!}{1!}=8$（种）情形．∴周六、周日都有同学参加公益活动的概率为 $\frac{8+6}{16}=\frac{7}{8}$.

解析 2：**（间接法）**：先计算某天每人活动的情形数量，再间接计算每天有人活动的情形数量.

∵每位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动共有 $C_2^1=2$（种）情形，

∴4 位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动共有 $C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=2^4=16$（种）情形；

又∵4 位同学都在周六或周日（形成周日或周六没有人）参加公益活动，只有 4 人同在周六或周日 2

种情形，∴周六、周日两天内每天都有人参加公益活动的共有$16-2=14$（种）情形，

因此，周六、周日都有同学参加公益活动的概率为$\frac{16-2}{16}=\frac{7}{8}$．故选 D，不选 ABC．

经验总结：先计算事件总数，再直接计算目标事件数量或计算目标“否”事件的数量来间接计算目标事件数量，最后求目标事件数量与事件总数的比值作为目标事件的概率.

例 6.6 （乙 1303）从 1，2，3，4 中任取 2 个不同的数，则取出的 2 个数之差的绝对值为 2 的概率是（ ）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

解析 1：（**直接法**）将取出的“数”作为基本事件.

∵从 1，2，3，4 中任取 2 个不相同的数，有(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，(3,4)，(4,1)，(4,2)，(4,3)共 12 种；而满足“2 个数之差的绝对值为 2”的只有(1,3)、(2,4)、(3,1)、(4,2)四种情形.

∴取出的 2 个数之差的绝对值为 2 的概率为$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$．故选 B，不选 ACD.

解析 2：（**间接法**）将取出的“两数之差”作为基本事件.

∵从 1，2，3，4 中任取 2 个不相同数之差的绝对值有 1，2，3 三种情形，

∴取出的 2 个数之差的绝对值为 2 的概率是$\frac{1}{3}$．故选 B，不选 ACD.

经验总结：以不同的对象作为研究的对象考查不同对象的基本事件结果可能会有不同的解题思路.

例 6.7（甲 1413）甲、乙两名运动员各自等可能地从红、白、蓝 3 种颜色的运动服中选择 1 种，则他们选择相同颜色运动服的概率为________．

解析 1：（**直接法：分类计数原理**）先求出基本事件个数，再利用古典概型概率公式求解.

∵甲、乙两名运动员选择服装的颜色有(红，红)，(红，白)，(红，蓝)，(白，白)，(白，红)，(白，蓝)，(蓝，蓝)，(蓝，红)，(蓝，白)共 9 种，而颜色相同的有(红，红)，(白，白)，(蓝，蓝)3 种.

∴他们选择相同颜色运动服的概率为$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

解析 2：（**间接法：概率的计算**）∵甲、乙均选红色的概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$，同理，均选白色或蓝色的概率也分别是$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$．∴他们选择相同颜色的概率为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

例 6.8 （甲 1455）某地区空气质量监测资料表明，一天的空气质量为优良的概率是 0.75，连续两天为优良的概率是 0.6，已知某天的空气质量为优良，则随后一天的空气质量为优良的概率是（ ）.

A. 0.8　　B. 0.75　　C. 0.6　　D. 0.45

解析：设某天空气质量优良，随后一天空气质量也优良的概率为P，则由题意可得：$0.75\cdot P=0.6$，解得：$P=0.8$．故选 A，不选 BCD.

例 6.9（甲 1364）从 n 个整数 1，2，3，…，n 中任意取两个不同的数，若取出的两个数之和等于 5 的概率为$\frac{1}{14}$，则 n=（ ）.

解析：（**直接法**）∵从 n 个数中任取 2 个数的方法有C_n^2种，而取出的两数之和为 5 的只有(1,4)和(2,3)两种，∴$\frac{2}{C_n^2}=\frac{1}{14}$，又∵$C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$，∴$n^2-n-56=0$，解得：$n=8$或$n=-7$（舍去）.

例 6.10 （甲 1313）从 1，2，3，4，5 中任意取出两个不同的数，其和为 5 的概率是________.

解析：从 5 个正整数中任意取出两个不同的数，共有$C_5^2=\dfrac{5!}{2!(5-2)!}=\dfrac{5\times4\times3!}{3!2\times1}=10$（种）取法，若取出的两数之和等于 5，则只有$(1,4)$和$(2,3)$两种取法，所以取出的两数之和等于 5 的概率为$\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

例 6.11 （丙 1605）小敏打开计算机时，忘记了开机密码的前两位，只记得第一位是 M，I，N 中的一个字母，第二位是 1，2，3，4，5 中的一个数字，则小敏输入一次密码能够成功开机的概率是（ ）.

A. $\dfrac{8}{15}$　　B. $\dfrac{1}{8}$　　C. $\dfrac{1}{15}$　　D. $\dfrac{1}{30}$

解析 1：∵开机密码的第一位是三个字母中的一个，第二位是 5 个数字中的一个，

∴所有可能的前两位密码是：M1, M2, M3, M4, M5，I1, I2, I3, I4, I5，N1, N2, N3, N4, N5 共 15 种，因此，输入一次能成功开机的概率是$\dfrac{1}{15}$.

解析 2：∵第一步是从三个字母中选一个，选中的概率为$\dfrac{1}{3}$；第二步是从 5 个数字中选中一个，选中的概率是$\dfrac{1}{5}$，∴两步全选中的概率是$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{15}$. 故选 C，不选 ABD.

例 6.12 （甲 1858）我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果．哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”，如$30=7+23$．在不超过 30 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 30 的概率是（ ）.

A. $\dfrac{1}{12}$　　B. $\dfrac{1}{14}$　　C. $\dfrac{1}{15}$　　D. $\dfrac{1}{18}$

解析：按照$30=7+23$的事例抽象出素数的概念：所谓素数是除了能表示为它自己（不包括 1）和 1 的乘积以外，不能表示为其他任何两个整数的乘积．也可以理解为：素数是除了被它自己和 1 整除以外，不能被任何数整除的大于 1 的自然数．

从题设一个特例抽象出“素数”的数学概念

列出不超过 30 的素数如下：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29 共 10 个素数.

素数概念运用，注意不要随意添加了 1，也不能遗漏了 2

按题意随机选取两个不同的素数，即从 10 个素数中不放回地抽取 2 个素数，因此共有$C_{10}^2=\dfrac{10!}{2!(10-2)!}=\dfrac{10\times9\times8!}{2\times8!}=45$（种）取法.

现在的问题是抽到两数之和为 30 的有：7+23=30，11+19=30，13+17=30 共有 3 种情形.

在 10 个素数中，从小到大逐个配对求和找出和为 30 的所有素数对

因此，所求概率为$\dfrac{3}{45}=\dfrac{1}{15}$.

故选 C，不选 ABD.

例 6.13 （甲 1805）从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人参加社区服务，则选中的 2 人都是女同学的概率为（ ）.

A. 0.6　　B. 0.5　　C. 0.4　　D. 0.3

解析 1：设 2 名男同学为甲、乙，3 名女同学为 a、b、c，则所有可能的选派结果可分类排列如下：

2 名男同学：甲、乙仅 1 种；

甲与女同学：甲 a、甲 b、甲 c 共 3 种；

乙与女同学：乙 a、乙 b、乙 c 共 3 种；

2 名女同学：ab、ac、bc 共 3 种.

由此可见：5 人中选派 2 人共有$1+3+3+3=10$（种）选派方式（或结果），其中 2 人全都为女同学的选派结果共有 3 种．因此，选中 2 人都是女同学的概率为$\dfrac{3}{10}=0.3$．故选 D，不选 ABC.

解析 2：∵从 2 名男同学和 3 名女同学共 5 名同学中任选 2 人的选法共有 $C_5^2=\dfrac{5!}{2!(5-2)!}=\dfrac{5\times 4}{2}=10$（种），而选中 2 人都是女同学的选法共有 $C_3^2=\dfrac{3!}{2!(3-2)!}=\dfrac{3\times 2!}{2!}=3$（种），

∴选中 2 人都是女同学的概率为 $\dfrac{3}{10}=0.3$．故选 D，不选 ABC.

例 6.14（丙 1858）某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为 p，各成员的支付方式相互独立，设 X 为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数，$DX=2.4$，$P(X=4)<P(X=6)$，则 $p=$（　）.

A．0.7　　B．0.6　　C．0.4　　D．0.3

解析：∵题设各成员的支付方式相互独立，∴每位成员是否使用移动支付服从二项分布.

又∵每位成员使用移动支付的概率都为 p，∴ $DX=np(1-p)$.

由题设 $DX=2.4$ 可得：$10p(1-p)=2.4$，解得：$p=0.4$ 或 $p=0.6$.

又∵题设 $P(X=4)<P(X=6)$，$C_{10}^4p^4(1-p)^6<C_{10}^6p^6(1-p)^4$，即 $\dfrac{10!}{4!6!}(1-p)^2<\dfrac{10!}{6!4!}p^2$，亦即 $\left(\dfrac{1}{p}-1\right)^2<1$，解得：$-1<\dfrac{1}{p}-1<1$.

由 $-1<\dfrac{1}{p}-1$ 解得：$p>0$；由 $\dfrac{1}{p}-1<1$ 解得：$p>\dfrac{1}{2}=0.5$.

因此，取 $p=0.6>0.5$．故选 B，不选 ACD.

例 6.15（丙 1805）若某群体中的成员只用现金支付的概率为 0.45，既用现金支付也用非现金支付的概率为 0.15，则不用现金支付的概率为（　）.

A．0.3　　B．0.4　　C．0.6　　D．0.7

解析：设事件 A 为只用现金支付，事件 B 为只用非现金（不用现金）支付，事件 AB 表示既用现金支付也用非现金支付，则由题意可知：$P(A)=0.45$，$P(AB)=0.15$.

又∵ $P(A)+P(B)+P(AB)=1$，　群体中每个人的付款方式只能是 A、B、AB 三种方式中的任意一种

∴ $P(B)=1-P(A)-P(AB)=1-0.45-0.15=0.4$．故选 B，不选 ACD.

问题 2　几何概型的概率计算

问题分析：区分古典概型与几何概型的基本方法是看基本事件是否具有连续性：只有不连续的事件才是古典概型，而连续事件一般为几何概型.

对于一个具体问题能否用几何概型的概率公式计算事件的概率，关键在于能否将事件发生的结果几何化，可以根据实际问题的具体情况，选取合适的参数建立适当的坐标系，在此基础上，将实验的每一个结果一一对应于该坐标系中的一点，使得全体结果构成一个可度量的“连续”区域；另外，从几何概型的定义可知，在几何概型中，“等可能”一词应理解为对应于每一个实验结果（点）落入某区域内的可能性的大小，仅与该区域的度量成正比，而与该区域的位置和形状无关.

对于几何概型的计算，首先需要判定事件类型是否为几何概型；其次是确定事件的几何区域（长度、面积、体积或时间）；最后是计算基本事件区域的几何度量和目标事件 A 区域的几何度量，从而得到 $P(A)$.

条件 2.1　给定基本事件的“时长”区域

条件分析：对于给定基本事件的“时长”区域，几何概型概率计算的关键是确定基本事件的“总时长”和所求事件包含的基本事件的“时长”.

例 6.16（乙 1654）某公司的班车在 7:30，8:00，8:30 发车，小明在 7:50 至 8:30 之间到达发车站

乘坐班车，且到达的时刻是随机的．则他等车时间不超过 10 分钟的概率是（　）．

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{4}$

解析：∵小明在 7:50 至 8:30 这 40 分钟之间到达发车站只能乘坐 8:00 或 8:30 的班车，而他等车时间不超过 10 分钟的到站时间应该在 7:50 到 8:00 之间或 8:20 到 8:30 之间，

∴等车时间不超过 10 分钟的概率为$\dfrac{10+10}{40}=\dfrac{1}{2}$．故选 B，不选 ACD.

例 6.17（甲 1608）某路口人行横道的信号灯为红灯和绿灯交替出现，红灯持续时间为 40 秒．若一名行人来到该路口遇到红灯，则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为（　）．

A．$\dfrac{7}{10}$　　B．$\dfrac{5}{8}$　　C．$\dfrac{3}{8}$　　D．$\dfrac{3}{10}$

解析：将“至少需要等待 15 秒”转换为“等待时间不少于 15 秒即等于或超过 15 秒”.

又∵红灯持续时间为 40 秒，∴在绿灯亮前到达的人都需要等待，即在从红灯亮开始到 40−15=25（秒）时间内到达的人都需要等待 15 秒及 15 秒以上，因此，所求概率为$\dfrac{25}{40}=\dfrac{5}{8}$．故选 B，不选 ACD.

条件 2.2　给定基本事件的“面积”区域

条件分析：对于给定基本事件的“面积”区域，几何概型概率计算的关键是确定基本事件的“总面积”和所求事件包含的基本事件的“面积”.

例 6.18（乙 1704/52）如图 6.1 所示，正方形 $ABCD$ 内的图形来自中国古代的太极图．正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称．在正方形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是（　）．

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{8}$

C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\pi}{4}$

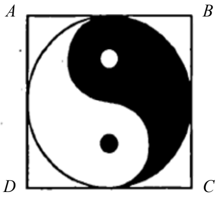


图 6.1

解析 1：（公式法）设正方形边长为a，则圆的半径为$\dfrac{a}{2}$，正方形的面积为a^2，圆的面积为$\dfrac{\pi a^2}{4}$．由图形的对称性可知，太极图中黑、白部分面积相等，即各占圆面积的一半．由几何概型概率的计算公式得，此点取自黑色部分的概率是$\dfrac{\frac{1}{2}\times\pi\times(\frac{a}{2})^2}{a^2}=\dfrac{\pi}{8}$，故选 B．不选 ACD.

解析 2：（排除法，特殊值法）由题意可知，此点取自黑色部分的概率即为黑色部分面积占整体面积的比例，由图可知其概率 P 满足$\dfrac{1}{4}<P<\dfrac{1}{2}$，故选 B．不选 ACD.

例 6.19（甲 1660）从区间$[0,1]$随机抽取 $2n$ 个数 x_1，$x_2,\cdots$，x_n，y_1，$y_2,\cdots$，y_n，构成 n 个数对(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，其中两数的平方和小于 1 的数对共有 m 个，则用随机模拟的方法得到的圆周率π的近似值为（　）．

A．$\dfrac{4n}{m}$　　B．$\dfrac{2n}{m}$

C．$\dfrac{4m}{n}$　　D．$\dfrac{2m}{n}$

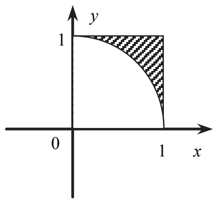


图 6.2

解析：将“两数的平方和小于 1”理解为该数对“落在”半径为 1 的圆内，如图 6.2 所示.

∵是从区间$[0,1]$随机抽取的 n 个数对，而“落在”$\dfrac{1}{4}\pi r^2$上的数对有 m 个，

$\therefore \dfrac{\frac{1}{4}\pi r^2}{r^2}=\dfrac{m}{n}$，解得：$\pi=\dfrac{4m}{n}$，故选 C，不选 ABD.

例 6.20 （乙 1860）如图 6.3 所示是来自古希腊数学家希波克拉底研究的几何图形，此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为 Rt△ABC 的斜边 BC，直角边 AB，AC，△ABC 的三边所围成的区域记为Ⅰ，黑色部分记为Ⅱ，其余部分记为Ⅲ，在整个图形中随机取一点，此点取自Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的概率分别记为 p_1，p_2，p_3，则（　）.

A．$p_1=p_2$　　B．$p_1=p_3$

C．$p_2=p_3$　　D．$p_1=p_2+p_3$

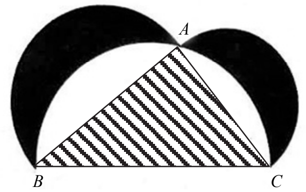


图 6.3

解析：设 Rt△ABC 各角所对的边分别为 a，b，c，即 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$．则由勾股定理可得：$a^2=b^2+c^2$.

$\because$ Rt△ABC 的面积 $S_1=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{1}{2}bc$；

两个白色部分的面积为 $S_3=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-S_1=\dfrac{\pi a^2}{8}-\dfrac{1}{2}bc$；

黑色部分的面积为 $S_2=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{c}{2}\right)^2-S_3=\dfrac{\pi\left(b^2+c^2\right)}{8}-\dfrac{\pi a^2}{8}+\dfrac{1}{2}bc=\dfrac{1}{2}bc$.

$\therefore S_2=S_1$，从而 $p_2=p_1$.　　不管“总”面积有多大

故选 A，不选 BCD.

问题 3　重复（多次）试验通过（命中）率的计算

问题分析：所谓重复试验是指各种发生概率均相同的可以重复的某种事件，重复试验的概率为逐次概率的乘积.

条件 3.1　给定单次试验（事件）概率和通过的要求

条件分析：多次重复试验（事件）的概率为单次试验概率的乘积，某种事件的概率为各种可能事件的概率之和.

例 6.21 （乙 1554）投篮测试中，每人投 3 次，至少投中 2 次才能通过测试．已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学通过测试的概率为（　）.

A．0.648　　B．0.432　　C．0.36　　D．0.312

解析 1：（**转化法**）由于“通过测试”是“投 3 次至少投中 2 次”，而“投 3 次至少投中 2 次”有以下 4 类情形：

（1）第一次“不中”，后两次“中”的概率为 $0.4\times0.6\times0.6$；　独立事件的概率计算公式

（2）第一次“中”，第二次“不中”，第三次“中”的概率为 $0.6\times0.4\times0.6$；

（3）第一次“中”，第二次“中”，第三次“不中”的概率为 $0.6\times0.6\times0.4$；

（4）第一次“中”，第二次“中”，第三次“中”的概率为 $0.6\times0.6\times0.6$；

因此，根据分类计数加法原理可得，至少投中 2 次的概率为 $3\times0.6^2\times0.4+1\times0.6^3=0.648$．故选 A，不选 BCD.

解析 2：（**公式法**）根据独立重复试验公式可得，该同学通过测试的概率为 $C_3^2 0.6^2\times0.4+C_3^3 0.6^3=0.648$．故选 A，不选 BCD.

第 7 题　平面向量背景

07

背景知识

向量：既有大小又有方向的量，向量可以用粗体单个字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 来表示，或者用有向线段的起点与终点的大写字母来表示，如 $\overrightarrow{AB}$．向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模（长度），记为 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$．长度（模）为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$，其方向是任意的，零向量与任何向量都平行．长度（模）为 1 的向量称为单位向量；如果若干向量所在的直线互相平行或者重合，那么称这些向量平行或共线．因此，平行或共线向量的方向有可能相同，也有可能相反．

向量加法：若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$（向量加法的三角形法则）；若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，其中 $\overrightarrow{AC}$ 是以 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线（向量加法的平行四边形法则）.

向量减法：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$（向量减法等于与相反向量相加）.

向量的数乘：实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积运算叫做向量的数乘，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$．

向量的数量积：若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$，其中，$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

问题 1　向量模的计算

问题分析：平面向量中涉及有关模长的问题时，常用的方法是将模长进行平方，利用向量数量积的知识进行解答，很快就能得出答案；另外，向量是一个既表示大小又表示方向的工具，具有代数和几何双重特征，在做这类问题时，可以运用数形结合思想加快解题速度.

条件 1.1　给定两个基本向量的模及其夹角

条件分析：对于给定两个基本向量的模及其夹角的条件，只能设法利用基本向量的模及两个向量的夹角进行计算. 由此可以联想到利用两个向量的数量积进行计算.

例 7.1（乙 1763）已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$ ______.

解析 1：（从转换问题出发，代数法）

$\because |\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b})+|2\boldsymbol{b}|^2$　　不便直接求 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$，转化为求 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=4+4\times2\times1\times\cos60^\circ+4=12$，$\therefore |\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$．

解析 2：（从转换条件出发，数形结合）

$\because$ 题设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\therefore |\boldsymbol{a}|=|2\boldsymbol{b}|$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $2\boldsymbol{b}$ 的模相等.

因此，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$ 的模是以 2 为边长且夹角为 60° 的菱形的对角线长. 如图 7.1 所示，由余弦定理可得：

对角线长 $=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\cos120^\circ}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$．

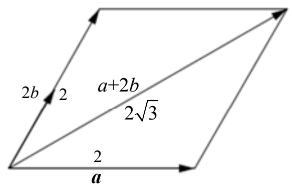


图 7.1

问题 2　向量的运算

问题分析：向量的计算包括向量的坐标（代数）计算和向量的矢量（几何）计算两个方面.

向量的运算：$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2)$，$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$.

条件 2.1　给定两点坐标及一个向量坐标

条件分析：涉及向量的坐标及向量的两端点坐标问题，关键是利用向量坐标等于向量的终点坐标减去向量的起点坐标. 例如，从 $A(x_1,y_1)$ 到 $B(x_2,y_2)$ 的向量 $\overrightarrow{AB}=(m,n)$，其坐标满足 $\begin{cases}m=x_2-x_1\\n=y_2-y_1\end{cases}$.

例 7.2　（乙 1502）已知点 $A(0,1)$，$B(3,2)$，向量 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，则向量 $\overrightarrow{BC}=$（　）.

A. $(-7,-4)$　　B. $(7,4)$　　C. $(-1,4)$　　D. $(1,4)$

解析 1：$\because$ 题设 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$ 且 $A(0,1)$，　从题设条件出发

$\therefore$ 设 $C(x_C,y_C)$，则 $\begin{cases}x_C-0=-4\\y_C-1=-3\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x_C=-4\\y_C=-2\end{cases}$，即 $C(-4,-2)$.　获得新的条件

又 $\because$ 题设：$B(3,2)$，前求：$C(-4,-2)$，$\therefore \overrightarrow{BC}=((-4-3),(-2-2))=(-7,-4)$，故选 A，不选 BCD.

解析 2：$\because$ 题设 $A(0,1)$，$B(3,2)$，$\therefore \overrightarrow{AB}=(3,1)$，　从题设条件出发获得新的条件

又 $\because$ 题设 $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$，

$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-4,-3)-(3,1)=(-7,-4)$.　反用 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

故选 A，不选 BCD.

条件 2.2　给定三角形边线上的点及向量关系

条件分析：当给定三角形及其边线上点的向量关系时，建议利用向量运算的三角形法则.

例 7.3　（乙 1557）设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，则（　）.

A. $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

解析 1：$\because$ 题设 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，　根据向量的方向性判定 $\overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 在同一条直线上

$\therefore D$ 点在 BC 的延长线上.　$\therefore \overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$ 的系数为“正数”，$\therefore \overrightarrow{CD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 同向；否则反向

作示意图如图 7.2 所示，

在 $\triangle ACD$ 中有：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.　①

在 $\triangle ABD$ 中有：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{CD}$.　②

4①−②可得：　目的是消去 $\overrightarrow{CD}$

$3\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，解得：$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，故选 A，不选 BCD.

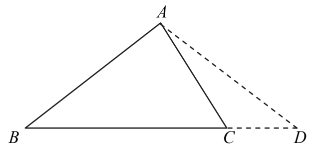


图 7.2

解析 2：$\because$ 题设 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$，$\therefore D$ 点在 BC 的延长线上，

在 $\triangle ACD$ 中有：$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.　①

在 $\triangle ABC$ 中有：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CD}$.　②

3①−②可得：　目的是消去 $\overrightarrow{CD}$

$3\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，解得：$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，故选 A，不选 BCD.

例 7.4　（乙 1807/56）在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，则 $\overrightarrow{EB}=$（　）.

A. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

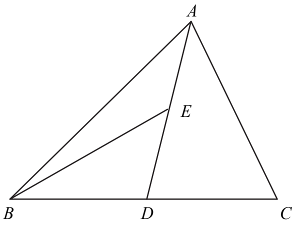


图 7.3

分析：原题没有图，因此根据题意绘图是十分重要的，如图 7.3 所示.

解析 1：在 $\triangle EBD$ 中，$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}$　在 $\overrightarrow{EB}$ 所在三角形中用三角形法则

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$　将向量往三角形的边线上转移

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$　将 $\overrightarrow{AD}$ 想象为平行四边形的半对角线

$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.　规则运算：利用向量的四则运算法则进行运算

解析 2：在 $\triangle ABE$ 中，$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}$　从 $\overrightarrow{EB}$ 所在三角形中用三角形法则进行向量运算

$=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　算理：利用中点条件将向量往三角形的边线上转移

$=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$　将 $\overrightarrow{AD}$ 想象为平行四边形的半对角线

$=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.　规则运算：利用向量的四则运算法则进行运算

解析 3：∵在 $\triangle EBD$ 中，$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}$，　①

在 $\triangle ABE$ 中，$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}$，　②

∴受四个选项中 $\frac{1}{4}$ 的启发，并利用“中点”条件，猜想运算 2×①+2×②可得：

$4\overrightarrow{EB}=2\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}\right)+2\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}\right)$，　猜想运算：利用条件构造目标

即 $4\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AB}$，　利用中点条件进行化简

亦即 $4\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}$，　在此运用三角形法则进行运算

化简可得：$4\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$，亦可得：$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. 故选 A，不选 BCD.

> **经验总结**：本题是向量计算三角形法则的简单应用，但是为了快速解题，我们首先从四个选项中发现：等号的左边都是 $\overrightarrow{AD}$，等号的右边都是 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$. 这暗示我们将 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 看成“已知”向量，来列关于 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{BD}$ 或 $\overrightarrow{CD}$ 的二元一次方程组，然后利用题设 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CD}$ 的条件消元求解即可. 解析 1 与解析 2 给出了两种解析，事实上，分别在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中列方程也可以进行求解，读者不妨一试. 一题多解就是这样产生的!

条件 2.3　给定三角形三边中点的向量问题

条件分析：对于三角形三条边上点的向量问题，需要根据选项的暗示，将目标向量和选项分别转化为三角形相关边的向量并进行比较.

例 7.5 （乙 1406）设 D，E，F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 的中点，如图 7.4 所示，则 $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=$（　）.

A. $\overrightarrow{AD}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$　　D. $\overrightarrow{BC}$

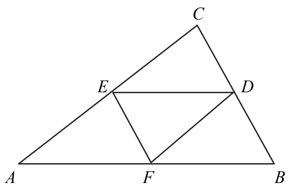


图 7.4

解析：∵三个选项中包含 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 两个向量，

∴需要将目标向量 $\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{FC}$ 转化为与 $\overrightarrow{BC}$ 无关的两个向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的向量和.

∵在 $\triangle ECB$ 中，$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$；在 $\triangle FCB$ 中，$\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$．

∴ $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}$． 平行四边形对角线互相平分

故选 A，不选 BCD．

> **经验总结：**对于有关三角形三边中点的向量问题，需要根据选项的暗示，将目标向量转化为与选项无关的三角形两条边的向量和．然后，再将选项化为三角形该两条边的向量和进行对比即可．

问题 3　向量坐标的求解

问题分析：向量坐标的求解需要依据题设向量的关系列方程求解．

条件 3.1　给定两个向量垂直

条件分析：根据两个非零向量垂直的充要条件列出向量坐标的方程式进行求解，若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $x_1x_2+y_1y_2=0$．

例 7.6（乙 1713）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$．若向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则 $m=$________．

解析：∵题设 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，

∴ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(m-1,3)$． 目标思想：利用向量的加法坐标运算公式先求出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

又∵题设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，

∴由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$ 可得： 方程思想：利用两个向量垂直的充要条件列方程

$-1\times(m-1)+2\times3=0$， 方程思想：解关于向量坐标的方程

解得：$m=7$．

例 7.7（甲 1653）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$，且 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$（　）．

A．–8　　B．–6　　C．6　　D．8

解析：（方程思想）∵题设 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$，

∴ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1+3,m-2)$． 目标思想：利用向量的加法坐标运算公式先求出向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

又∵题设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，

∴由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$ 可得： 方程思想：利用两个向量垂直的充要条件列方程

$4\times3-(m-2)\times2=0$， 方程思想：解关于向量坐标的方程

解得：$m-2=6$，即 $m=8$．故选 D，不选 ABC．

> **经验总结：**比较两例可以发现，2017 年乙卷文科 13 题与 2016 年甲卷理科第 3 题几乎相似．换句话说，文科考生还是需要借鉴上一年的理科甲卷的．

例 7.8（乙 1613）设向量 $\boldsymbol{a}=(x,x+1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x=$ ____________．

解析：∵题设 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$， 条件意识：从题设条件出发

∴想到利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos90^\circ=0$． 条件转换：从向量数量积的定义得到向量垂直条件

又∵题设 $\boldsymbol{a}=(x,x+1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$， 条件意识：从题设条件出发

∴由两个向量数量积的坐标计算法可得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x\times1+(x+1)\times2$， 利用向量计算公式

即可列出关于 x 的方程：$x+2x+2=0$， 方程思想：将向量坐标看成是方程的未知数

解得：$x=-\frac{2}{3}$． 方程思想：解关于向量坐标的方程

例 7.9 （丙 1713）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,m)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 m=________.

解析：∵题设 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$， 条件意识：从题设条件出发

∴想到利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos 90^\circ=0$. 条件转换：从向量数量积的定义得到向量垂直条件

又∵题设 $\boldsymbol{a}=(-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(3,m)$， 条件意识：从题设条件出发

∴由两个向量数量积的坐标计算法可得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2\times3+3\times m$. 利用向量计算公式

即可列出关于 m 的方程：$-6+3m=0$. 方程思想：将向量坐标看成是方程的未知数

解得：$m=2$. 方程思想：解关于向量坐标的方程

条件 3.2 给定两个向量平行

条件分析：向量 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R}，且\boldsymbol{b}\neq 0)$，由于 $\lambda\in\mathbf{R}$（实数），因此，λ既可为“正数”，也可为“负数”. 即相互平行的两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$既可能同方向，也可能反方向.

若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $(x_1,y_1)=(\lambda x_2,\lambda y_2)$，即 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\lambda$，亦即 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 或 $x_1y_2=x_2y_1$.

若 $\overrightarrow{BA}=\lambda\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OC}$，反之亦然. A，B，C 三点共线的向量关系

例 7.10 （甲 1613）已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,4)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$，且 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 m=__________.

解析：∵$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，∴$\dfrac{m}{3}=\dfrac{4}{-2}$，解得：$m=-\dfrac{4}{2}\times3=-6$.

> **经验总结**：向量平行的充要条件不仅可以用于计算向量的坐标，还可以用于证明三点共线或两线平行.

条件 3.3 给定两个向量模的关系式

条件分析：借助方程思想，基于两个向量模的关系式建立方程.

例 7.11 （乙 1663）设向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$，则 $m=$__________.

解析：∵题设 $\boldsymbol{a}=(m,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，∴根据向量的坐标计算法可得：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(m+1,1+2)$.

因此 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(m+1)^2+(1+2)^2=m^2+2m+10$，而 $|\boldsymbol{a}|^2=m^2+1^2$，$|\boldsymbol{b}|^2=1^2+2^2=5$，代入 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$ 可得：$m^2+2m+10=m^2+1+5$，解得：$m=-2$.

> **经验总结**：若 $\boldsymbol{a}=(m,n)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{m^2+n^2}$. 这是一个很容易被忽略的公式！

问题 4 两个向量数量积的计算

问题分析：平面向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积的定义公式如下：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$，其中$\theta$为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

条件 4.1 给定两个向量的坐标

条件分析：若向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的数量积为：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

例 7.12 （甲 1504）已知 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，则 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=$（　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

解析 1：∵ $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，

$\therefore 2\boldsymbol{a}=(2,-2)$，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(1,0)$，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(1,0)\cdot(1,-1)=1\times1+0\times(-1)=1$.

解析 2：$\because (2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，$\therefore \boldsymbol{a}^2=1^2+(-1)^2=2$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-1)+(-1)\times2=-3$，$\therefore (2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times2-3=4-3=1$. 故选 C，不选 ABD.

> **经验总结**：比较解析 1 与解析 2 可以发现，解析 1 写的少算的多，解析 2 写的多算的少．因此，解析 1 比解析 2 更容易算错．选择题还可以借助选项做检验，填空题则很难发现计算上的错误，建议采用解析 2，以避免计算上的错误.

条件 4.2 给定两个向量加与减的模

条件分析：对于给定两个向量的加与减的模两个条件时，往往需要借助加与减两个条件关系式列方程组求解.

例 7.13 （甲 1404/53）设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$（ ）.

A．1　　B． 2　　C． 3　　D． 5

解析：$\because |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，$\therefore \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$.　①

又 $\because |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，$\therefore \boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$.　②

①−②可得：$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，解得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$. 故选 A，不选 BCD.

条件 4.3 给定正方形及边线中点的向量

条件分析：遇到有关正方形的向量问题，首先应考虑建立直角坐标系，将向量的运算转化为向量坐标的计算，其次还应考虑将目标向量转化为正方形相互垂直的两边向量的代数和.

例 7.14 （甲 1314/63）已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=$________.

解析 1：（坐标法）建立如图 7.5 所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(2,0)$，$D(0,2)$，$E(1,2)$. 因此，$\overrightarrow{AE}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(0-2,2-0)=(-2,2)$.

所以，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-2)+2\times2=2$.

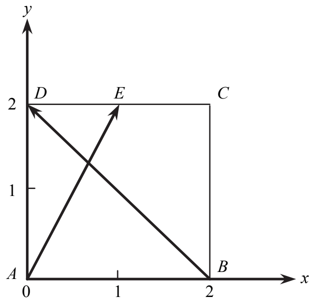


图 7.5

解析 2：（基底法）画出正方形 $ABCD$，

$\because$ 在 $\triangle ADE$ 中，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

在 $\triangle ABD$ 中，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$.

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{AD}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}\right)^2-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}$.

其中，$\because \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{DC}$，$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}\right)^2=2^2-\dfrac{1}{2}\times2^2=2$.

例 7.15 （乙 1858）设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 $(-2,0)$ 且斜率为 $\dfrac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M，N 两点，则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=$（ ）.

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

解析 1：$\because$ 直线过点 $(-2,0)$ 且斜率为 $\dfrac{2}{3}$，$\therefore$ 直线的点斜式方程为 $y=\dfrac{2}{3}(x+2)$，　条件联想

代入抛物线方程 $y^2=4x$ 可得：$\dfrac{4}{9}(x+2)^2=4x$，化简可得：$x^2-5x+4=0$，　代数运算

解得：$\begin{cases}x_1=1\\x_2=4\end{cases}$ 代入 $y=\dfrac{2}{3}(x+2)$ 可得：$\begin{cases}y_1=2\\y_2=4\end{cases}$，即 $M(1,2)$，$N(4,4)$.　想象：由解想到交点

又∵抛物线C：$y^2=4x$的$p=2$，∴焦距$c=\frac{p}{2}=1$，即$F(1,0)$． 概念运算

又∵$\overrightarrow{FM}=(1-1,0-2)=(0,-2)$，$\overrightarrow{FN}=(1-4,0-4)=(-3,-4)$． 向量的坐标概念运算

因此$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0\times(-3)+(-2)\times(-4)=8$． 向量数量积的坐标公式运算

故选B，不选ACD．

解析2：在平面直角坐标系中，绘制$y^2=4x$图像，如图7.6所示，则F点的坐标为$(1,0)$．过点$P(-2,0)$作斜率为$\frac{2}{3}$的直线，交于点$M(1,2)$，点$N(4,4)$．

图形计算：∵$|PF|=3$，∴$|FM|=2$，满足$\frac{|FM|}{|PF|}=\frac{2}{3}$．同理：∵$|PQ|=6$，∴$|QN|=4$

确定点$M(1,2)$，$N(4,4)$后即可仿照解析1的解法．

还可按定义：$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=|FM|\cdot|FN|\cos\angle MFN$计算．

∵由抛物线定义可得：$|FN|=5$，

定义计算：点N到焦点的距离与到准线的距离相等

∴$\cos\angle MFN=\frac{|NQ|}{|FN|}=\frac{4}{5}$．

从而$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=|FM|\cdot|FN|\cos\angle MFN=2\times5\times\frac{4}{5}=8$．

故选B，不选ACD．

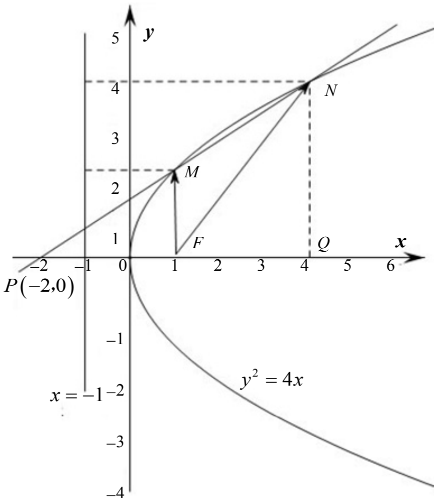


图7.6

例7.16 （甲 1804/54）已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，则$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$（　）．

A．4　　B．3

C．2　　D．0

解析1：∵$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos0^\circ-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ $=2\times1-(-1)=3$，故选B，不选ACD．

解析2：设$\boldsymbol{a}=(1,0)$，且$\boldsymbol{b}=(-1,-1)$， 满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$

从而$2\boldsymbol{a}=(2,0)$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,1)$，$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(1,0)\cdot(3,1)=1\times3+0\times1=3$，故选B，不选ACD．

经验总结：用基底法解决问题的过程是：首先选择一组基底向量，并将题设条件和目标结论表示成该基底向量的代数和，然后再通过向量加、减、数乘或数量积来解决问题．

问题5 两个向量夹角的计算

问题分析：两个向量夹角θ的计算需要借助于向量数量积的公式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$．

条件5.1 给定两向量的坐标

条件分析：借助两个向量数量积的定义公式与坐标公式列方程求解．

例7.17 （丙 1603/53）已知向量$\overrightarrow{BA}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则$\angle ABC=$（　）．

A．30°　　B．45°　　C．60°　　D．120°

解析：∵$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC$， 向量数量积的定义公式

且$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=x_1x_2+y_1y_2$， 向量数量积的坐标公式

$\therefore \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cos\angle ABC = x_1x_2 + y_1y_2$，

列关于夹角余弦的方程

解得：$\cos\angle ABC = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}}{1 \times 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解关于 $\cos\angle ABC$ 的方程

即 $\angle ABC = 30^\circ$.

再解三角函数方程

故选 A，不选 BCD.

条件 5.2 给定过圆心向量与圆上点的向量关系式

条件分析：遇到圆心及圆上点的向量问题，建议先按所给条件作图.

例 7.18（乙 1465）已知 A,B,C 是圆 O 上的三点，若 $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$，则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为______.

解析 1：根据题意作图，如图 7.7 所示.

$\because \overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$，$\therefore 2\overrightarrow{AO} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

作 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$，则 AD 为圆的直径，任取一点 B，连接 BD.

由向量计算的三角形法则可得：在 $\triangle ACD$ 中，$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$，且 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BD}$.

直径 AD 所对的圆周角为直角

将 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ 与题设 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ 对比可见：$\overrightarrow{AC} \,/\!/\, \overrightarrow{BD}$.

作 $\overrightarrow{AC} \,/\!/\, \overrightarrow{BD}$ 可得：$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$，故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90°.

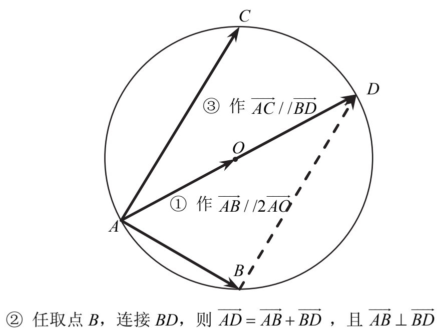


图 7.7

解析 2：$\because \overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$，

$\therefore$ 根据向量计算的平行四边形法则可知：$\overrightarrow{AO}$ 是以 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 为邻边的平行四边形对角线的一半.

即 O 为平行四边形的另一条对角线 BC 的中点.

平行四边形对角线相互平分

又 $\because O$ 为圆心，$\therefore BC$ 是圆 O 的直径，即 $\angle BAC = 90^\circ$.

直径 BC 所对的圆周角为直角

故 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 90°.

问题 6 向量中有关参数的计算

问题分析：向量中有关参数的问题主要集中在垂直向量的坐标参数和平行向量的系数两个方面.

条件 6.1 给定两个向量垂直

条件分析：对于给定两个向量垂直，并且需要计算向量的坐标参数问题，毫无疑问需要利用向量垂直充要条件的坐标表达式列方程进行求解.

例 7.19（乙 1313/63）已知两个单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$\boldsymbol{c} = t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$，则 $t =$______.

解析：$\because \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$，$\therefore \boldsymbol{b} \cdot \left[t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}\right] = 0$，即 $t\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + (1-t)\boldsymbol{b}^2 = 0$.

$\because \boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个单位向量，且夹角为 60°，$\therefore \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\boldsymbol{b}^2 = 1$，代入 $t\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + (1-t)\boldsymbol{b}^2 = 0$，

可得：$\dfrac{1}{2}t + 1 - t = 0$，解得：$t = 2$.

条件 6.2　给定两个向量平行

条件分析：对于给定两个向量平行，并且需要计算两向量的比例系数时，毫无疑问需要利用向量平行的充要条件：$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $(x_1,y_1)=(\lambda x_2,\lambda y_2)$ 进行求解.

例 7.20（甲 1563）设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行，则实数 $\lambda=$________.

解析：∵向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不平行，∴ $\boldsymbol{a}\neq m\boldsymbol{b}$.

又∵向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 平行，∴可设 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$，即有 $\begin{cases}\lambda=k\\1=2k\end{cases}$，解得：$k=\lambda=\dfrac{1}{2}$.

例 7.21（丙 1813/63）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2)$，$\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$. 若 $\boldsymbol{c}\,/\!/\,(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\lambda=$________.

解析：∵题设：$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2)$，∴ $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2(1,2)+(2,-2)=(4,2)$.

又∵题设：$\boldsymbol{c}\,/\!/\,(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，且 $\boldsymbol{c}=(1,\lambda)$，∴ $\dfrac{1}{4}=\dfrac{\lambda}{2}$，　对应坐标成比例

解得：$\lambda=\dfrac{1}{2}$.

问题 7　两个向量关系的判断

问题分析：两个向量关系主要包括模的关系和位置（垂直或平行）或方向关系两个方面.

条件 7.1　给定两向量和与差的模相等

条件分析：对于给定两个向量的和与差的模的条件关系式可以进行平方，并按代数式进行化简消去向量模的平方，最后获得两个向量新的关系式，并以这个新的关系式作为新的条件.

例 7.22（甲 1704）设非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则（　）.

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　B. $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$　　C. $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$　　D. $|\boldsymbol{a}|>|\boldsymbol{b}|$

解析：由题设 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，两边平方可得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，即解得：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故选 A，不选 BCD.

> **经验总结**：已知向量的和与差的模相等的条件可以先平方再化简.

问题 8　向量最值的计算

问题分析：平面向量中有关最值的问题往往源于向量的模（大小）或坐标（方向）的变化，基本思想是将所求目标看成是向量的模或坐标的函数，然后求最值. 常用的解题思路有两种：①"形化"：即利用平面向量的几何意义将问题转化为平面几何中的最值或范围问题，然后根据平面图形的特征直接进行判断；②"数化"：即利用平面向量的坐标运算，把问题转化为代数中的函数最值与值域、不等式的解集、方程有解等问题，然后利用函数、不等式、方程的有关知识来解决.

条件 8.1　给定等边三角形内点的向量

条件分析：对于给定三角形内点的向量，建议建立平面直角坐标系，采用向量的坐标进行"数化"计算.

例 7.23（甲 1762）已知 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是（　）.

A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. -1

解析：如图 7.8 所示，以 BC 为 x 轴，BC 的垂直平分线 DA 为 y 轴，D 为坐标原点建立平面直角坐标系，则 $A\left(0,\sqrt{3}\right)$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$.

设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PA}=\left(-x,\sqrt{3}-y\right)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$，因此，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(-2x,-2y)$，$\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=2x^2-2y\left(\sqrt{3}-y\right)=2x^2+2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\geqslant-\frac{3}{2}$.

显然，当 $x=0$，且 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，即点 P 移动到 $P\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 时，所求最小值为 $-\frac{3}{2}$. 故选 B，不选 ACD.

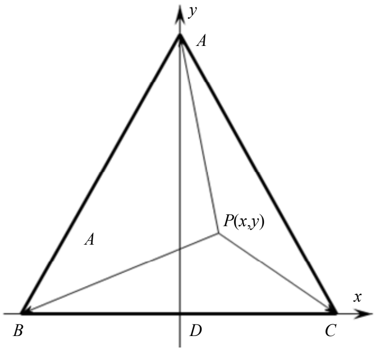


图 7.8

条件 8.2　给定圆上点的向量代数表达式

条件分析：对于给定圆上点的向量代数表达式，建议建立平面直角坐标系，采用向量的坐标进行“数化”计算.

例 7.24（丙 1762）在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上. 若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为（　）.

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{5}$　　D. 2

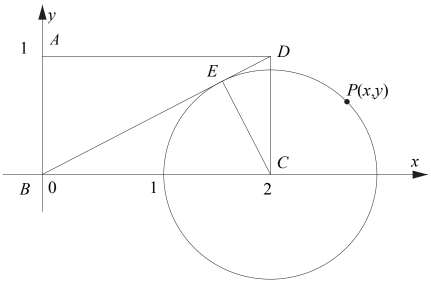


图 7.9

解析：如图 7.9 所示，建立平面直角坐标系，则 $A(0,1)$，$B(0,0)$，$C(2,0)$，$D(2,1)$.

$\because$ 题设 BD 与 $\odot C$ 相切，$\therefore$ 作 $CE\perp BD$，则 $r=|CE|$.

$\because$ 已知 $B(0,0)$，$C(2,0)$，$D(2,1)$，$\therefore$ 求 $r=|CE|$ 的思路有两条.

思路①：

先求 BD 所在直线方程为 $y=\frac{1}{2}x$，即 $x-2y=0$，用点到直线距离公式计算可得：$r=|CE|=\frac{|2-2\times0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

思路②：

$\because CE\perp BD$，$DC\perp BC$，$\therefore \triangle CEB\backsim\triangle DCB$.　∠EBC 为公共角

因此，$\frac{|CE|}{|DC|}=\frac{|BC|}{|BD|}$，　相似三角形对应边成比例

又 $\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，$|BC|=2$，$|DC|=1$，$|BD|=\sqrt{|BC|^2+|DC|^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

$\therefore$ 由 $\frac{|CE|}{|DC|}=\frac{|BC|}{|BD|}$ 可得：$|CE|=\frac{|BC|}{|BD|}\times|DC|=\frac{2}{\sqrt{5}}\times1=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

由上两条思路均可得：$r=\frac{2}{\sqrt{5}}$，故圆 C 的方程是 $(x-2)^2+y^2=\frac{4}{5}$，圆心为 $C(2,0)$.

设动点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}=(x,y-1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0)$.

又 $\because$ 题设满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，$\therefore\begin{cases}x=\lambda\times0+\mu\times2\\y-1=\lambda\times(-1)+\mu\times0\end{cases}$.

即$\begin{cases} x=2\mu \\ y-1=-\lambda \end{cases}$，　　为了求目标表达式$\mu+\lambda$的最大值，转换主元先求$\mu$，$\lambda$

解得：$\begin{cases} \mu=\dfrac{1}{2}x \\ \lambda=1-y \end{cases}$，　　为计算表达式$\mu+\lambda$奠定基础

所以$\mu+\lambda=\dfrac{1}{2}x-y+1$，设$z=\dfrac{1}{2}x-y+1$，则$y=\dfrac{1}{2}x+(1-z)$．∵点$P(x,y)$在圆$(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$上，

∴问题转化为：斜率为$\dfrac{1}{2}$的直线簇与圆$(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$相交时，截距$(1-z)$的最小值是多少？

求截距$(1-z)$的最小值的方法有如下两种：

①由图可见：当直线簇与圆相切时，截距最大值为0，即$1-z=0$，解得：$z=1$．

∴将$y=\dfrac{1}{2}x+(1-z)$代入$(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$可得：$(x-2)^2+\left(\dfrac{1}{2}x+1-z\right)^2=\dfrac{4}{5}$，

即$\dfrac{5}{4}x^2+(1-z-4)x+4-\dfrac{4}{5}+(1-z)^2=0$，由$\Delta=0$可得：$9+6z+z^2-5+10z-5z^2-16=0$，

亦即$-z^2+4z-3=0$，解得：$z_1=1$，$z_2=3$．故$z_{\max}=2$，即$\lambda+\mu$的最大值是3，故选A，不选BCD.

②因为直线与圆相交的条件是圆心$(2,0)$到直线$\dfrac{x}{2}-y+1-z=0$的距离$d\leqslant r$，即$\dfrac{|2-z|}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，解得：

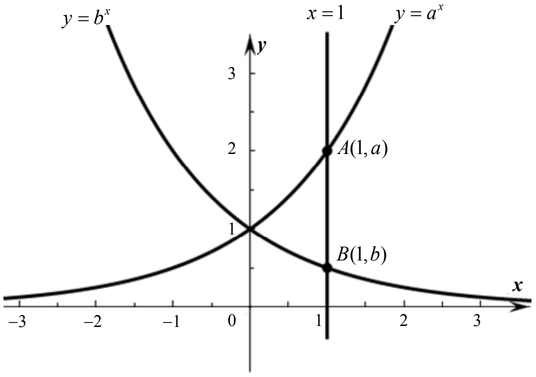
$1\leqslant z\leqslant 3$，所以z的最大值是3，即$\lambda+\mu$的最大值是3，故选A，不选BCD.

第 8 题　指数与对数函数背景

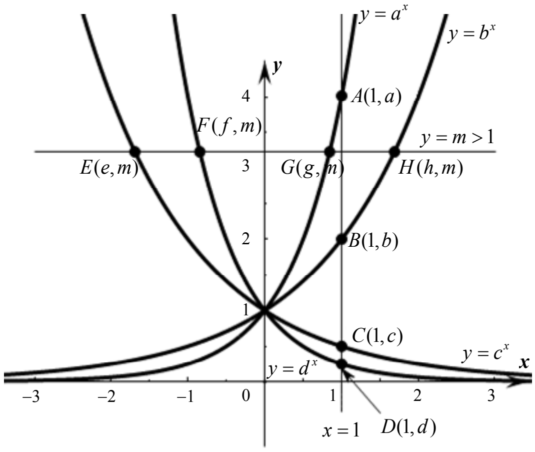
08

背景知识

指数函数图像

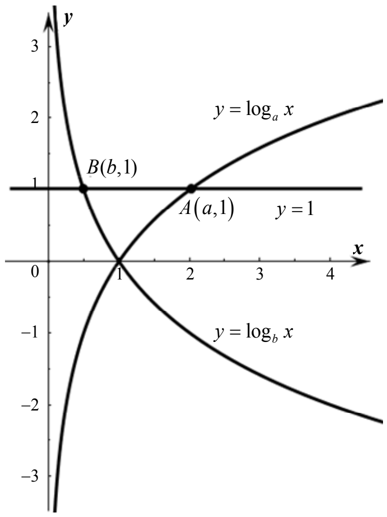


作 $y=a^x$ 和 $y=b^x$ 与 $x=1$ 交于 $A(1,a)$ 和 $B(1,b)$．显然，图像过点（0,1），在 x 轴上方，且 $a>1>b$．

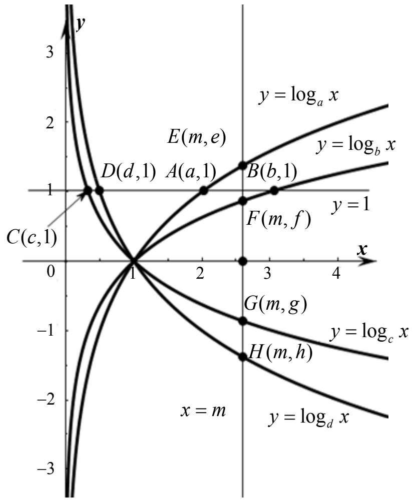


作 $y=a^x$， $y=b^x$， $y=c^x$， $y=d^x$， $x=1$ 和 $y=m>1$，显然， $a>b>c>d$，且 $e<f<g<h$．

对数函数图像



作 $y=\log_a x$ 和 $y=\log_b x$ 与 $y=1$ 交于 $A(a,1)$ 和 $B(b,1)$，显然，图像在 y 轴右侧，且 $a>1>b$．



作 $y=\log_a x$，$y=\log_b x$，$y=\log_c x$，$y=\log_d x$，$y=1$ 和 $x=m>1$，显然有 $e>f>g>h$，且 $b>a>d>c$．

问题 1 初等函数的定义域（值域）问题

问题分析：函数的定义域问题即确定自变量的取值范围，关键在于确定初等函数所包含的各种基本函数的定义域. 函数的值域取决于函数的定义域.

条件 1.1 给定指数为对数的复合函数

条件分析：对于给定指数为对数的复合函数，其定义域取决于对数函数的定义域，而值域取决于指数函数的计算结果.

例 8.1（甲 1610）下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是（ ）.

A. $y=x$　　B. $y=\lg x$　　C. $y=2^x$　　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

解析：先看定义域：

$\because$ 函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域取决于 $\lg x$，而 $y=\lg x$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，

$\therefore$ 函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 研究四个选项可见：定义域为 $(0,+\infty)$ 的函数有 B，D 两个选项；

再看值域：

$\because$ 函数 $y=10^{\lg x}$ 的值域取决于 $10^x>0$，$\therefore$ 函数 $y=10^{\lg x}$ 的值域也为 $(0,+\infty)$.

研究 B，D 两个选项可见：B 选项 $y=\lg x$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$，而 D 选项 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的值域为 $(0,+\infty)$.

因此与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的函数是 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 故选 D，不选 ABC.

问题 2 初等函数值的比较问题

问题分析：初等函数值的比较问题关键在于判断指数或对数的“底数”是大于 1，还是小于 1，然后再利用指数或对数函数图像进行比较.

条件 2.1 给定对数函数

条件分析：若给定对数函数，先比较真数与底数的大小，即判断对数函数值是大于 1，还是小于 1，再对相同真数不同底数的对数进行判断. 在不同底数的对数函数图像中，作 $x=m$ 比较函数值的大小是一个很好的方法.

例 8.2（甲 1308）设 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 2$，$c=\log_2 3$，则（ ）.

A. $a>c>b$　　B. $b>c>a$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

解析：$\because a=\log_3 2=\dfrac{1}{\log_2 3}<1$，$b=\log_5 2=\dfrac{1}{\log_2 5}<1$，$c=\log_2 3>1$，$\therefore c$ 最大.

又 $\because 1<\log_2 3<\log_2 5$，$\therefore \dfrac{1}{\log_2 3}>\dfrac{1}{\log_2 5}$，即 $a>b$. 因此 $c>a>b$. 故选 D，不选 ABC.

例 8.3（甲 1358）设 $a=\log_3 6$，$b=\log_5 10$，$c=\log_7 14$，则（ ）.

A. $c>b>a$　　B. $b>c>a$　　C. $a>c>b$　　D. $a>b>c$

解析：$\because a=\log_3 6=1+\log_3 2$，$b=\log_5 10=1+\log_5 2$，$c=\log_7 14=1+\log_7 2$，

又 $\because \log_2 7>\log_2 5>\log_2 3$，$\therefore \dfrac{1}{\log_2 7}<\dfrac{1}{\log_2 5}<\dfrac{1}{\log_2 3}$，即 $\log_7 2<\log_5 2<\log_3 2$.

因此，$a>b>c$. 故选 D，不选 ABC.

例 8.4　（丙 1862）设 $a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 0.3$，则（　）.

A．$a+b<ab<0$　　B．$ab<a+b<0$　　C．$a+b<0<ab$　　D．$ab<0<a+b$

解析 1：$\because a=\log_{0.2}0.3>0$，$b=\log_2 0.3<0$，$\therefore a\cdot b<0$，排除 C 选项.

观察四个选项，发现关键是要比较 $a+b$ 与 ab 的大小，　　从四个选项中抽象出问题

为此计算 $\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}=\log_{0.3}0.2+\log_{0.3}2=\log_{0.3}0.4$.　　对数换底公式及加法公式

$\because$ 由对数函数图像可知：$0<\log_{0.3}0.4<1$，$\therefore 0<\dfrac{a+b}{ab}<1$.　　对数函数性质应用

又 $\because a\cdot b<0$，$\therefore$ 由 $\dfrac{a+b}{ab}>0$ 可得：$a+b<0$.　　有理数运算法则应用

由 $\dfrac{a+b}{ab}<1$ 可得：$|a+b|<|ab|$，从而 $ab<a+b$.　　有理数大小比较

因此，$ab<a+b<0$．故选 B，不选 ACD.

解析 2：$\because a=\log_{0.2}0.3$，$\therefore$ 由对数函数性质可得：$0<\log_{0.2}1<\log_{0.2}0.3<\log_{0.2}0.2=1$，即 $0<a<1$.

又 $\because b=\log_2 0.3$，$\therefore \log_2 0.3<\log_2 0.5=-1$，即 $b<-1$.

由 $0<a<1$ 及 $b<-1$ 可得：$a+b<0$，且 $ab<0$．因此，排除 C，D 选项.

观察选项 A，B 可见，需要比较 $a+b$ 与 ab 的大小．因此，将两者作商可得：

$\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{\log_2 0.3}+\dfrac{1}{\log_{0.2}0.3}=\log_{0.3}2+\log_{0.3}0.2=\log_{0.3}0.4$.　　换底公式及对数运算公式

又 $\because 0=\log_{0.3}1<\log_{0.3}0.4<\log_{0.3}0.3=1$，$\therefore 0<\dfrac{a+b}{ab}<1$.

又 $\because$ 已证：$a+b<0$，$ab<0$，$\therefore$ 由 $\dfrac{a+b}{ab}<1$ 可得：$a+b>ab$.

综上所述，$ab<a+b<0$．故选 B，不选 ACD.

条件 2.2　给定指数函数与对数函数大小判断选项

条件分析：对于给定对数函数与指数函数大小判断选项的问题，一般都需要逐项排除．排除的过程中，往往需要借助函数图像或特殊值进行判断.

例 8.5　（乙 1608）若 $a>b>1$，$0<c<1$，则（　）.

A．$\log_a c<\log_b c$　　B．$\log_c a<\log_c b$　　C．$a^c<b^c$　　D．$c^a>c^b$

解析 1：（排除法）

对于 A 选项：可以画出两条底数大于 1 的对数函数图像如图 8.1 所示．显然，当 $x=c<1$ 时，$\log_a c>\log_b c$，故 A 选项错误.

对于 B 选项：可以画一条底数小于 1 的对数函数图像如图 8.2 所示，显然，当 $x=a>b$ 时，$\log_c a<\log_c b$，故 B 选项正确.　　作为单项选择题，至此已可以选 B 了

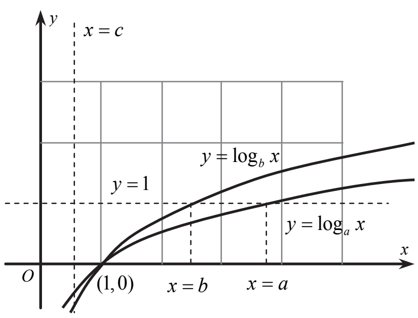


图 8.1

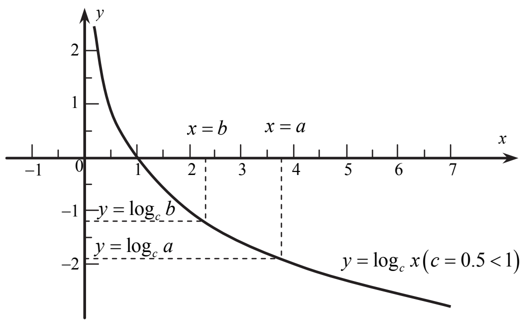


图 8.2

对于 C 选项：可以画出两条底数大于 1 的指数函数图像如图 8.3 所示，显然，当 $x=a>b$，且 $c>0$ 时，$a^c>b^c$，故 C 选项错误.

对于 D 选项：可以画出一条底数小于 1 的指数函数图像如图 8.4 所示，显然，当 $x=a>b$，且 $c<1$ 时，$c^a<c^b$，故 D 选项错误.

故选 B，不选 ACD.

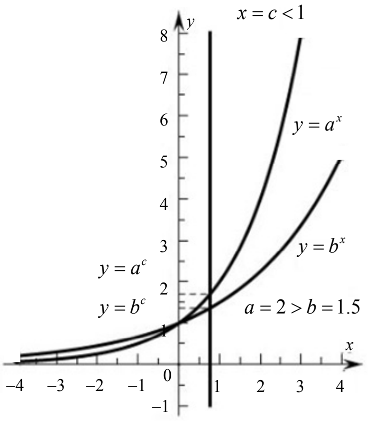


图 8.3

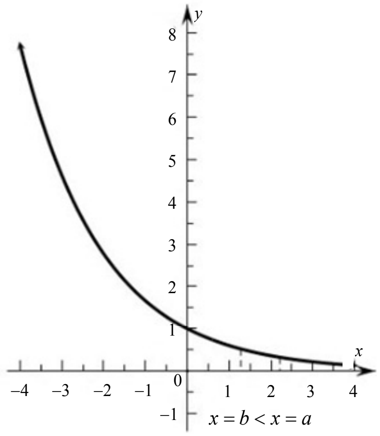


图 8.4

解析 2：（特殊值法） 哲学上的个性存在于共性之中！

∵题设：$a>b>1$，$0<c<1$，

∴可以取符合条件的 $a=16$，$b=4$，$c=\frac{1}{2}$ 进行计算判断.

对于 A 选项：∵ $\log_a c=\log_{2^4}2^{-1}=-\frac{1}{4}$，$\log_b c=-\frac{1}{2}$，∴A 选项错误；

对于 B 选项：∵ $\log_c a=\log_{2^{-1}}2^4=-4$，$\log_c b=-2$，∴B 选项正确；

对于 C 选项：∵ $a^c=\sqrt{16}=4$，$b^c=\sqrt{4}=2$，∴C 选项错误；

对于 D 选项：∵ $c^a=\frac{1}{2^{16}}$，$c^b=\frac{1}{2^4}$，∴D 选项错误. 故选 B，不选 ACD.

例 8.6 （乙 1658）若 $a>b>1$，$0<c<1$，则（　）.

A. $a^c<b^c$　　B. $ab^c<ba^c$　　C. $a\log_b c<b\log_a c$　　D. $\log_a c<\log_b c$

解析 1：（特殊值法） 哲学上的个性存在于共性之中！

∵题设：$a>b>1$，$0<c<1$，

∴可以取符合条件的 $a=9$，$b=4$，$c=\frac{1}{2}$ 进行计算判断.

对于 A 选项：∵ $a^c=3$，$b^c=2$，∴A 选项错误；

对于 B 选项：∵ $ab^c=9\times2=18$，$ba^c=4\times3=12$，∴B 选项错误；

对于 C 选项：∵ $a\log_b c=\frac{a}{\log_c b}=\frac{9}{\log_{0.5}4}=-\frac{9}{2}$，$b\log_a c=\frac{b}{\log_c a}=\frac{4}{\log_{0.5}9}>\frac{4}{\log_{0.5}8}=-\frac{4}{3}$，

∴ $a\log_b c=-\frac{27}{6}<-\frac{12}{6}=\frac{4}{\log_{0.5}8}<\frac{4}{\log_{0.5}9}=b\log_a c$，故 C 选项正确；

对于 D 选项：∵ $\log_a c=\frac{1}{\log_c a}=\frac{1}{\log_{0.5}9}>\frac{1}{\log_{0.5}8}=-\frac{1}{3}$，$\log_b c=\frac{1}{\log_c b}=-\frac{1}{2}$，显然 D 选项错误.

故选 C，不选 ABD.　事实上，取 $a=16$，$b=4$，$c=\frac{1}{2}$ 会使计算更为简便

解析 2：（排除法）

对于 A 选项：$\because a>b>1$，且 $0<c<1$，所以问题转化为判断底数大于 1 的指数函数在自变量小于 1 的情况下，函数值与底数的关系.

为此，画出两条底数大于 1 的指数函数图像如图 8.5 所示.

对于 $y=A^x(A>1)$ 的函数，令 $x=1$ 可见：当 $x>0$ 时，若 $A_2>A_1$，则 $y_2>y_1$. 故 A 选项错误.

对于 B 选项：可以转化为：$b^{c-1}<a^{c-1}$.

$\because c-1<0$，且 $a>b$，$\therefore$ 由上图可见：$b^{c-1}>a^{c-1}$，故 B 选项错误.

由于 C 选项计算较为复杂，可以先看 D 选项. 逐个排除，先易后难

对于 D 选项：可以画出底数大于 1 的对数函数图像如图 8.6 所示.

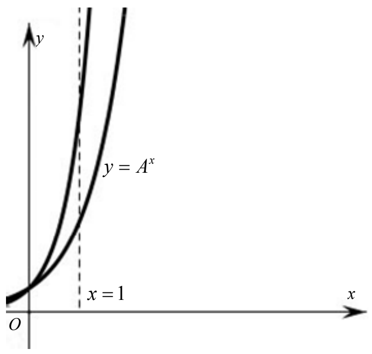


图 8.5

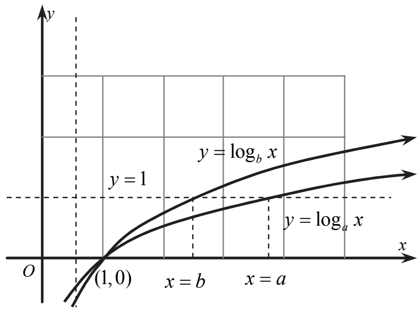


图 8.6

显然，当 $x=c<1$ 时，$\log_a c>\log_b c$，故 D 选项错误. 作为单项选择题，至此已可确定选 C

下面由 C 选项 $a\log_b c<b\log_a c$ 可得：$\log_b c^a<\log_a c^b$，令 $x_1=c^a$，$x_2=c^b$，则 $\dfrac{x_1}{x_2}=c^{a-b}$，对照指数函数图像可知：

$\because 0<c<1$，且 $a-b>0$，$\therefore c^{a-b}<1$，即 $x_1<x_2<1$，故对照图 8.6 可见，当 $x<1$ 时，$\log_a x_2>\log_b x_1$，即 $\log_b c^a<\log_a c^b$. 故 C 选项正确.

例 8.7　（丙 1607/56）已知 $a=2^{\frac{4}{3}}$，$b=3^{\frac{2}{3}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}$，则（　）.

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

解析 1：$a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$，$c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$，$b=3^{\frac{2}{3}}$，对照指数函数图像可得：$b<a<c$. 故选 A，不选 BCD.

解析 2：本题的目标是比较三个数的大小，因此可以两两比较.

$\because a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$，与 $b=3^{\frac{2}{3}}$ 进行比较，$\therefore a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{10}{15}}>b=3^{\frac{2}{3}}$.

又 $\because c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}>a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$，$\therefore b<a<c$. 故选 A，不选 BCD.

问题 3　初等函数的自变量比较问题

问题分析：对于给定初等函数值的关系，需要比较自变量的大小时，往往需要根据几个初等函数值的关系预设一个基准值，然后利用题设关系确定几个自变量与预设基本函数值直接的关系式，从而将多个自变量看成是预设值的“函数”，再进行比较.

条件 3.1　给定不同底数的指数函数值相等

条件分析：当遇到多个不同底数的指数（或对数）函数值相等时，可以预设一个函数值.

例 8.8　（乙 1761）设 x，y，z 为正数，且 $2^x=3^y=5^z$，则（　）.

A. $2x<3y<5z$ B. $5z<2x<3y$ C. $3y<5z<2x$ D. $3y<2x<5z$

解析：∵题设 $2^x=3^y=5^z$，∴设 $2^x=3^y=5^z=k$， 经验：连等条件预设函数值为 k

则 $x=\log_2 k$， $y=\log_3 k$， $z=\log_5 k$.

∵ $\dfrac{2x}{3y}=\dfrac{2\log_2 k}{3\log_3 k}=\dfrac{2\ln 3}{3\ln 2}=\dfrac{\ln 9}{\ln 8}=\log_8 9>1$，∴ $2x>3y$. ①

由此可见，排除选项A，B，确定答案是C或D，发现只要比较 $5z$ 与 $2x$ 即可.

又∵ $\dfrac{5z}{2x}=\dfrac{5\log_5 k}{2\log_2 k}=\dfrac{5\ln 2}{2\ln 5}=\dfrac{\ln 32}{\ln 25}=\log_{25}32>1$，∴ $5z>2x$. ②

综合①②可得：$5z>2x>3y$. 注意：此处如果比较 $5z$ 与 $3y$ 的大小，由于C、D选项中都有：$5z>3y$.

事实上，∵ $\dfrac{5z}{3y}=\dfrac{5\log_5 k}{3\log_3 k}=\dfrac{5\ln 3}{3\ln 5}=\dfrac{\ln(9\times 27)}{\ln 125}=\log_{125}243>1$，∴ $5z>3y$. 无济于事

例 8.9 （乙 1813）已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$，若 $f(3)=1$，则 $a=$________.

解析：∵ $f(x)=\log_2(x^2+a)$，且 $f(3)=1$，∴ $\log_2(3^2+a)=1$， 用函数定义列方程

即 $3^2+a=2$，解得：$a=-7$. 利用对数运算法则转换方程

第 9 题　函数背景

09

背景知识

函数的概念

设 A，B 是两个非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有一个唯一的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 f：$A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$，$x \in A$.其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 $f(x)$ 叫做函数值，函数值的集合 $B=\{f(x)|x \in A\}$ 叫做函数的值域，"函数 $y=f(x)$"也可简称为"函数 $f(x)$".

函数的表示方法：函数可以用解析法、图像法或列表法来表示.

分段函数

如果在函数的定义域内，自变量 x 在不同的取值范围内有不同的对应关系，那么这样的函数叫做分段函数.

函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 I：

如果对于定义域 I 内的某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数.

如果对于定义域 I 内的某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

如果一个函数在某个区间上是增函数或是减函数，那么就说这个函数在这个区间上具有单调性.

函数的奇偶性

如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x 都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数；如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内的任意一个 x 都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数. 偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点对称，反之亦然.

函数的对称性

（1）轴对称图形.

① $f(a-x)=f(a+x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称（当 $a=0$ 时，偶函数的图像关于 y 轴对称），

② $f(a-x)=f(b+x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 轴对称.

（2）中心对称图形.

① $f(a-x)=-f(a+x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于 $(a,0)$ 中心对称（当 $a=0$ 时，奇函数的图像关于坐标原点对称）；

② $f(a-x)=-f(b+x) \Leftrightarrow f(x)$ 关于 $\left(\dfrac{a+b}{2},0\right)$ 中心对称.

函数的周期性

（1）定义：设 $f(x)$ 的定义域为 D，若对 $\forall x \in D$，存在一个非零常数 T，有 $f(x+T)=f(x)$，则

称函数 $f(x)$ 是一个周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的一个周期.

（2）周期性的理解：可理解为间隔为 T 的自变量函数值相等.

（3）常见的周期性判定.

① $f(x+a)=f(x+b)\Rightarrow f(x)$ 为周期函数，其周期 $T=|b-a|$.

② $f(x+a)=-f(x)\Rightarrow f(x)$ 的周期 $T=2a$.

证明：$\because f(x+a)=-f(x)$，$\therefore f(x+2a)=-f(x+a)=-(-f(x))=f(x)$，即 $T=2a$.

运用：当无法直接从 $f(x+a)$ 入手得到周期时，可考虑等间距计算 $f(x+2a)$，进而通过比较两个函数式看能否得出周期.

③ $f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}\Rightarrow f(x)$ 的周期 $T=2a$.

证明：$\because f(x+a)=\dfrac{1}{f(x)}$，$\therefore f(x+2a)=\dfrac{1}{f(x+a)}=\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}}=f(x)$，即 $T=2a$.

④ $f(x)+f(x+a)=k$（k 为常数）$\Rightarrow f(x)$ 的周期 $T=2a$.

证明：$\because f(x)+f(x+a)=k$，$\therefore f(x+a)+f(x+2a)=k$，两式相减可得：

$f(x+2a)=f(x)$，即周期 $T=2a$.

⑤ $f(x)\cdot f(x+a)=k$（k 为常数）$\Rightarrow f(x)$ 的周期 $T=2a$.

证明：$\because f(x)\cdot f(x+a)=k$，$\therefore f(x+a)\cdot f(x+2a)=k$，两式相除可得：

$f(x+2a)=f(x)$，即周期 $T=2a$.

（4）对称性与周期性的关系（双对称性出周期）.

若一个函数 $f(x)$ 存在两个对称关系，则 $f(x)$ 是一个周期函数，具体情况如下（假设 $b>a$）：

①若 $f(x)$ 的图像关于 $x=a$，$x=b$ 轴对称，则 $f(x)$ 是周期函数，周期 $T=2(b-a)$.

证明：$\because$ $f(x)$ 关于 $x=a$ 轴对称 $\Rightarrow f(-x)=f(2a+x)$，$f(x)$ 关于 $x=b$ 轴对称 $\Rightarrow f(-x)=f(2b+x)$，

$\therefore f(2a+x)=f(2b+x)$，即 $f(x)$ 的周期为 $T=2b-2a=2(b-a)$.

②若 $f(x)$ 的图像关于 $(a,0)$，$(b,0)$ 中心对称，则 $f(x)$ 是周期函数，周期 $T=2(b-a)$.

③若 $f(x)$ 的图像关于 $x=a$ 轴对称，且关于 $(b,0)$ 中心对称，则 $f(x)$ 是周期函数，周期 $T=4(b-a)$.

问题 1 函数值计算问题

问题分析：由于函数值是自变量按照特定的对应关系计算的结果，因此，函数值的计算关键在于确定所求函数值与自变量的对应关系.

条件 1.1 给定偶函数的对称轴和某个自变量的函数值

条件分析：（1）已知函数的奇偶性求函数值或解析式，首先抓住奇偶性讨论函数在各个区间上的解析式，或充分利用奇偶性得出关于 $f(x)$ 的方程，从而可得 $f(x)$ 的值或解析式.

（2）已知函数的奇偶性求函数解析式的参数或函数值，一般都是基于方程的思想，采用待定系数法求解. 即根据 $f(x)\pm f(-x)=0$ 得到关于待求参数的恒等式，由系数的对等性得参数的值或方程（组），进而得出参数的值.

例 9.1（甲 1415）已知偶函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$f(3)=3$，则 $f(-1)=$______.

解析 1：（用函数性质公式解题）

$\because f(x)$ 为偶函数，$\therefore f(-1)=f(1)$． 偶函数定义 $f(-x)=f(x)$

又$\because$函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，

$\therefore f(2+x)=f(2-x)$． 理解为以 2 为中心，左右 $\pm x$ 的函数值相等

$\therefore$当 $x=1$ 时，$f(3)=f(1)$，从而 $f(3)=f(-1)$，即 $f(-1)=f(3)=3$．

解析 2：（用函数图像解题）

由于函数的表示方法除了解析法之外，还有图像法和列表法．因此，对于求特定点的函数值问题，还可以采用图像法．

如图 9.1 所示建立平面直角坐标系，由于已知 $f(3)=3$，因此先在图中标出点 $A(3,3)$．由于本题只给了 $f(3)=3$，因此，猜测所求结果肯定与 $y=3$ 有某种联系，故过点 $A(3,3)$ 作 x 轴的平行线 $y=3$．

又因为本题目标是求 $f(-1)$，因此先作 $x=-1$ 与 $y=3$ 交于 $A''(-1,3)$．

又因为题设 $f(x)$ 为偶函数，所以作 $x=1$ 与 $y=3$ 交于 $A'(1,3)$．

又因为题设 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称，所以作对称轴 $x=2$，发现 $A'(1,3)$ 与 $A(3,3)$ 关于 $x=2$ 对称．

因此，$f(-1)=3$．

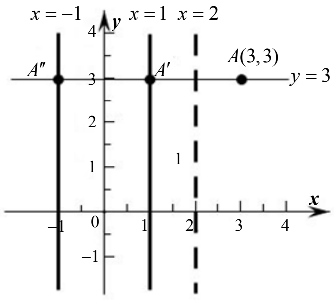


图 9.1

解析 3：（用“双对称性求周期”性质解题）

$\because f(x)$ 是偶函数，图像关于 $x=0$ 轴对称，$\therefore f(x)=f(-x)$．

又$\because f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，$\therefore f(2-x)=f(2+x)$．

故 $f(x)=f(-x)=f(2-(x+2))=f(2+(x+2))=f(x+4)$．

所以，$f(x)$ 的周期为 4，因此 $f(-1)=f(3)=3$．

经验总结：对于一些求特定点函数值的问题，有时作图法比解析法更容易得到结论，且不易弄错．

例 9.2 （甲 1714）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=2x^3+x^2$，则 $f(2)=$__________．

解析：$\because$题设 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$．因此，$f(2)=-f(-2)=-\left[2\times(-2)^3+(-2)^2\right]=12$．

例 9.3 （乙 1510）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2, & x\leqslant 1\\ -\log_2(x+1), & x>1\end{cases}$，且 $f(a)=-3$，则 $f(6-a)=$（　）．

A．$-\dfrac{7}{4}$　　B．$-\dfrac{5}{4}$　　C．$-\dfrac{3}{4}$　　D．$-\dfrac{1}{4}$

解析：$\because f(a)=-3$，$\therefore$欲求 $f(6-a)$ 需先求出 a． 先确定自变量取值

又$\because$题设 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}-2, & x\leqslant 1\\ -\log_2(x+1), & x>1\end{cases}$，$\therefore$需要先讨论：当 $f(a)=-3$ 时，a 的取值范围．

当 $x\leqslant 1$ 时，$x-1\leqslant 0$，$2^{x-1}>0$，从而 $2^{x-1}-2>-2$．又$\because f(a)=-3<-2$，$\therefore a>1$ 且 $-\log_2(a+1)=-3$，解得：$a=7$．$\therefore f(6-a)=f(-1)=2^{-1-1}-2=\dfrac{1}{4}-2=-\dfrac{7}{4}$．故选 A，不选 BCD．

例 9.4 （甲 1555）设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\log_2(2-x), & x<1\\ 2^{x-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $f(-2)+f(\log_2 12)=$（　）．

A．3　　B．6　　C．9　　D．12

解析：$\because f(-2)=1+\log_2(2+2)=3$；$f(\log_2 12)=2^{\log_2 12-1}=\dfrac{2^{\log_2 12}}{2^1}=\dfrac{12}{2}=6$；

$\therefore f(-2)+f(\log_2 12)=3+6=9$．故选 C，不选 ABD．

经验总结：（1）求分段函数的函数值时，要先确定所求函数值的自变量属于哪一段区间，再代入该段的函数式求函数值，当出现 $f(f(a))$ 的形式时，应从内到外依次求值.（2）当给出函数值求自变量的值时，先假设所求的值在分段函数定义区间的每一段上，再求出相应自变量的值，切记要代入检验，看所求的自变量的值是否属于相应段自变量的取值范围.

例 9.5（甲 1812/61）已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$. 若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$（　）.

A. -50　　B. 0　　C. 2　　D. 50

分析：∵题设：$f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$.　奇函数关于坐标原点对称

又∵ $f(1)=2$，∴ $f(-1)=-2$，且 $f(0)=0$.

又∵ $f(x)$ 满足 $f(1-x)=f(1+x)$，∴有如下几种解法.

解析 1：（计算发现函数的周期性）

∵ $f(1)=2$，　$f(2)=f(1+1)=f(1-1)=f(0)=0$，

$f(3)=f(1+2)=f(1-2)=f(-1)=-f(1)=-2$，　$f(4)=f(1+3)=f(1-3)=f(-2)=-f(2)=0$，

$f(5)=f(1+4)=f(1-4)=f(-3)=-f(3)=2$，　$f(6)=f(1+5)=f(1-5)=f(-4)=-f(4)=0$，

……

归纳函数值的规律：依次以 x 取 2，0，-2，0 为一组循环出现，且当出现 12 组后，剩余两项为：

$f(49)=f(1+48)=f(1-48)=f(-47)=2$，$f(50)=f(1+49)=f(1-49)=f(-48)=0$.

∴ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12\times0+2+0=2$.

解析 2：（作图发现函数的周期性）

由 $f(1-x)=f(1+x)$ 可得：$f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.

将 x 看成是微小增量，根据在 1 左右自变量增减等量后的函数值相等来判定函数关于 $x=1$ 对称

我们先根据函数关于坐标原点对称，作出函数在 $[-1,1]$ 上的图像示意图，如图 9.2 所示.

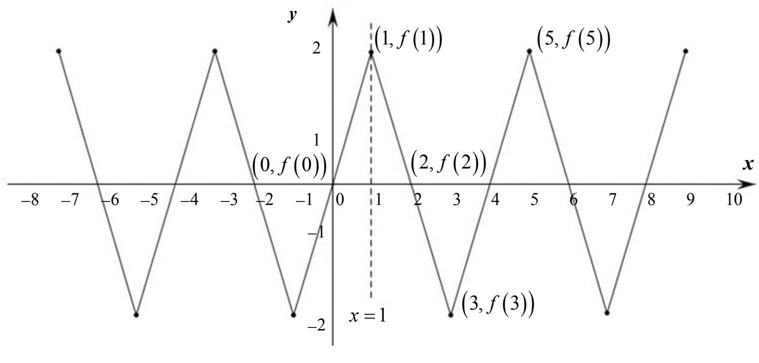


图 9.2

再根据函数关于 $x=1$ 对称作出 $[1,3]$ 上的函数图像示意图，如图 9.2 所示，以此类推，观察图像可见：函数的周期为 4，且 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=0$.

同理可得：$f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=0$，……，$f(44)+f(45)+f(46)+f(47)=0$.

且 $f(48)+f(49)+f(50)=f(0)+f(1)+f(2)=0+2+0=2$，

因此，$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12\times0+f(49)+f(50)=2$.

解析 3：（猜想证明函数的周期）

∵题设：$f(1-x)=f(1+x)$，∴令 $t=1+x$，　将原条件简化，也可以令 $t=1-x$

则将 $x=t-1$ 代入上式可得：$f(2-t)=f(t)$，即 $f(x)=f(2-x)$.

猜想奇函数 $f(x)$ 的周期为 $T=4$，并作如下证明：

$f(t+4)=f(2-t-4)=f(-t-2)$　　令 $x=t+4$，运用 $f(x)=f(2-x)$ 化简

$=-f(t+2)$　　将 $(t+2)$ 看成整体，并运用 $f(-x)=-f(x)$ 化简

$=-f(-t)$　　将 $-t$ 看成整体，再次运用 $f(x)=f(2-x)$ 化简

$=f(t)$.　　将 $-t$ 看成整体，再次运用 $f(-x)=-f(x)$ 化简

因此，$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=12\times0+f(49)+f(50)=2$.

故选 C，不选 ABD.

经验总结： 借鉴正弦函数的对称性和周期性可以猜想，具有轴对称和坐标原点对称的双重对称性质的函数是周期函数.

解析 4：（一般函数用特殊函数代替）

∵题设：$f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$.

∴函数 $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称，且周期为 4.

不妨设 $f(x)=A\sin\dfrac{\pi x}{2}$.　　特殊值思想：用特殊代替一般

又∵题设：$f(1)=2$，∴代入上式可得：$A=2$，即 $f(x)=2\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

∵ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2\left(\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{2\pi}{2}+\sin\dfrac{3\pi}{2}+\sin\dfrac{4\pi}{2}\right)=2\times(1+0-1+0)=0$，

∴ $f(1)+f(2)+\cdots+f(49)+f(50)=f(4\times12+1)+f(4\times12+2)=f(1)+f(2)=2+0=2$.

经验总结： 本题的关键条件是奇函数满足 $f(a-x)=f(a+x)$，即函数关于 $x=a$ 对称．因此，遇到关于 $x=a$ 对称的奇函数时，首先需要确定其周期是 $4a$．例如，$y=\sin x$ 是关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称的奇函数，因此其周期是 $4\times\dfrac{\pi}{2}=2\pi$．（发现定理，证明从略）

例 9.6　（丙 1816）已知函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1$，$f(a)=4$，则 $f(-a)=$________.

解析： ∵ $f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1$，∴ $f(-x)=\ln\left(\sqrt{1+(-x)^2}+x\right)+1$.

根据对数运算法则想到：$f(x)+f(-x)=2+\ln\left[\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\right]=2+\ln1=2$.

∵题设：$f(a)=4$，∴由 $f(a)+f(-a)=2$ 可得：$f(-a)=2-f(a)=2-4=-2$.

问题 2　函数性质问题

问题分析： 由于函数的基本性质主要包括单调性、奇偶性（对称性）和周期性，因此，有关函数性质的问题主要是针对题设的具体问题进行研究.

条件 2.1　给定函数解析式

条件分析： 已知函数的解析式时，可以分别计算 $f'(x)$，$f(-x)$，$f(T+x)$ 以研究函数的单调性、奇偶性和周期性.

例 9.7　（甲 1708）函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是（　）.

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

解析：∵题设：函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$，

∴要使函数有意义，必须使 $x^2-2x-8>0$， 先从函数的定义域入手，确定自变量的取值范围

解得：$x<-2$ 或 $x>4$，即函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-x,-2)\cup(4,+\infty)$，从而直接排除 B，C 选项.

令 $t=x^2-2x-8$，则∵ $f(t)=\ln t$ 是增函数， 再从题设函数的单调性入手

∴ $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的递增区间是 $t=x^2-2x-8$ 的递增区间.

∵ $t=x^2-2x-8$ 的对称轴是 $x=-\dfrac{B}{2A}=-\dfrac{(-2)}{2}=1$，且抛物线开口向上，

∴ $t=x^2-2x-8$ 的递增区间是 $(1,+\infty)$. 综合前述函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$ 可得：函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$ 的单调递增区间是 $(4,+\infty)$，故选 D，不选 ABC.

> **经验总结**：求函数单调区间的常用方法：（1）定义法和导数法，通过解相应不等式得单调区间.（2）图像法，由图像确定函数单调区间需要注意两点：一是，单调区间必须是函数定义域的子集；二是，图像不连续的单调区间要分开写，用“和”或“,”连接，不能用“∪”连接.（3）利用复合函数“同增异减”的原则，此时需要先确定复合函数中双重函数的单调性.

例 9.8 （乙 1709）已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则（ ）.

A. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增　　B. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减

C. $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称　　D. $y=f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称

解析：由题设可得：$f(2-x)=\ln(2-x)+\ln[2-(2-x)]=\ln(2-x)+\ln x=f(x)$，令 $x=1+t$ 可得：$f(1-t)=f(1+t)$，所以函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，故 C 正确，D 错误；

又 $f(x)=\ln[x(2-x)](0<x<2)$，由复合函数的单调性可知：$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，所以 A，B 选项错误. 综上所述，应选 C，不选 ABD.

> **经验总结**：（1）对于在题干中没有明确提出问题的选择题，需要对选项逐个进行排除，直至选出正确选项为止.（2）设函数 $f(x)$，$x\in D$，如果满足 $\forall x\in D$，恒有 $f(a+x)=f(b-x)$，那么函数的图像有对称轴 $x=\dfrac{a+b}{2}$；如果满足 $\forall x\in D$，恒有 $f(a+x)=-f(b-x)$，那么函数 $f(x)$ 的图像有对称中心 $(\dfrac{a+b}{2},0)$.

例 9.9 （丙 1807）下列函数中，其图像与函数 $y=\ln x$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称的是（ ）

A. $y=\ln(1-x)$　　B. $y=\ln(2-x)$　　C. $y=\ln(1+x)$　　D. $y=\ln(2+x)$

解析 1：∵若 $f(1-x)=f(1+x)$，则 $y=f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.

∴令 $y=\ln x$ 中 $x=x'+1$，即 $y=\ln(1+x')$，其中 $x'=x-1$，则关于 $x=1$ 的函数为 $y=\ln(1-x')$，将 $x'=x-1$ 代入 $y=\ln(1-x')$ 可得：$y=\ln[1-(x-1)]=\ln(2-x)$. 故选 B，不选 ACD.

解析 2：∵ $y=\ln x$ 关于 $x=1$ 对称，∴ $f(1-2)=f(1+2)$，即 $f(-1)=f(3)$. 故选 B，不选 ACD.

注意：∵ $y=\ln(1-x)$ 与 $y=\ln(1+x)$ 关于 $x=1$ 对称，∴不能取 $f(1-1)=f(1+1)$.

例 9.10 （乙 1405/53）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域为 **R**，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论中正确的是（ ）.

A. $f(x)g(x)$ 是偶函数　　B. $|f(x)|g(x)$ 是奇函数

C. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数　　D. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数

解析：（排除法）

∵ $f(x)$ 是奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$；又∵ $g(x)$ 是偶函数，∴ $g(-x)=g(x)$.

∵设 $A(x)=f(x)g(x)$，则 $A(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-A(x)$，∴A 不正确；
∵设 $B(x)=|f(x)|g(x)$，则 $B(-x)=|f(-x)|g(-x)=|f(x)|g(x)=B(x)$，∴B 不正确；
∵设 $C(x)=f(x)|g(x)|$，则 $C(-x)=f(-x)|g(-x)|=-f(x)|g(x)|=-C(x)$，∴C 正确；
∵设 $D(x)=|f(x)g(x)|$，则 $D(-x)=|f(-x)g(-x)|=|-f(x)g(x)|=D(x)$，∴D 不正确.
故选 C，不选 ABD.

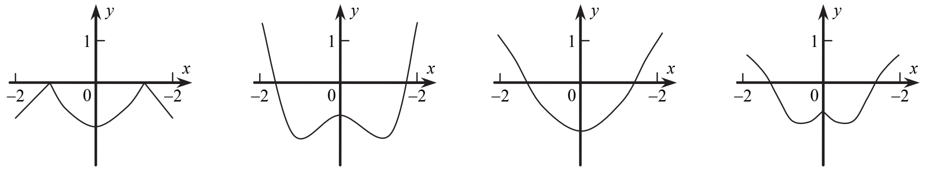
问题 3 函数图像的判断问题

问题分析：对于函数图像的判断问题往往需要借助函数的单调性、奇偶性（对称性）和周期性，甚至需要借助函数的极值点（拐点）来进行判断.

条件 3.1 给定函数图像作为选项

条件分析：已知函数的图像时，需要关注图像的变化趋势、对称轴（中心）、极值点（拐点），并要特别关注 x 轴上的刻度值作为判断零点或极值点位置的突破口，关注 y 轴上的刻度值作为判断极值大小的依据.

例 9.11 （乙 1609/57）函数 $y=2x^2-e^{|x|}$ 在 $[-2,2]$ 的图像大致为（ ）.



解析：令 $f(x)=2x^2-e^{|x|}$， 依据函数解析式中包含 x^2 和 $|x|$
∵ $f(-x)=f(x)$，
∴函数是偶函数，其图像关于 y 轴对称. 四个选项均符合
因此，问题转化为研究在 $x>0$ 时的 $f(x)=2x^2-e^x$ 的图像.
∵ $f'(x)=4x-e^x$，∴在平面直角坐标系中，
分别作出 $y_1=4x$ 与 $y_2=e^x$ 的图像如图 9.3 所示. 图像研究导函数

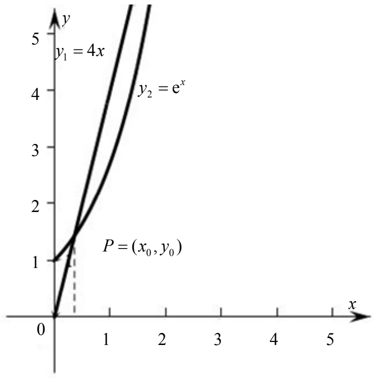
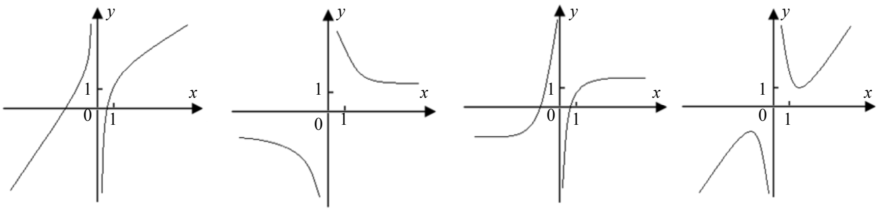


图 9.3

由图可见，当 $0<x<x_0<1$ 时，$y_2>y_1$，
$f'(x)=y_1-y_2<0$，函数 $f(x)=2x^2-e^x$ 递减；
当 $x_0<x$ 时，$y_2<y_1$，$f'(x)=y_1-y_2>0$，
函数 $f(x)=2x^2-e^x$ 递增.
即函数 $f(x)=2x^2-e^{|x|}$ 在 $x_0<1$ 处取得最小值，因此，依据有最小值可确定应选 B 或 D，但是 D 选项的极值点横坐标小于 1，而 B 选项的极值点的横坐标大于 1.
故选 D，不选 ABC.

> **经验总结**：（1）一般这类问题都可以将四个选项按照某种特征分为两组，先排除一组；（2）对于组内选项的筛选要注重图像细节的微小变化.

例 9.12 （丙 1707）函数 $y=1+x+\dfrac{\sin x}{x^2}$ 的部分图像大致为（ ）.



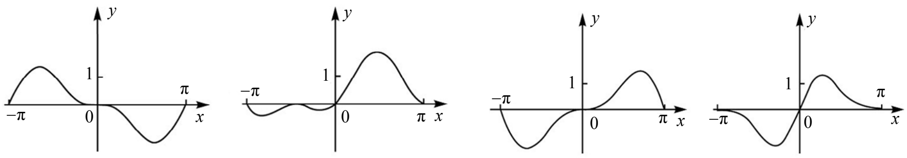
A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

解析：当 $x=1$ 时，$f(1)=1+1+\sin 1>2$，故排除 A、C；　特殊值思想

当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 1+x$，故排除 B.　极限思想

满足条件的只有 D，故选 D，不选 ABC.　推理思想：排除法

例 9.13（乙 1309）函数 $f(x)=(1-\cos x)\sin x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致为（　）.



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

解析：$\because f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1>0$，$\therefore$ 排除 A，

又 $\because f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x)=(1-\cos x)\sin x$ 为奇函数，图像关于(0,0)对称，排除 B.

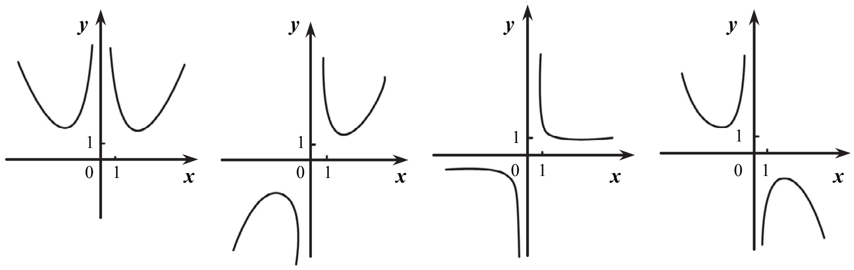
又 $\because f(x)=(1-\cos x)\sin x=\sin x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$，$\therefore f'(x)=\cos x-\cos 2x$.

令 $f'(x)=0$ 可得：$\cos x-\cos 2x=0$，即 $\cos x-\left(2\cos^2 x-1\right)=0$，即 $-2\cos^2 x+\cos x+1=0$，解得：$\cos x=1$ 或 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$.

由 $\cos x=1$ 可得：$x=0$ 或 $x=\pi$；由 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 可得：$x=\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}>\dfrac{\pi}{2}$.

即函数图像的极值点应该在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 之间，故选 C，不选 ABD.

例 9.14（甲 1803/53）函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$ 的图像大致为（　）.



A.　　　　B.　　　　C.　　　　D.

解析：$\because f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}$，$\therefore f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{(-x)^2}=-f(x)$. 因此函数 $f(x)$ 为奇函数，图像关于坐标原点对称，故排除 A 选项；

又 $\because$ 当 $x>0$ 时，$e^x>1$，$e^{-x}<1$，$\therefore f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x^2}>0$，故排除 D 选项；

比较 B，C 选项发现：当 $x>1$ 时，B 选项有个最小值点，C 选项函数递减，由此想到对函数 $f(x)$ 进行求导.

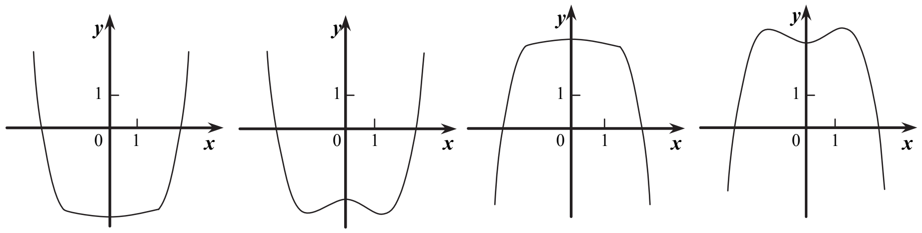
$\because f'(x)=\dfrac{(e^{x}+e^{-x})x^{2}-2x(e^{x}-e^{-x})}{x^{4}}=\dfrac{(e^{2x}+1)x^{2}-2x(e^{2x}-1)}{x^{4}e^{x}}=\dfrac{(x^{2}-2x)e^{2x}+(x^{2}+2x)}{x^{4}e^{x}}$，

令 $f'(x)=0$ 可得：$(x-2)e^{2x}+x+2=0$，即 $(x-2)(e^{2x}+1)+4=0$．

设 $g(x)=(x-2)(e^{2x}+1)$，则 $g'(x)=(e^{2x}+1)+(x-2)(2e^{2x}+0)=(2x-4)e^{2x}+1$．

$\therefore \exists x_0<2$ 使得 $g'(x_0)=0$．故选 B，不选 ACD.

例 9.15 （丙 1809/57）函数 $y=-x^{4}+x^{2}+2$ 的图像大致为（　）.



A.　　B.　　C.　　D.

解析：$\because y=-x^{4}+x^{2}+2$，$\therefore$ 当 $x=0$ 时，$y=2$．因此，排除 A、B 选项.

再观察 C，D 选项可见：两者的区别仅是在 $(-1,0)$ 或 $(0,1)$ 上有无极大值，为此需要对函数进行求导.

又 $\because y'=-4x^{3}+2x=-2x(2x^{2}-1)$，$\therefore$ 当 $2x^{2}-1=0$，$y'=0$，即当 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，函数 $y=-x^{4}+x^{2}+2$ 有极值.

作为选择题到此即可，且尚可论证：当 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，函数皆取极大值

故选 D，不选 ABC.

例 9.16 （甲 1612）已知函数 $f(x)(x\in \mathbf{R})$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，若函数 $y=|x^{2}-2x-3|$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=$（　）.

A．0　　B．m　　C．$2m$　　D．$4m$

解析：$\because f(x)=f(2-x)$，$\therefore f(x+1)=f[2-(x+1)]=f(1-x)$，

即函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.

又 $\because y=|x^{2}-2x-3|=|(x-1)^{2}-4|$ 也关于 $x=1$ 对称，

$\therefore$ 绘制 $y=|(x-1)^{2}-4|$ 图像如图 9.4 所示，并令

$f(x)=\dfrac{1}{4}(x-1)^{2}+1$ 满足 $f(x)=f(2-x)$，

显然，关于 $x=1$ 对称的两个交点的横坐标之和为 2.

$\because$ 题设两函数有 m 个交点，即有 $\dfrac{m}{2}$ 对交点，亦即在 $x=1$ 左右两边各有 $\dfrac{m}{2}$ 个交点.

由此可见：本题中的参数 m 必为偶数！

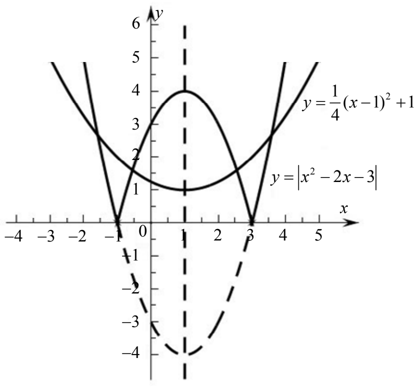


图 9.4

$\therefore \dfrac{m}{2}$ 对交点的横坐标之和为 $\dfrac{m}{2}\times 2=m$．故选 B，不选 ACD.

例 9.17 （甲 1662）已知函数 $f(x)(x\in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$，若函数 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图像的交点为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_m,y_m)，则 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=$（　）.

A．0　　B．m　　C．$2m$　　D．$4m$

解析：$\because f(-x)=2-f(x)$，$\therefore f(-x)+f(x)=2$，因此 $y=f(x)$ 的图像关于 $(0,1)$ 对称.

又$\because$ $y=\dfrac{x+1}{x}$ 可化为 $y=1+\dfrac{1}{x}$，即 $y-1=\dfrac{1}{x}$.

令 $y'=y-1$，$x'=x$，则 $y'=\dfrac{1}{x'}$，显然 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 是将 $y'=\dfrac{1}{x'}$ 横坐标不变，纵坐标向上平移一个单位得到的，因此关于 $(0,1)$ 点对称．$\because$ $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}x_i+\sum\limits_{i=1}^{m}y_i$，又$\because$ $y=f(x)$ 的图像关于 $(0,1)$ 对称，且 $y=\dfrac{x+1}{x}$ 关于 $(0,1)$ 点对称．$\therefore$两曲线交点对称呈现.

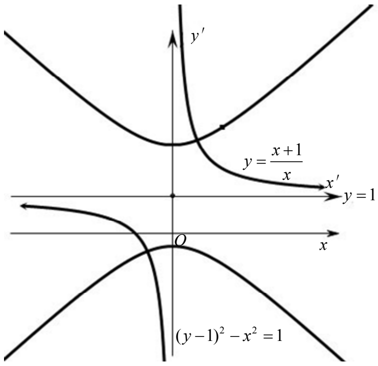


图 9.5

画出函数图像如图 9.5 所示，y 轴左右两边各 $\dfrac{m}{2}$ 个交点，且 $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=0$，$\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=\dfrac{m}{2}\times 2=m$，故选 B，不选 ACD.

问题 4 函数极值（最值）的求解

问题分析：对于函数极值（最值）的求解问题，关键是需要判断函数是否具有对称性或单调性，对于对称函数“找”对称轴（或对称中心），对于单调函数“找”导函数的零点.

条件 4.1 给定对称函数的含参表达式和对称轴方程

条件分析：对于对称关键是要利用函数的对称性，从对称的角度去探寻目标.

例 9.18（乙 1366）若函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称，则 $f(x)$ 的最大值是_____.

解析 1：$\because f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$，$\therefore f(-1)=f(1)=0$. 关注函数的两个固定零点：$x=\pm1$

又$\because$函数 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 关于直线 $x=-2$ 对称，且 $f(-1)=f(1)=0$ 在 $x=-2$ 右侧，

$\therefore$在 $x=-2$ 左侧 $f(-5)$ 和 $f(-3)$ 分别与 $f(-1)$ 和 $f(1)$ 对称，即 $f(-5)=f(-3)=0$.

因此，$x_3=-5$，$x_4=-3$ 是函数的另外两个零点．即 $x_3=-5$，$x_4=-3$ 是 $x^2+ax+b=0$ 的两个根.

即 $x^2+ax+b=(x+5)(x+3)$.

因此 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)=(x+1)(x-1)(x+3)(x+5)=-(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)$.

令 $t=x^2+4x$， 整体思想，换元法，降幂处理

则 $f(t)=-(t+3)(t-5)=-t^2+2t+15$. 将问题转化成一元二次函数求极值

当 $t=-\dfrac{B}{2A}=-\dfrac{2}{2\times(-1)}=1$ 时，$f_{\max}(t)=C-\dfrac{B^2}{4A}=15-\dfrac{2^2}{4\times(-1)}=16$. 利用一元二次函数顶点坐标公式

解 $x^2+4x=1$ 可得：$x=-2\pm\sqrt{5}$，即当 $x=-2\pm\sqrt{5}$（关于 $x=-2$ 对称）时，$f(x)$ 的最大值是 16.

解析 2：$\because f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$，$\therefore f(-1)=f(1)=0$.

又$\because$图像关于直线 $x=-2$ 对称，$\therefore f(-3)=f(-1)=0$，$f(-5)=f(1)=0$.

将 $x=-5$，$x=-3$ 分别代入 $f(x)=(1-x^2)(x^2+ax+b)$ 可得：$\begin{cases}(1-9)(9-3a+b)=0\\(1-25)(25-5a+b)=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}9-3a+b=0\\25-5a+b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=8\\b=15\end{cases}$.

$\because f(x)=(1-x^2)(x^2+8x+15)=x^2+8x+15-x^4-8x^3-15x^2$，

$\therefore f'(x)=-4x^3-24x^2-28x+8=-4(x^3+6x^2+7x-2)$.

又$\because$函数图像关于$x=-2$对称，$\therefore x=-2$必然是函数的一个极值点（即导函数的零点）.

因此，可设$f'(x)=-4(x+2)(x^2+Ax+B)=-4[x^3+(A+2)x^2+(2A+B)x+2B]$，与$f'(x)=-4(x^3+6x^2+7x-2)$对比可得：$A+2=6$，$2B=-2$，解得：$A=4$，$B=-1$.

即$f'(x)=-4(x+2)(x^2+7x-1)=-4(x+2)(x+2+\sqrt{5})(x+2-\sqrt{5})$，因此，当$x\in(-\infty,-2-\sqrt{5})\cup(-2,-2+\sqrt{5})$时，$f'(x)>0$，当$x\in(-2-\sqrt{5},-2)\cup(-2+\sqrt{5},+\infty)$时，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-2-\sqrt{5})$上单调递增，在$(-2-\sqrt{5},-2)$上单调递减，在$(-2,-2+\sqrt{5})$上单调递增，在$(-2+\sqrt{5},+\infty)$上单调递减.

故当$x=-2\pm\sqrt{5}$时$f(x)$取得最大值，即$f_{\max}(x)=f(-2-\sqrt{5})=f(-2+\sqrt{5})=16$.

条件 4.2　给定函数的极值点

条件分析：对于给定函数极值点的问题关键是利用函数极值点的充要条件和函数的单调性：（1）可导函数$y=f(x)$在点x_0处取得极值的充要条件是$f'(x_0)=0$，且在x_0左侧与右侧$f'(x)$的符号不同；（2）若$f(x)$在(a,b)内有极值，那么$f(x)$在(a,b)内绝不是单调函数，即在某区间上单调递增或单调递减的函数没有极值.

例 9.19　（甲 1761）若$x=-2$是函数$f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$的极值点，则$f(x)$的极小值为（　）.

A．-1　　B．$-2e^{-3}$　　C．$5e^{-3}$　　D．1

解析：$\because$题设$f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$，

$\therefore f'(x)=(2x+a)e^{x-1}+(x^2+ax-1)e^{x-1}=[x^2+(a+2)x+a-1]e^{x-1}$.

又$\because x=-2$是极值点，$\therefore f'(-2)=0$．即$(-2)^2+(a+2)\times(-2)+a-1=0$，解得：$a=-1$.

故$f(x)=(x^2-x-1)e^{x-1}$，且$f'(x)=(x^2+x-2)e^{x-1}$.

$\because e^{x-1}>0$，$\therefore$令$g(x)=x^2+x-2$解$g(x)=0$，可得：$x^2+x-2=0$，即$(x+2)(x-1)=0$，解得：$x_1=-2$，$x_2=1$．即当$x<-2$或$x>1$时，$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$(-\infty,-2)$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$(-2,1)$上单调递减.

所以函数$f(x)$在$x=1$处取得极小值，故$f_{极小值}(x)=f(1)=(1-1-1)e^{1-1}=-1$．故选 A，不选 BCD.

问题 5　函数切线求解问题

问题分析：对于函数的切线求解问题，关键是对函数求导计算切线的斜率.

条件 5.1　给定函数的解析式

条件分析：对于给定函数解析式，需要根据解题的需要求出函数的导数.

例 9.20　（乙 1714）曲线$y=x^2+\dfrac{1}{x}$在点$(1,2)$处的切线方程为________.

解析：设$y=f(x)$，则$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$，所以$f'(1)=2\times1-\dfrac{1}{1^2}=1$，所以曲线$y=x^2+\dfrac{1}{x}$在点$(1,2)$处切线的点斜式方程为$y-2=1\times(x-1)$，即$y=x+1$.

例 9.21　（甲 1813/63）曲线$y=2\ln(x+1)$在点$(0,0)$处的切线方程为________.

解析：∵ $y'=\dfrac{2}{x+1}$，∴切线斜率为：$k=y'_{x=0}=2$，点斜式切线方程为：$y=2x$． 文理科题型不同

条件 5.2　给定偶函数的解析式

条件分析：对于给定偶函数的解析式，需要根据题设条件求出另外“半边”函数的解析式及其导数．

例 9.22（丙 1616）已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=e^{-x-1}-x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,2)$处的切线方程是________________．

解析：∵已知 $f(x)$ 为偶函数，∴ $f(-x)=f(x)$．

又∵当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=e^{-x-1}-x$，∴当 $x>0$ 时，$f(x)=f(-x)=e^{-(-x)-1}-(-x)=e^{x-1}+x$．

∵ $f'(x)=e^{x-1}+1$，∴ $f'(1)=e^{1-1}+1=2$．

因此，过点$(1,2)$，斜率为 2 的切线方程为 $y-2=2(x-1)$，即 $2x-y=0$．

例 9.23（丙 1665）已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)+3x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,-3)$处的切线方程是____________．

解析 1：∵已知 $f(x)$ 为偶函数，∴ $f(x)=f(-x)$．

为计算在点$(1,-3)$处的切线方程，必须确定当 $x>0$ 时的函数表达式．

当 $x>0$ 时，$-x<0$，且 $f(x)=f(-x)=\ln x-3x$．

又∵ $f'(x)=\dfrac{1}{x}-3$，∴ $f'(1)=\dfrac{1}{1}-3=-2$，所以切线方程为 $y+3=-2(x-1)$，即 $2x+y+1=0$．

解析 2：∵已知 $f(x)$ 为偶函数，∴ $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称．

为求曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,-3)$处的切线方程，先求曲线 $y=f(x)$ 在点$(-1,-3)$处的切线方程．

∵当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)+3x$，∴ $f'(x)=\dfrac{1}{x}+3$，$f'(-1)=\dfrac{1}{-1}+3=2$．

所以，曲线在点$(-1,-3)$处的切线方程为 $y+3=2(x+1)$，即 $-2x+y+1=0$，所求切线为上述切线关于 y 轴的对称直线 $2x+y+1=0$（将 x 改成 $-x$ 即可）．

条件 5.3　给定奇函数的含参解析式

条件分析：对于给定奇函数的含参解析式，需要利用奇函数性质先求出参数．

例 9.24（乙 1806/55）设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$．若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,0)$处的切线方程为（　）．

A．$y=-2x$　　B．$y=-x$　　C．$y=2x$　　D．$y=x$

解析：∵题设：函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$ 为奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$， 据此列方程求 a

即 $(-x)^3+(a-1)(-x)^2+a(-x)=-\left[x^3+(a-1)x^2+ax\right]$，化简可得：$(a-1)=-(a-1)$，解得：$a-1=0$，即 $a=1$，因此，$f(x)=x^3+x$． 将 a 代入确定函数解析式

又∵ $f'(x)=3x^2+1$， 导数公式运算

∴ $k=f'(0)=1$ 导数意义应用与函数定义运算

所以，过点$(0,0)$的切线方程为 $y=x$． 点斜式方程

条件 5.4　给定两条曲线共用一条切线

条件分析：给定两条曲线共用一条切线，可以分别求两条曲线的切线进行对比来求解．

例 9.25（甲 1666）若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线，则 $b=$__________．

解析：设直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln x+2$ 的切点为 $A(x_1,y_1)$，则 $y_1=\ln x_1+2$．

且∵ $y'=\dfrac{1}{x}$，∴点斜式切线方程为 $y-(\ln x_1+2)=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{1}{x_1}x+\ln x_1+1$．

设直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切点为 $B(x_2,y_2)$，则 $y_2=\ln(x_2+1)$．

且∵ $y'=\dfrac{1}{x+1}$，∴点斜式方程为 $y-\ln(x_2+1)=\dfrac{1}{x_2+1}(x-x_2)$，即 $y=\dfrac{1}{x_2+1}x+\ln(x_2+1)-\dfrac{x_2}{x_2+1}$．

∵两条切线实际上是同一条切线，

∴ $\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2+1}$，　　①

$\ln x_1+1=\ln(x_2+1)-\dfrac{x_2}{x_2+1}$，　　②

由①可得：$x_2+1=x_1$，代入②可得：$1=-\dfrac{x_2}{x_1}$，即 $x_2=-x_1$，再代回 $x_2+1=x_1$ 可解得：$x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$，对照 $y=\dfrac{1}{x_1}x+\ln x_1+1$，可得：$b=\ln x_1+1=1-\ln 2$．

问题 6　函数不等式求解问题

问题分析：对于函数不等式的求解问题，往往需要根据给定函数的形式或性质分别进行处理.

条件 6.1　给定分段函数解析式

条件分析：对于给定分段函数解析式的问题，需要根据给定函数的定义域先进行分段求解，再求并集.

例 9.26　（乙 1415）设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}, & x<1\\ x^{\frac{1}{3}}, & x\geqslant 1\end{cases}$，则使得 $f(x)\leqslant 2$ 成立的 x 的取值范围是________.

解析：∵当 $x<1$ 时，$x-1<0$，$f(x)=e^{x-1}<1<2$；又∵当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$．

∴由 $f(x)\leqslant 2$ 可得：$x^{\frac{1}{3}}\leqslant 2$，解得：$x\leqslant 8$，故使得 $f(x)\leqslant 2$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty,1)\cup[1,8]=(-\infty,8]$．

例 9.27　（乙 1812）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$，则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是（　）.

A．$(-\infty,1]$　　B．$(0,+\infty)$　　C．$(-1,0)$　　D．$(-\infty,0)$

解析：∵ $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$，∴ $f(2x)=\begin{cases}2^{-2x}, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$．　　①

但是 $f(x+1)=\begin{cases}2^{-(x+1)}, & x+1\leqslant 0\\ 1, & x+1>0\end{cases}$，即 $f(x+1)=\begin{cases}2^{-(x+1)}, & x\leqslant -1\\ 1, & x>-1\end{cases}$．　　②

比较①②两式可见：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(2x)=f(x+1)=1$，不满足：$f(x+1)<f(2x)$．

当 $-1<x<0$ 时，$f(2x)=2^{-2x}$，$f(x+1)=1$，满足 $f(x+1)<f(2x)$．

当 $x<0$ 时，$f(2x)=2^{-2x}$，$f(x+1)=2^{-(x+1)}$，解 $f(x+1)<f(2x)$ 即 $-(x+1)<-2x$ 可得：$x<-1$．

综上所述，当 $-\infty<x<0$ 时，满足 $f(x+1)<f(2x)$，故选 D，不选 ABC．

例 9.28　（丙 1716/65）设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是______.

解析 1：由题意得：当 $x>\frac{1}{2}>0$ 时，$f(x)+f(x-\frac{1}{2})=2^x+2^{x-\frac{1}{2}}>1$ 恒成立，即 $x>\frac{1}{2}$；

当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$x-\frac{1}{2}\leqslant 0$，$f(x)+f(x-\frac{1}{2})=2^x+\left(x-\frac{1}{2}\right)+1>1$ 恒成立，即 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$x-\frac{1}{2}<0$，$f(x)+f(x-\frac{1}{2})=x+1+\left(x-\frac{1}{2}\right)+1>1$ 恒成立，解得：$x>-\frac{1}{4}$，即 $-\frac{1}{4}<x\leqslant 0$．

综上所述，x 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$．

解析 2：令 $g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)$，则

当 $x\leqslant 0$，且 $x-\frac{1}{2}\leqslant 0$ 时，$g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=x+1+\left(x-\frac{1}{2}\right)+1=2x+\frac{3}{2}$；

当 $x>0$，且 $x-\frac{1}{2}\leqslant 0$ 时，即 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=2^x+x+\frac{1}{2}$；

当 $x>0$，且 $x-\frac{1}{2}>0$ 时，即 $x>\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=2^x+2^{x-\frac{1}{2}}=\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}2^x$．

写成分段函数的形式可得：$g(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}，x\leqslant 0\\ 2^x+x+\frac{1}{2}，0<x\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}2^x，x>\frac{1}{2}\end{cases}$．

$\because g'(x)=\begin{cases}2，x\leqslant 0\\ 2^x+1，0<x\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}2^x，x>\frac{1}{2}\end{cases}$ 均大于 0，$\therefore$函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增．

又$\because g\left(-\frac{1}{4}\right)=1$，$\therefore g(x)>1$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$．

经验总结：分段函数的问题需要注重自变量的取值范围与函数关系的对应性，即必须明确不同的自变量取值范围所对应的函数解析式是什么，然后代入该段的解析式求值．解决此类问题时，要注意区间端点是否取到及其所对应的函数值，尤其是分段函数在结合点处的函数值．

例 9.29 （甲 1512）设函数 $f(x)=\ln\left(1+|x|\right)-\frac{1}{1+x^2}$，则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是（　　）．

A．$\left(\frac{1}{3},1\right)$　　B．$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$　　C．$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$　　D．$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$

解析：$\because f(x)=\ln\left(1+|x|\right)-\frac{1}{1+x^2}$，

$\therefore f(-x)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是偶函数，研究 $x\geqslant 0$ 即可．

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)-\frac{1}{1+x^2}$．

∵随着 x 增加，$\ln(1+x)$ 递增，$\dfrac{1}{1+x^2}$ 递减，∴ $f(x)$ 递增.

因此，$f(x)>f(2x-1)\Leftrightarrow f(|x|)>f(|2x-1|)\Leftrightarrow |x|>|2x-1|\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}<x<1$.

故选 A，不选 BCD.

条件 6.2　给定单调奇函数过定点

条件分析：对于给定分段函数解析式的问题，往往需要根据给定函数的定义域进行分段求解.

例 9.30　（乙 1755）函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递减，且为奇函数．若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是（　）.

A．$[-2,2]$　　B．$[-1,1]$　　C．$[0,4]$　　D．$[1,3]$

解析：因为 $f(x)$ 为奇函数且在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递减，所以当 $f(1)=-1$ 时，满足 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ 的 x 必须满足 $-1\leqslant x\leqslant 1$．因此，将 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 $x-2$ 看成是一个整体可得：$-1\leqslant x-2\leqslant 1$，解得：$1\leqslant x\leqslant 3$.

故选 D，不选 ABC.

> **经验总结**：奇、偶函数的单调性问题，要充分利用函数的奇、偶性与单调性解决．设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递增的奇函数，若 $f(x_1)+f(x_2)>0$，则 $x_1+x_2>0$，反之亦成立.

例 9.31　（甲 1562）设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　）.

A．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　B．$(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$　　D．$(0,1)\cup(1,+\infty)$

解析：∵题设条件 $xf'(x)-f(x)<0$，∴想到构造一个包含 $f(x)$ 的函数：$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

$g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)\cdot x'}{x^2}$，∵当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，∴当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$.

因此，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减．又∵函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数，∴ $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数.

因此，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递增．又∵ $f(-1)=0$，∴ $g(-1)=g(1)=0$.

当 $0<x<1$ 时，$g(x)>0$，此时 $f(x)=xg(x)>0$；当 $x<-1$ 时，$g(x)<0$，此时 $f(x)=xg(x)>0$.

综上所述，使得 $f(x)>0$ 成立的 x 取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$．故选 A，不选 BCD.

条件 6.3　给定过定点偶函数的单调区间

条件分析：对于给定过定点偶函数的单调区间问题需要综合利用函数的对称性和单调性.

例 9.32　（甲 1465）已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$f(2)=0$．若 $f(x-1)>0$，则 x 的取值范围是__________.

解析：∵ $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$f(2)=0$，∴当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)>0$.

又∵ $f(x)$ 是偶函数，∴当 $-2<x\leqslant 0$ 时，$f(x)>0$.

因此，$f(x)>0$ 的充要条件是 $|x|<2$.

从而 $f(x-1)>0$ 的充要条件是 $|x-1|<2$.　　函数思想的灵活运用，或者说是整体思想

即 $-2<x-1<2$，解得：$-1<x<3$，或写成 $x\in(-1,3)$.

问题 7 函数不等式的参数范围问题

问题分析： 函数不等式的参数范围问题是指类似 $f(x)\geqslant kx$ 的不等式恒成立的条件下，参数 k 的取值范围求解问题.

条件 7.1 给定分段函数解析式

条件分析： 对于给定分段函数解析式，往往需要根据给定函数的定义域进行分段求解.

例 9.33 （乙 1312/61）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$，若 $|f(x)|\geqslant ax$，则 a 的取值范围是（　）.

A. $(-\infty,0]$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $[-2,1]$　　D. $[-2,0]$

解析 1：（排除法）

$\because f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$，$\therefore |f(x)|=\begin{cases}x^2-2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$.

由 $|f(x)|\geqslant ax$ 可得：$\begin{cases}x\leqslant 0\\ x^2-2x\geqslant ax\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>0\\ \ln(x+1)\geqslant ax\end{cases}$.

解 $\begin{cases}x\leqslant 0\\ x^2-2x\geqslant ax\end{cases}$ 可得：$a\geqslant x-2$，即 a 的取值范围应为 $a\geqslant (x-2)_{\max}=-2$，故排除 A，B；

解 $\begin{cases}x>0\\ \ln(x+1)\geqslant ax\end{cases}$，比较 C，D 选项. 在两个区间的差集中取值

取特殊值 $a=1$ 时，由于对于 $x>0$，$\ln(x+1)<x$ 恒成立，与 $\ln(x+1)\geqslant ax$ 相矛盾. 即 $a=1$ 的取值不符合要求，从而排除 C.

故选 D，不选 ABC.

> **经验总结：** 如图 9.6 所示，过点(1,0)作 $y=\ln x$ 的切线 $y=x-1$，由图可见：当 $x>0$ 时，$y=x-1$ 在 $y=\ln x$ 的上方，即 $x-1\geqslant \ln x$（$x=1$ 时，取等号）. 令 $t=x-1$，则 $x=t+1$，当 $t>0$，即 $x>1$ 时，$t>\ln(t+1)$（$x>1$，去掉等号），亦即：$\ln(t+1)<t$.

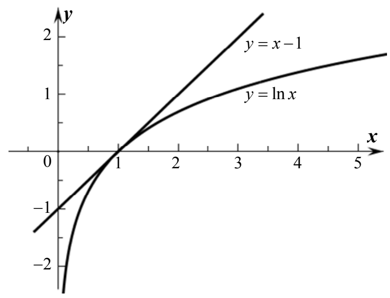


图 9.6

解析 2：（数形结合）

$\because f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$，$\therefore |f(x)|=\begin{cases}x^2-2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$.

在平面直角坐标系中画出 $|f(x)|$ 的图像如图 9.7 所示.

设 $g(x)=ax$，将 a 看成是直线的斜率，则欲使 $|f(x)|\geqslant ax$，$g(x)=ax$ 需在 $|f(x)|=\begin{cases}x^2-2x, & x\leqslant 0\\ \ln(x+1), & x>0\end{cases}$ 下方.

当 $x\leqslant 0$ 时，由 $|f(x)|\geqslant ax$ 可得：$x^2-2x\geqslant ax$，即 $x^2-2x-ax\geqslant 0$，亦即 $x(x-a-2)\geqslant 0$，$\because x\leqslant 0$，$\therefore x-a-2\leqslant 0$，即 $a+2\geqslant x\geqslant 0$，解得：$a\geqslant -2$.

或者：$\because f'(x)=2x-2$，$\therefore f'(0)=-2$，即 $a\geqslant -2$.

当 $x>0$ 时，由 $|f(x)|\geqslant ax$ 可得：$\ln(x+1)\geqslant ax$，即 $a\leqslant \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

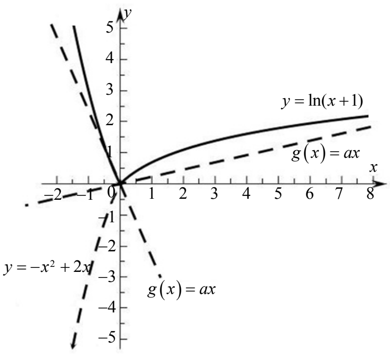


图 9.7

令 $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{\ln(x+1)'x-\ln(x+1)x'}{x^2}=\dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}$.

令 $\varphi(x)=x-(x+1)\ln(x+1)$ ，则 $\varphi'(x)=1-\ln(x+1)-1=-\ln(x+1)<0$.

因此，$\varphi(x)$ 单调递减，所以 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$ ，因此，$h'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(x+1)x^2}<0$.

故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，根据"洛必达法则"：

$a\leqslant h_{\min}(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+1)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$.

综上所述，a 的取值范围是 $-2\leqslant a\leqslant 0$ ，即 $[-2,0]$. 故选 D，不选 ABC.

问题 8 含参函数的参数取值求解问题

问题分析：含参函数的参数取值求解问题，是指类似 $y=f(x,a)$ 的函数在特定条件下参数 a 的取值求解问题，因此从某种角度来理解这是一个关于 x，a 的二元函数问题.

条件 8.1 给定含参函数过定点

条件分析：含参函数过定点问题，只要将定点坐标代入含参函数解析式列方程即可求解.

例 9.34 （甲 1513）已知函数 $f(x)=ax^2-2x$ 的图像过点 $(-1,4)$ ，则 $a=$_________.

解析：∵函数 $f(x)=ax^2-2x$ 的图像过点 $(-1,4)$ ，∴将点 $(-1,4)$ 代入函数可得：$a(-1)^2-2\times(-1)=4$ ，解得：$a=2$.

条件 8.2 给定含参函数过定点的切线方程

条件分析：将所求含参函数过定点的切线斜率与所给切线斜率比较可求解给定含参函数过定点的切线方程.

例 9.35 （甲 1458）设曲线 $y=ax-\ln(x+1)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=2x$，则 $a=$（ ）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

解析：∵ $y=f(x)=ax-\ln(x+1)$，∴ $f'(x)=a-\dfrac{1}{x+1}\times 1=a-\dfrac{1}{x+1}$.

又∵曲线在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=2x$ ，∴ $f'(0)=2$.

因此，$a-\dfrac{1}{0+1}=2$，解得：$a=3$. 故选 D，不选 ABC.

例 9.36 （甲 1516）已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，则 $a=$_________.

解析：∵ $y=x+\ln x$ ，∴ $y'=1+\dfrac{1}{x}$. 因此，切线的斜率为 $k=2$ ，切线方程为 $y=2x-1$.

又∵ $y=2x-1$ 与 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，∴两式联立后所得方程 $ax^2+ax+2=0$ 有两个相等的实数根. 由 $\Delta=0$ 可得：$a^2-8a=0$，解得：$a=0$ 或 $a=8$.

∵题设 $y=ax^2+(a+2)x+1$，　$a=0$ 时，$y=2x-1$ 与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 平行

∴ $a\neq 0$. 因此，$a=8$.

例 9.37 （乙 1514）已知函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线过点 $(2,7)$，则 $a=$___________.

解析：∵ $f(x)=ax^3+x+1$ ，∴ $f'(x)=3ax^2+1$，且 $f(1)=a+2$ ，$f'(1)=3a+1$.

所以，在点 $\left(1,f(1)\right)$ 处的切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$，即 $y-a-2=(3a+1)(x-1)$.

又∵题设：切线过点(2,7)，∴将点(2,7)代入上式可得：$7-a-2=(3a+1)(2-1)$，即 $5-a=3a+1$，解得：$a=1$.

例 9.38（丙 1864）曲线 $y=(ax+1)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率为 -2，则 $a=$________.

解析：∵ $y'=a\mathrm{e}^x+(ax+1)\mathrm{e}^x=(ax+a+1)\mathrm{e}^x$，　求导

∴ $y'_{x=0}=(a+1)$.　切点导数计算

又∵题设 $k=-2$，∴ $(a+1)=-2$.　利用切点的导数值等于该点切线的斜率列方程

解得：$a=-3$.

条件 8.3　给定含参函数的对称轴及两点的函数值之和

条件分析：给定分段函数解析式，往往需要根据给定的函数定义域进行分段求解.

例 9.39（乙 1512）设函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y=-x$ 对称，且 $f(-2)+f(-4)=1$，则 $a=$（　）.

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 4

解析：∵函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=2^{x+a}$ 的图像关于直线 $y=-x$ 对称，

∴ $y=f(x)$ 的图像上任意一点 (x,y) 关于直线 $y=-x$ 的对称点为 $(-y,-x)$，即 $(-y,-x)$ 在函数 $y=2^{x+a}$ 的图像上，因此，$-x=2^{-y+a}$，化简可得：$y=a-\log_2(-x)$.　求出了 $y=f(x)$ 的解析式

即 $y=f(x)$ 的解析式为 $f(x)=a-\log_2(-x)$.

又∵ $f(-2)+f(-4)=1$，　方程思想：利用题设条件列方程

∴ $a-\log_2 2+a-\log_2 4=1$，即 $2a-3=1$，解得 $a=2$. 故选 C，不选 ABD.

条件 8.4　给定含参函数的奇偶性

条件分析：利用函数的奇偶性求解.

例 9.40（乙 1563）若函数 $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 为偶函数，则 $a=$__________.

解析 1：∵题设 $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 是偶函数，∴ $f(-x)=f(x)$，

即 $(-x)\ln\left(-x+\sqrt{a+x^2}\right)=x\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$，亦即 $x\left[\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{a+x^2}\right)\right]=0$.

当 $x\neq 0$ 时，$\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{a+x^2}\right)=0$，　此处相当于：$y=\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 为奇函数

即 $\ln\left(\sqrt{a+x^2}+x\right)\left(\sqrt{a+x^2}-x\right)=0$，亦即：$\ln a=0$，解得：$a=1$.

解析 2：∵题设 $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)=x\cdot g(x)$ 为偶函数，　从题设条件出发

∴ $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{a+x^2}\right)$ 必为奇函数.　因为 $y=x$ 为奇函数

从而 $g(x)$ 在 $x=0$ 处有意义，且 $g(0)=0$.　在 x=0 处有定义的奇函数的图像过原点

由 $g(0)=0$ 可得：$\ln\sqrt{a}=0$，解得：$a=1$.

条件 8.5　给定含参函数有唯一零点

条件分析：将所给条件转化成含参函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增或单调递减，或转化成两条曲线有交点.

例 9.41（丙 1712/61）已知函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1}\right)$ 有唯一零点，则 $a=$（　）.

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

解析 1：函数 $f(x)$ 的零点满足 $x^2-2x=-a\left(e^{x-1}+e^{-x+1}\right)$.

设 $g(x)=e^{x-1}+e^{-x+1}$，则 $g'(x)=e^{x-1}-e^{-x+1}=\dfrac{e^{2(x-1)}-1}{e^{x-1}}$.

令 $g'(x)=0$，解得：$x=1$.

当 $x<1$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$g'(x)=0$，函数 $g(x)$ 单调递增.

即当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 取得最小值 $g(1)=e^0+e^0=2$.

再设 $h(x)=x^2-2x$，则当 $x=1$ 时 $h(x)=x^2-2x$，函数取得最小值 $h(1)=-1$.

若 $-a>0$，则函数 $h(x)$ 与函数 $-ag(x)$ 没有交点；

若 $-a<0$，则当 $-ag(1)=h(1)$ 时，函数 $h(x)$ 与函数 $-ag(x)$ 有一个交点.

即 $-a\times 2=-1$，解得：$a=\dfrac{1}{2}$. 故选 C，不选 ABD.

解析 2：$\because$ 题设 $f(x)=x^2-2x+a\left(e^{x-1}+e^{-x+1}\right)$，

$\therefore f(x)=(x-1)^2-1+a\left[e^{x-1}+e^{-(x-1)}\right]$，　　发现右侧包含 $(x-1)$ 整体

令 $t=x-1$，则 $x=t+1$，代入上式可得：$f(t+1)=t^2-1+a\left(e^t+e^{-t}\right)$；　　换元法

令 $t=-x$，则代入上式可得：$f(-x+1)=(-x)^2-1+a\left(e^{-x}+e^x\right)=f(x+1)$.

$\because f(1-x)=f(1+x)$，或计算 $f(2-x)$ 可得：　　直接计算 $f(2-x)$ 做法突兀，貌似“倒推”

$f(2-x)=(2-x)^2-2(2-x)+a\left[e^{2-x-1}+e^{-(2-x)+1}\right]=x^2-2x+a\left(e^{x+1}+e^{-x+1}\right)=f(x)$，

$\therefore x=1$ 是函数 $f(x)$ 图像的对称轴. 又 $\because$ 题设函数 $f(x)=x^2-2x+a\left(e^{x-1}+e^{-x+1}\right)$ 有唯一零点，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的零点只能在对称轴上，即 $x=1$，$f(1)=0$. 由 $f(1)=0$ 可得：$1^2-2\times1+a\left(e^{1-1}+e^{-1+1}\right)=0$，

解得：$a=\dfrac{1}{2}$. 故选 C，不选 ABD.

> **经验总结**：函数的零点用于求解参数范围时，若零点方程可解，则通过解零点方程直接求出参数范围；若零点方程不易解或不可解，则将零点方程转化为函数不等式，其中含有参数的部分在左边，其他部分在右边，然后再分别构造左右两侧的新函数，根据这两个函数图像的关系，利用参数的几何意义求解参数范围. 这样可使条件和问题变得更加直观、简单，这就体现了数形结合的数学思想.

问题 9　含参函数的参数范围求解问题

问题分析：含参函数的参数范围求解问题，是指类似 $y=f(x,a)$ 的函数在特定条件下参数 a 的取值范围求解问题，因此从某种角度来理解这是一个关于 x，a 的二元函数问题.

条件 9.1　给定含参函数的单调区间

条件分析：将所给条件转化成含参函数的导函数不等式.

例 9.42　（甲 1411）若函数 $f(x)=kx-\ln x$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 k 的取值范围是（　）.

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,-1]$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

解析 1：（解析法）

$\because f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f'(x)\geqslant 0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立；

又$\because f(x)=kx-\ln x$，$\therefore f'(x)=k-\dfrac{1}{x}$.

由$f'(x)\geqslant 0$可得：$k-\dfrac{1}{x}\geqslant 0$，即$k\geqslant\dfrac{1}{x}$．又$\because x\in(1,+\infty)$，$\therefore \dfrac{1}{x}<1$．因此，$k\geqslant 1>\dfrac{1}{x}$.

故选 D，不选 ABC.

解析 2：（特殊值排除法）

$\because f(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，$\therefore f'(x)\geqslant 0$在$(1,+\infty)$上恒成立.

取$k=-2$，则$f'(x)=-2-\dfrac{1}{x}<0(x>1)$，不符合$f'(x)\geqslant 0$，故排除 A，从而排除 B；

取$k=1$，则$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0(x>1)$，符合$f'(x)\geqslant 0$，故选 D.

例 9.43（乙 1612）若函数$f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，则$a$的取值范围是（　）.

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-1,\dfrac{1}{3}\right]$　　C. $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]$

解析 1：$\because f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$，$\therefore f'(x)=1-\dfrac{1}{3}\cos 2x\cdot 2+a\cos x=1-\dfrac{2}{3}(2\cos^2 x-1)+a\cos x$.

令$t=\cos x$，则$f'(t)=-\dfrac{4}{3}t^2+at+\dfrac{5}{3}$，$\because$函数$f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，

$\therefore f'(t)\geqslant 0$.

将$f'(t)=-\dfrac{4}{3}t^2+at+\dfrac{5}{3}$看成是开口向下的抛物线，由$\begin{cases}f'(-1)\geqslant 0\\ f'(1)\geqslant 0\end{cases}$解得：$-\dfrac{1}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{3}$.

故选 C，不选 ABD.

解析 2：（特殊值法）在数轴上标出四个选项的区间如图 9.8 所示.

可取$a=-\dfrac{2}{3}\in\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$或$a=0\in\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$即可排除部分选项.

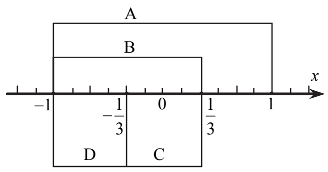


图 9.8

本题当取$a=-\dfrac{2}{3}$时，$\because f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x-\dfrac{2}{3}\sin x$，

$\therefore f'(x)=1-\dfrac{1}{3}\cos 2x\cdot 2+a\cos x=1-\dfrac{2}{3}(2\cos^2 x-1)-\dfrac{2}{3}\cos x$.

令$t=\cos x$，则$-1\leqslant t\leqslant 1$，且$f'(x)=-\dfrac{1}{3}(4t^2+2t+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4})+\dfrac{5}{3}=-\dfrac{1}{3}(2t+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{7}{4}$.

$\because -1\leqslant t\leqslant 1$，$\therefore$当$t=-\dfrac{1}{4}$时，$f'_{\max}(x)=f'\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{4}$，而$f'(1)=-\dfrac{1}{3}\left(2+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}=-\dfrac{25}{12}+\dfrac{21}{12}=-\dfrac{4}{12}=$
$-\dfrac{1}{3}<0$.

因此，不满足函数$f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，故排除 ABD，选 C.

若先取$a=0$，则$f(x)=x-\dfrac{1}{3}\sin 2x$，$f'(x)=1-\dfrac{2}{3}\cos 2x>0$，符合函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，先排除 D．还需要再取$a=-\dfrac{2}{3}\in\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$来排除 A 和 B．　故排除 ABD，选 C.

条件 9.2　给定含参函数不等式成立的条件

条件分析：利用含参函数不等式成立的条件进行求解.

例 9.44　（甲 1312）若存在正数x使$2^x(x-a)<1$成立，则a的取值范围是（　）.

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(-2,+\infty)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

解析：因为 $2^x>0$，所以由 $2^x(x-a)<1$ 可得：$x-a<\dfrac{1}{2^x}=2^{-x}$，在平面直角坐标系中，作出函数 $f(x)=x-a$ 和 $g(x)=2^{-x}$ 的图像，如图 9.9 所示.

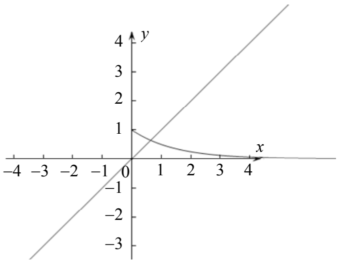


图 9.9

$\because$ 当 $x>0$ 时，$g(x)=2^{-x}<1$，$\therefore$ 如果存在 $x>0$，使 $f(x)<g(x)$，即 $x-a<\dfrac{1}{2^x}=2^{-x}$，则直线 $f(x)=x-a$ 的截距 $-a$ 必须满足：$-a<1$．即 $a>-1$．故选 D，不选 ABC.

例 9.45 （乙 1562）设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是（　）.

A. $\left[-\dfrac{3}{2e},1\right)$　　B. $\left[-\dfrac{3}{2e},\dfrac{3}{4}\right)$　　C. $\left[\dfrac{3}{2e},\dfrac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\dfrac{3}{2e},1\right)$

解析 1：（数形结合法） $\because f(x)=e^x(2x-1)-ax+a=e^x(2x-1)-a(x-1)$，

$\therefore$ 设 $g(x)=e^x(2x-1)$，$h(x)=a(x-1)$，则 $f(x)=g(x)-h(x)$，

由 $f(x_0)<0$ 可得：$g(x_0)<h(x_0)$，即函数 $g(x)=e^x(2x-1)$ 在直线 $h(x)=a(x-1)$ 下方，如图 9.10 所示.

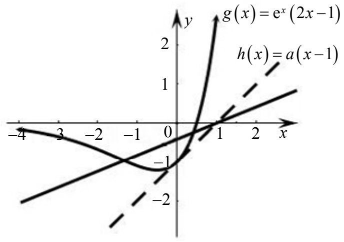


图 9.10

$\because g'(x)=e^x(2x+1)$，

$\therefore$ 当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>-\dfrac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$．所以，当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$g_{\min}(x)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$.

$\because$ 直线 $h(x)=a(x-1)$ 过 $(1,0)$ 点，且函数 $g(x)$ 在 $x=-\dfrac{1}{2}$ 处取得最小值，

$\therefore x_0\in\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$．又 $\because$ 存在唯一整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，$\therefore x_0=0$．（注意：“存在唯一的整数”，不是“唯一存在整数”，“存在唯一的整数”不排除存在其他“小数”.）为确保“存在唯一的整数”，必须保证直线不能过 $(-1,g(-1))$ 点．$\because g(-1)=-\dfrac{3}{e}$，$\therefore a\geqslant\dfrac{-\dfrac{3}{e}-0}{-1-1}=\dfrac{3}{2e}$.

又 $\because$ 题设 $a<1$，$\therefore a$ 的取值范围是 $\dfrac{3}{2e}\leqslant a<1$，故选 D，不选 ABC.

解析 2：（特殊值法） $\because f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，$\therefore f(-1)=e^{-1}(-2-1)+a+a=-\dfrac{3}{e}+2a$，

$f(0)=e^0(0-1)+a=a-1$，$f(1)=e^1(2-1)-a+a=e$，

又 $\because f(1)=e>0$，$f(0)=a-1<0$（题设 $a<1$），$f(-1)=-\dfrac{3}{e}+2a$，

$\therefore$ 存在唯一的整数 $x_0=0$，使得 $f(x_0)<0$，故 $f(-1)=-\dfrac{3}{e}+2a\geqslant0$，解得：$a\geqslant\dfrac{3}{2e}$.

结合题设 $a<1$，可得：a 的取值范围是 $\dfrac{3}{2e}\leqslant a<1$，即 $\left[\dfrac{3}{2e},1\right)$．故选 D，不选 ABC.

解析 3：（排除法） 如图 9.11 所示，将 A，B，C，D 四个选项对应的范围标注在数轴上.

对照图 9.11 可以“找到”用于排除的特殊值.（注意：关键在于先确定几个选项的“交集”，再确定剩余选项的“非交集”.）

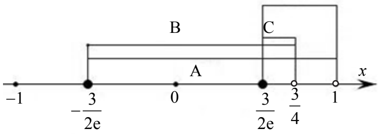


图 9.11

∵A，B 选项都包含 0，∴取 $a=0$ 代入 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$ 可得：$f(x)=e^x(2x-1)$，∵ $e^x>0$，∴当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=e^x(2x-1)<0$，这与“存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$”相矛盾，故 $a\neq 0$，即排除 A，B 选项；

又∵C，D 选项的“非交集”，即“差集”，为 $\left[\frac{3}{4},1\right)$，∴任取 $a=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ 或 $a=\frac{7}{8}\in\left[\frac{3}{4},1\right)$，即可排除 C 或 D.

当 $a=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ 时，∵ $f(x)=e^x(2x-1)-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$，

∴ $f'(x)=e^x(2x+1)-\frac{3}{4}$ 为增函数，且 $f'(-1)=-\frac{1}{e}-\frac{3}{4}<0$，$f'(0)=\frac{1}{4}>0$，

即存在 $x=t\in(-1,0)$ 使得 $f'(t)=0$．即当 $x\in(-\infty,t)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(t,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$．

又∵ $f(-1)=-\frac{3}{e}+\frac{3}{2}>0$，$f(0)=-\frac{1}{4}<0$，$f(1)=e>0$，∴存在唯一的整数 $x_0=0$，使得 $f(x_0)<0$，即 $a=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$ 符合题意．故选 D，不选 ABC．取 $a=\frac{7}{8}$ 亦可得到同样的结论．

条件 9.3 给定含参函数存在唯一零点

条件分析：利用含参函数零点进行求解．

例 9.46（乙 1412/61）已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是（ ）． 两题题干一致，只是选项调序，并作一题研究

A．$(2,+\infty)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,-2)$　　D．$(-\infty,-1)$

解析 1：∵ $f(x)=ax^3-3x^2+1$，当 $a=0$ 时，$f(x)=-3x^2+1$，该函数有两个零点，不符合题意，

∴ $a\neq 0$，且 $f'(x)=3ax^2-6x$，∵题设 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增或单调递减；为研究 $f(x)$ 的单调性，需判断 $f'(x)$ 的正负，为此令 $f'(x)=0$，解得：$x=0$ 或 $x=\frac{2}{a}$．

若将 $f'(x)=3ax^2-6x$ 视为抛物线，则当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(0,\frac{2}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{2}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$．

∵ $f(0)=1>0$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，∴零点 $x_0\in(-\infty,0)$ 不符合题意（$x_0>0$）．

当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，当 $x\in\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{2}{a},0\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$．要使 $f(x)$ 有唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，只需 $f\left(\frac{2}{a}\right)>0$（以保证 $f(0)>0$），即 $a^2>4$，解得：$a<-2$．故选 C，不选 ABD．

解析 2：∵ $f(x)=ax^3-3x^2+1$，当 $a=0$ 时，$f(x)=-3x^2+1$，该函数有两个零点，不符合题意，

∴ $a\neq 0$，令 $f(x)=0$，可得：$ax^3-3x^2+1=0$，即 $ax^3=3x^2-1$．

∵ $f(0)=1\neq 0$，∴ $x=0$ 不是 $f(x)$ 的零点，所以两边除以 x^3 可得：$a=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$，令 $t=\frac{1}{x}$，则 $a=3t-t^3$．

问题转化为 $a=-t^3+3t$ 有唯一的正根．令 $g(t)=a$，$h(t)=-t^3+3t$，则问题转化为两曲线有唯一交点，且交点在 y 轴右侧．

∵ $h'(t)=-3t^2+3$，∴令 $h'(t)=0$ 解得：$t=\pm 1$．

∵ $h'(t)=-3t^2+3$ 是开口向下的抛物线，∴当 $t\in(-\infty,-1)$ 时，$h'(t)<0$；

当 $t\in(-1,1)$ 时，$h'(t)>0$；当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$h'(t)<0$．

又∵ $h(-1)=-2<0$，$h(0)=0$，$h(1)=2>0$，∴如图 9.12 所示，要使唯一交点在 y 轴右侧，只需 $a<h(-1)=-2$．故选 C，不选 ABD．

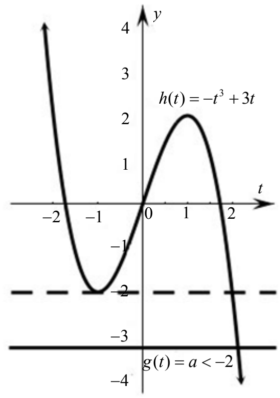


图 9.12

解析 3：∵ $f(x)=ax^3-3x^2+1$，

当 $a=0$ 时，$f(x)=-3x^2+1$，该函数有两个零点，不符合题意，∴ $a\neq 0$．

∵ $f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $x_0>0$，∴令 $f(x)=0$ 可得：$a=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$．即 $a=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$ 有唯一的正根．令 $t=\dfrac{1}{x}$，则问题转化为 $a=-t^3+3t$ 有唯一的正根．即 $y=a$ 与 $y=-t^3+3t$ 有唯一的交点且交点在 y 轴右侧．

记 $g(t)=-t^3+3t$，则 $g'(t)=-3t^2+3$，解 $g'(t)=0$ 可得：$t=\pm 1$．

∵ $g'(t)=-3t^2+3$ 是开口向下的抛物线，∴当 $t\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，函数 $g(t)$ 递减；当 $t\in(-1,1)$ 时，函数 $g(t)$ 递增．要使 $a=-t^3+3t$ 有唯一的正根，只需 $a<f(-1)=-2$．

故选 C，不选 ABD．

例 9.47　（乙 1859）已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$，$g(x)=f(x)+x+a$，若 $g(x)$ 存在两个零点，则 a 的取值范围是（　）．

A．$[-1,0)$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$[-1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

分析：∵题设 $g(x)=f(x)+x+a$ 存在两个零点，

∴ $g(x)=0$ 有两个不同的实根，即 $f(x)+x+a=0$ 有两个不同的实根．依据对 $f(x)+x+a=0$ 作不同的变形可以有不同的解析．

解析：将 $f(x)+x+a=0$ 化为 $f(x)=-x-a$，想象成 $y_1=f(x)$ 与 $y_2=-x-a$ 有两个不同的交点．

∵题设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$，

∴可以在平面直角坐标系中大致绘制其图像如图 9.13 所示．

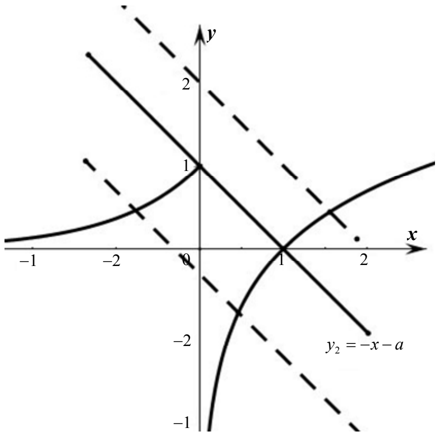


图 9.13

左半部分是指数函数，右半部分是对数函数

又∵ $y_2=-x-a$ 是斜率为“-1”的直线簇，其中“$-a$”为纵截距．由图可见：满足两曲线有两个交点的条件是纵截距不超过 1（因为 y_1 在 $x=0$ 处有定义），即 $-a\leqslant 1$，解得：$a\geqslant -1$．故选 C，不选 ABD．

第 10 题 线性规划背景

10

背景知识

线性约束条件

一般地，二元一次不等式 $Ax+By+C\geqslant 0(AB\neq 0)$ 可以化为 $\dfrac{A}{B}x+y+\dfrac{C}{B}\geqslant 0$ 或 $\dfrac{A}{B}x+y+\dfrac{C}{B}\leqslant 0$，即 $y\geqslant -\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$ 或 $y\leqslant -\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$．它表示在平面直角坐标系中直线 $Ax+By+C=0$ 上方或下方的半幅平面区域．（带有"="表示包含直线）

由不等式组所表示的平面区域是组成不等式组的几个不等式所表示区域的公共部分．

这种由多个含有 x，y 的一次不等式组成的不等式组称为线性约束条件．满足线性约束条件的解 (x,y) 称为可行解，所有可行解组成的集合称为可行域，使目标函数取得最大值或最小值的可行解称为最优解．

在线性约束条件下求目标函数的最大值或最小值问题称为线性规划问题．

在非线性约束条件下求目标函数的最大值或最小值问题称为非线性规划问题．

问题 1 线性目标函数的最值计算

问题分析：求线性目标函数 $z=ax+by(ab\neq 0)$ 的最值问题，可以将线性目标函数化为 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{z}{b}$，由此可见：$\dfrac{z}{b}$ 是斜率为 $-\dfrac{a}{b}$ 的直线簇的纵截距．当 $b>0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上的截距最大时，z 最大，在 y 轴上的截距最小时，z 最小；当 $b<0$ 时，直线过可行域且在 y 轴上的截距最大时，z 最小，在 y 轴上的截距最小时，z 最大．

线性目标函数最值的计算步骤：①将线性约束条件中一次不等式 y 的系数化为正数；②作出一次不等式对应的直线，按照大于在上方，小于在下方确定不等式区域（及边界）；③作出目标函数直线簇中的一条直线；④根据所求目标函数的最值，利用数形结合法确定目标函数直线簇所经过可行域的端点；⑤解相应两条直线方程构成的方程组，求出端点坐标；⑥将端点坐标代入线性目标函数表达式，求出目标函数最值．

条件 1.1 线性目标函数与直线"正"截距成正比

条件分析：将线性目标函数转化成 $y=kx+b$ 的形式后，有 $b=mz(m>0)$，即 $z=\dfrac{1}{m}b$．由此可见：目标函数 z 的最值与截距 b 的最值是一致的（$m>0$）．

例 10.1（乙 1707）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+3y\leqslant 3\\x-y\geqslant 1\\y\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为（　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

解析：第 1 步，如图 10.1 所示，画线性约束区域．将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：

$\begin{cases}x+3y\leqslant 3\\-x+y\leqslant -1\\y\geqslant 0\end{cases}$，由此可见，线性约束区域在直线 $x+3y=3$ 与 $-x+y=-1$ 的下方（$\leqslant$）及 x 轴的上方（$y\geqslant 0$）.

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=x+y$ 可以化为 $y=-x+z$，由此可见，目标函数 z 是直线的纵截距，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-x+z$，为了求目标函数的最大值，必须移动线性目标函数 $y=-x+z$ 通过点 A，此时，直线的纵截距最大，即目标函数达到最大.

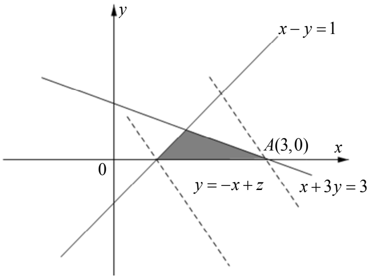


图 10.1

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}x+3y=3\\y=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$，即点 $A(3,0)$.

将点 A 的坐标 $\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$ 代入线性目标函数 $z=x+y$ 可得：$z_{\max}=3+0=3$，故选 D，不选 ABC.

例 10.2（乙 1515）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\x-2y+1\leqslant 0\\2x-y+2\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=3x+y$ 的最大值为______.

解析：第 1 步，如图 10.2 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\-x+2y-1\geqslant 0\\-2x+y-2\leqslant 0\end{cases}$，

由此可见：线性约束区域在直线 $x+y-2=0$ 与 $-2x+y-2=0$ 的下方（$\leqslant$）及直线 $-x+2y-1=0$ 的上方（$\geqslant$）.

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=3x+y$ 可以化为 $y=-3x+z$，由此可见：目标函数 z 是直线的纵截距，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-3x+z$，为了求目标函数的最大值，必须移动线性目标函数 $y=-3x+z$ 通过点 C，此时，直线的纵截距最大，即目标函数达到最大.

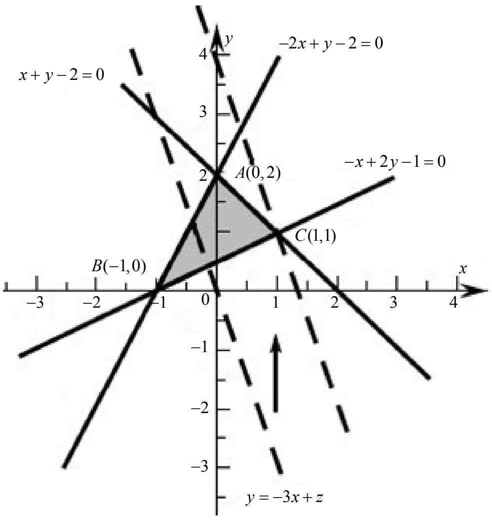


图 10.2

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}x+y-2=0\\-x+2y-1=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，即点 $C(1,1)$.

将点 C 的坐标 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 代入线性目标函数 $z=3x+y$ 可得：$z_{\max}=3+1=4$.

例 10.3（甲 1707/55）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\2x-3y+3\geqslant 0\\y+3\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值是（　）.

A．-15　　B．-9　　C．1　　D．9

解析：第 1 步，如图 10.3 所示，画线性约束区域．将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}2x+3y-3\leqslant 0\\-2x+3y-3\leqslant 0\\y+3\geqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $2x+3y-3=0$ 与 $-2x+3y-3=0$ 的下方（$\leqslant$）及直线 $y+3=0$ 的上方（$\geqslant$）.

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=2x+y$ 可以化为 $y=-2x+z$，由此可见：目标函数 z 是直线的纵截距，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-2x+z$，为了求目标函数

的最小值，必须移动线性目标函数 $y=-2x+z$ 通过点 B，此时，直线的纵截距最小，即目标函数达到最小.

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}2x-3y+3=0\\y+3=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=-6\\y=-3\end{cases}$，即点 $B(-6,-3)$，将点 B 的坐标 $\begin{cases}x=-6\\y=-3\end{cases}$ 代入线性目标函数 $z=2x+y$ 可得：$z_{\min}=2\times(-6)+(-3)=-15$.

故选 A，不选 BCD.

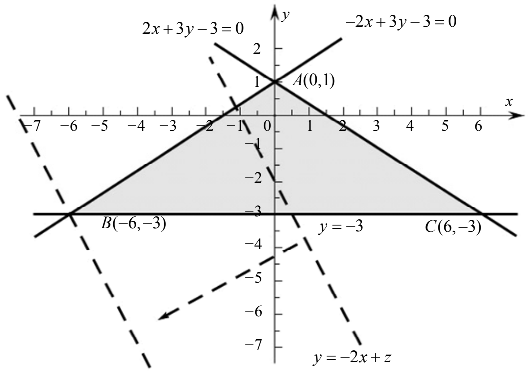


图 10.3

例 10.4 （甲 1514）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-5\leqslant 0\\2x-y-1\geqslant 0\\x-2y+1\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最大值为_________.

解析：第 1 步，如图 10.4 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}x+y-5\leqslant 0\\-2x+y+1\leqslant 0\\-x+2y-1\geqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $x+y-5=0$ 与 $-2x+y+1=0$ 的下方（$\leqslant$）及直线 $-x+2y-1=0$ 的上方（$\geqslant$）.

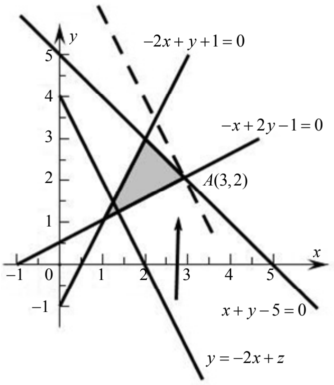


图 10.4

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=2x+y$ 可以化为 $y=-2x+z$，由此可见：目标函数 z 是直线的纵截距，在已经画好的线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-2x+z$，为了求目标函数的最大值，必须移动线性目标函数 $y=-2x+z$ 通过点 A，此时，直线的纵截距最大，即目标函数达到最大.

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}x+y-5=0\\-x+2y-1=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$，即点 $A(3,2)$．将点 A 的坐标 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ 代入线性目标函数 $z=2x+y$ 可得：$z_{\max}=2\times 3+2=8$.

例 10.5 （甲 1564）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x-2y\leqslant 0\\x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为____________.

解析：第 1 步，如图 10.5 所示，画线性约束区域．将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}-x+y-1\leqslant 0\\-x+2y\geqslant 0\\x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $-x+y-1=0$ 与 $x+2y-2=0$ 的下方（$\leqslant$）及直线 $-x+2y=0$ 的上方（$\geqslant$）.

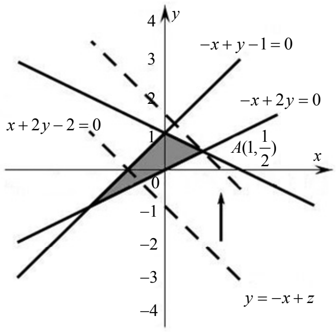


图 10.5

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=x+y$ 可以化为 $y=-x+z$，由此可见：目标函数 z 是直线的纵截距，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-x+z$，为了求目标函数的最大值，必须移动线性目标函数 $y=-x+z$ 通过点 A，此时，直线的纵截距最大，即目标函数达到最大.

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}-x+2y=0\\x+2y-2=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，即点 $A\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$．将点 A 的坐标 $\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 代入

线性目标函数 $z=x+y$ 可得：$z_{\max}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

例 10.6（甲 1409）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-1\geqslant 0\\x-y-1\leqslant 0\\x-3y+3\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+2y$ 的最大值为（　）.

A．8　　B．7　　C．2　　D．1

解析：第 1 步，如图 10.6 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}x+y-1\geqslant 0\\-x+y+1\geqslant 0\\-x+3y-3\leqslant 0\end{cases}$，

由此可见：线性约束区域在直线 $x+y-1=0$ 与 $-x+y+1=0$ 的上方（$\geqslant$）及直线 $-x+3y-3=0$ 的下方（$\leqslant$）.

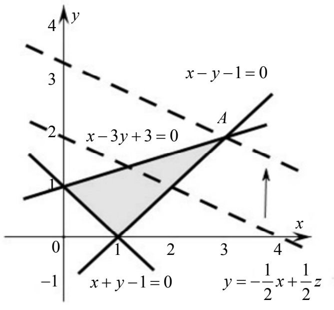


图 10.6

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=x+2y$ 可以化为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，由此可见：目标函数 $\frac{1}{2}z$ 是直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 的纵截距，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，为了求目标函数的最大值，必须移动线性目标函数 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 通过点 A，此时，直线的纵截距最大，即目标函数也达到最大.

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}-x+y+1=0\\-x+3y-3=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$，即点 $A(3,2)$.

将点 A 的坐标 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ 代入线性目标函数 $z=x+2y$ 可得：$z_{\max}=3+2\times 2=7$．故选 B，不选 ACD.

例 10.7（丙 1613）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y+1\geqslant 0\\x-2y-1\leqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$，则 $z=2x+3y-5$ 的最小值为______.

解析：第 1 步，如图 10.7 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}-2x+y-1\leqslant 0\\-x+2y+1\geqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $-2x+y-1=0$ 的下方（$\leqslant$），直线 $-x+2y+1=0$ 的上方（$\geqslant$）和 $x=1$ 的左侧（$\leqslant$）.

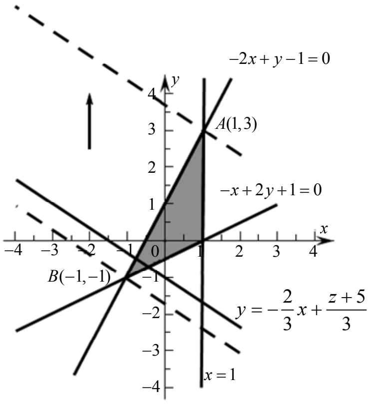


图 10.7

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=2x+3y-5$ 可以化为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z+5}{3}$．令直线的纵截距 $b=\frac{z+5}{3}$，则 $z=3b-5$．显然，目标函数值 z 与截距 b 成正比，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z+5}{3}$．为了求目标函数的最小值，必须移动线性目标函数 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z+5}{3}$ 通过点 B，此时，直线的纵截距最小，即目标函数达到最小.

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}-x+2y+1=0\\-2x+y-1=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$，即点 $B(-1,-1)$，将点 B 的坐标 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$ 代入线性目标函数 $z=2x+3y-5$ 可得：$z_{\min}=2\times(-1)+3\times(-1)-5=-10$.

例 10.8 （丙 1663）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x-2y\leqslant 0\\x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为________.

解析：第 1 步，如图 10.8 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}-x+y-1\leqslant 0\\-x+2y\geqslant 0\\x+2y-2\leqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $-x+y-1=0$ 与 $x+2y-2=0$ 的下方（≤）及直线 $-x+2y=0$ 的上方（≥）.

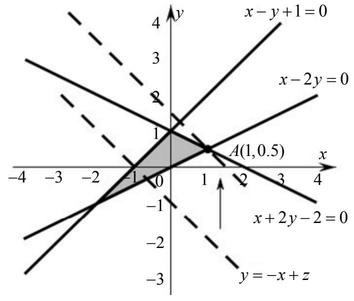


图 10.8

第 2 步，确定目标函数最值点. 由于线性目标函数 $z=x+y$ 可以化为 $y=-x+z$. 由此可见：目标函数 z 是直线 $y=-x+z$ 的纵截距，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-x+z$，为了求目标函数的最大值，必须移动线性目标函数 $y=-x+z$ 通过点 A，此时，直线的纵截距最大，即目标函数也达到最大.

第 3 步，求目标函数最值. 解 $\begin{cases}x+2y-2=0\\x-2y=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=1\\y=0.5\end{cases}$，即点 $A(1,0.5)$.

将点 A 的坐标 $\begin{cases}x=1\\y=0.5\end{cases}$ 代入线性目标函数 $z=x+y$ 可得：$z_{\max}=x+y=1+0.5=1.5=\dfrac{3}{2}$.

经验总结：求目标函数最值的关键在于弄清目标函数的几何意义，以便迅速确定目标函数的最值点，并通过一次性解方程组求得方程组的解，最终直接代入目标函数解析式求出目标函数的最值.

例 10.9 （乙 1814/63）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant 0\\x-y+1\geqslant 0\\y\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最大值为________.

解析：第 1 步，画出约束条件可行域，如图 10.9 所示.

将约束条件按照“y 的系数为正”的原则修改为 $\begin{cases}-x+2y+2\geqslant 0\\-x+y-1\leqslant 0\\y\leqslant 0\end{cases}$，则可行域在 $-x+2y+2=0$ 的上方（≥），在 $-x+y-1=0$ 的下方（≤），在 $y=0$ 即 x 轴的下方（≤）.

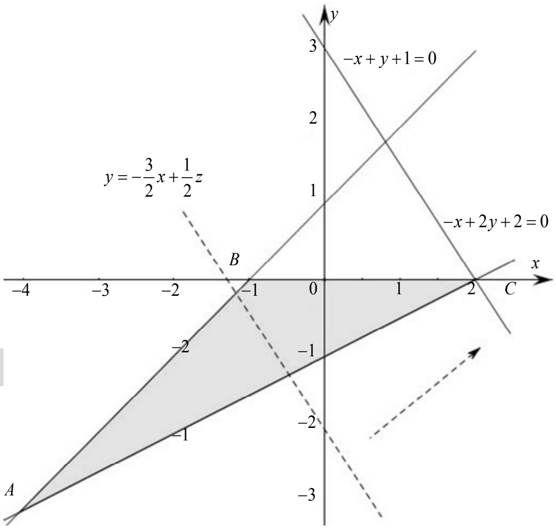


图 10.9

第 2 步，确定目标函数的意义.

将目标函数 $z=3x+2y$ 化为 $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}z$.

将二元一次目标函数化为二元变量的直线方程：转换主元思想

将“$\dfrac{1}{2}z$”想象为直线簇：$y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}z$ 的纵截距.

第 3 步：计算目标函数的最值.

∵目的是求目标函数的最大值，∴必须使得直线簇中的一条直线的纵截距达到最大.

由图可见：当直线过点 C 时，纵截距最大. 且∵ $y_C=0$，∴代入 $-x+2y+2=0$ 可得：$x_C=2$.

因此，将 $x_C=2$，$y_C=0$ 代入 $z=3x+2y$ 可得：$z_{\max}=3\times 2+2\times 0=6$.

例 10.10　（甲 1814/64）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0\\x-2y+3\geqslant 0\\x-5\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+y$ 的最大值为__________.

解析：将约束条件按照“y 的系数为正”的原则改写为 $\begin{cases}x+2y-5\geqslant 0\\-x+2y-3\leqslant 0\\x-5\leqslant 0\end{cases}$，画约束条件可行域如图 10.10 所示.

将目标函数 $z=x+y$ 改写为 $y=-x+z$.

由此可见：目标函数值 z 是直线簇 $y=-x+z$ 的纵截距.

当直线向上平移到过点 A 时，直线的纵截距最大.

解 $\begin{cases}x-2y+3=0\\x=5\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$，即 $A(5,4)$. 将 A 点坐标代入 $z=x+y$ 可得：$z_{\max}=5+4=9$.

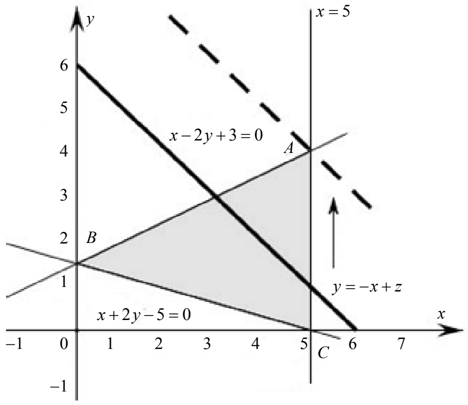


图 10.10

例 10.11　（丙 1815）若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y+3\geqslant 0\\x-2y+4\geqslant 0\\x-2\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+\dfrac{1}{3}y$ 的最大值是________.

解析：将约束条件按照“y 的系数为正”的原则转化为 $\begin{cases}2x+y+3\geqslant 0\\-x+2y-4\leqslant 0\\x-2\leqslant 0\end{cases}$，画约束条件可行域如图 10.11 所示，则可行域在 $2x+y+3=0$ 的上方，在 $-x+2y-4=0$ 的下方，在 $x-2=0$ 的左侧.

将目标函数 $z=x+\dfrac{1}{3}y$ 化为 $y=-3x+3z$ 可见：$3z$ 是直线簇 $y=-3x+b$ 的纵截距. 因此，当纵截距最大时，目标函数值最大.

将 $x=2$ 代入 $-x+2y-4=0$ 可得：$y=3$. 即直线 $y=-3x+3z$ 过点 $(2,3)$ 时，纵截距最大，因此，将 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 代入 $z=x+\dfrac{1}{3}y$ 可得：$z_{\max}=2+\dfrac{1}{3}\times 3=3$.

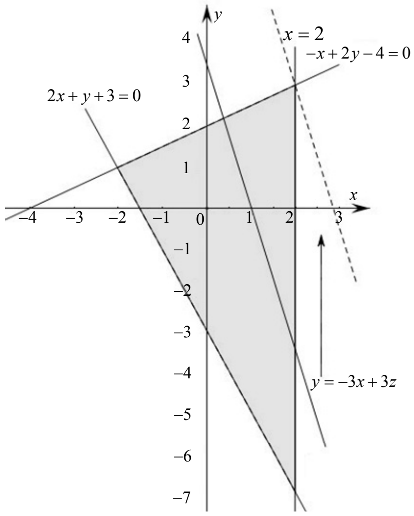


图 10.11

条件 1.2　线性目标函数与直线“负”截距成正比

条件分析：将线性目标函数转化成 $y=kx+b$ 的形式后，有 $b=nz(n<0)$，即 $z=\dfrac{1}{n}b(n<0)$. 由此可见：目标函数 z 的最值与纵截距 b 的最值是相反的（$n<0$）.

例 10.12　（乙 1764）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\leqslant 1\\2x+y\geqslant -1\\x-y\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=3x-2y$ 的最小值为______.

解析：第 1 步，如图 10.12 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}x+2y-1\leqslant 0\\2x+y+1\geqslant 0\\-x+y\geqslant 0\end{cases}$.

由此可见：线性约束区域在直线 $2x+y+1=0$ 和 $-x+y=0$ 的上方（≥），直线 $x+2y-1=0$ 的下方（≤）.

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=3x-2y$ 可以化为 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z$，令直线的纵截距 $b=-\frac{1}{2}z$，则 $z=-2b$．显然，目标函数值 z 与纵截距 b 成反比，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z$，为了求目标函数的最大值，必须移动线性目标函数 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z$ 通过点 A，此时，直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z$ 的纵截距最大，即目标函数达到最小.

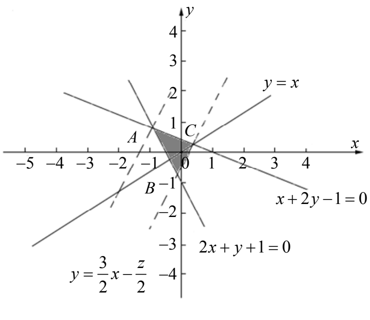


图 10.12

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}x+2y=1\\2x+y=-1\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，即点 $A(-1,1)$，将点 A 的坐标代入线性目标函数 $z=3x-2y$ 可得：$z_{\min}=3\times(-1)-2\times1=-5$．

例 10.13 （乙 1314）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3\\-1\leqslant x-y\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最大值为______.

解析：第 1 步，如图 10.13 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3\\-x+y-1\leqslant 0\\-x+y\geqslant 0\end{cases}$．由此可见：线性约束区域在直线 $-x+y=0$ 的上方（≥），直线 $-x+y-1=0$ 的下方（≤），以及直线 $x=1$ 和 $x=3$ 之间.

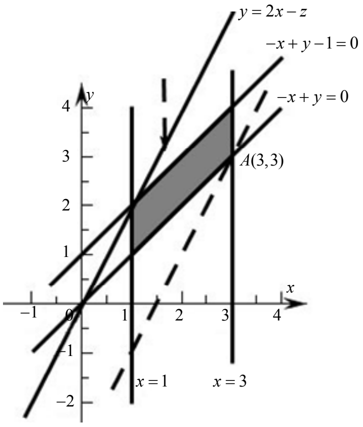


图 10.13

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=2x-y$ 可以化为 $y=2x-z$，显然 $b=-z$，即目标函数值 z 与纵截距 b 成反比，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=2x-z$，为了求目标函数的最大值，必须移动线性目标函数 $y=2x-z$ 通过点 A，此时，直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}z$ 的纵截距最小，即目标函数达到最大.

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}-x+y=0\\x=3\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$，即点 $A(3,3)$，将点 A 的坐标代入线性目标函数 $z=2x-y$ 可得：$z_{\max}=2\times3-3=3$．

例 10.14 （甲 1614）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x+y-3\geqslant 0\\x-3\leqslant 0\end{cases}$，则 $z=x-2y$ 的最小值为__________.

解析：第 1 步，如图 10.14 所示，画线性约束区域．将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}-x+y-1\leqslant 0\\x+y-3\geqslant 0\\x-3\leqslant 0\end{cases}$．由此可见：线性约束区域在直线 $-x+y-1=0$ 的下方（≤），直线 $x+y-3=0$ 的上方（≥）和直线 $x=3$ 的左侧（≤）.

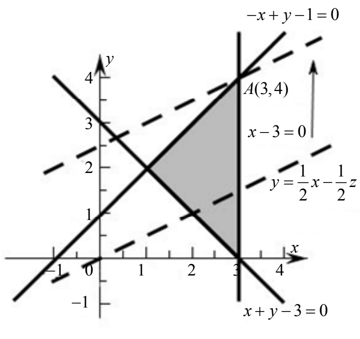


图 10.14

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=x-2y$ 可以化

为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$，令直线的纵截距 $b=-\frac{1}{2}z$，则 $z=-2b$．显然，目标函数值 z 与纵截距 b 成反比，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$，为了求目标函数的最小值，必须移动线性目标函数 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$ 通过点 A，此时，直线的纵截距最大，即目标函数达到最小.

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}-x+y-1=0\\x=3\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$，即点 $A(3,4)$．将点 A 的坐标代入线性目标函数 $z=x-2y$ 可得：$z_{\min}=3-2\times4=-5$．

例 10.15（甲 1459）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-7\leqslant0\\x-3y+1\leqslant0\\3x-y-5\geqslant0\end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最大值为（　）.

A．10　　　B．8　　　C．3　　　D．2

解析：第 1 步，如图 10.15 所示，画线性约束区域．将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}x+y-7\leqslant0\\-x+3y-1\geqslant0\\-3x+y+5\leqslant0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $x+y-7=0$ 和直线 $-3x+y+5=0$ 的下方（≤），以及直线 $-x+3y-1=0$ 的上方（≥）.

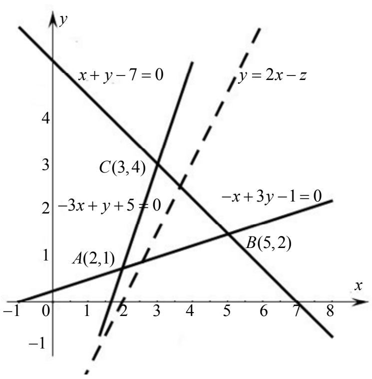


图 10.15

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=2x-y$ 可以化为 $y=2x-z$，显然 $b=-z$，即目标函数值 z 与纵截距 b 成反比，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=2x-z$，为了求目标函数的最大值，必须移动线性目标函数 $y=2x-z$ 通过点 B，此时，直线 $y=2x-z$ 的纵截距最小，即目标函数达到最大.

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}x+y-7=0\\-x+3y-1=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$，即点 $B(5,2)$，将点 B 的坐标 $\begin{cases}x=5\\y=2\end{cases}$ 代入线性目标函数 $z=2x-y$ 可得：$z_{\max}=2\times5-2=8$．故选 B，不选 ACD.

例 10.16（甲 1303）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant0\\x+y-1\geqslant0\\x\leqslant3\end{cases}$，则 $z=2x-3y$ 的最小值是（　）.

A．−7　　　B．−6　　　C．−5　　　D．−3

解析：第 1 步，如图 10.16 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}-x+y-1\leqslant0\\x+y-1\geqslant0\\x\leqslant3\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $-x+y-1=0$ 的下方（≤），直线 $x+y-1=0$ 的上方（≥）和直线 $x=3$ 的左侧（≤）.

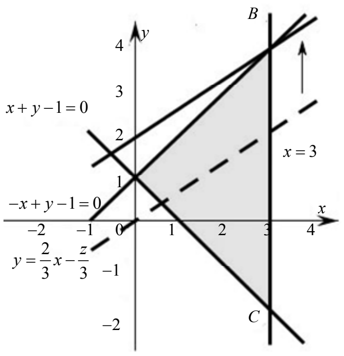


图 10.16

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=2x-3y$ 可以化为 $y=\frac{2}{3}x-\frac{z}{3}$，令直线的纵截距 $b=-\frac{1}{3}z$，则 $z=-3b$．显然，目标函数值 z 与纵截距 b 成反比，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=\frac{2}{3}x-\frac{z}{3}$，为了求目标函数的最小值，必须移动线性目标函数

$y=\frac{2}{3}x-\frac{z}{3}$通过点 B，此时，直线的纵截距最大，即目标函数达到最小.

第 3 步，求目标函数最值. 解$\begin{cases}-x+y-1=0\\x=3\end{cases}$可得：$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$，即点 $B(3,4)$，将点 B 的坐标代入线性目标函数 $z=2x-3y$ 可得：$z_{\min}=2\times3-3\times4=-6$． 故选 B，不选 ACD.

例 10.17 （丙 1763）若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant0\\x+y-2\leqslant0\\y\geqslant0\end{cases}$，则 $z=3x-4y$ 的最小值为__________.

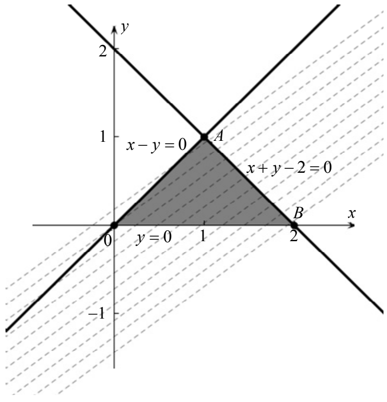


图 10.17

解析：第 1 步，如图 10.17 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}-x+y\leqslant0\\x+y-2\leqslant0\\y\geqslant0\end{cases}$. 由此可见：线性约束区域在直线$-x+y=0$和直线$x+y-2=0$的下方（≤），直线 $y=0$ （即 x 轴）的上方（≥）.

第 2 步，确定目标函数最值点. 由于线性目标函数 $z=3x-4y$ 可以化为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}z$，令直线的纵截距 $b=-\frac{1}{4}z$，则 $z=-4b$．显然，目标函数值 z 与纵截距 b 成反比，在平面直角坐标系中作直线 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}z$，移动线性目标函数 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}z$ 通过点 A，此时，直线的纵截距最大，即目标函数达到最小.

第 3 步，求目标函数最值. 解$\begin{cases}x-y=0\\x+y-2=0\end{cases}$可得：$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，即点 $A(1,1)$.

将点 A 的坐标代入目标函数可得：$z_{\min}=3\times1-4\times1=-1$.

条件 1.3 线性目标函数的实际应用问题

例 10.18 （乙 1616/66）某高科技企业生产产品 A 和产品 B 需要甲、乙两种新型材料，生产一件产品 A 需要甲材料 1.5kg，乙材料 1kg，用 5 个工时；生产一件产品 B 需要甲材料 0.5kg、乙材料 0.3kg，用 3 个工时. 生产一件产品 A 的利润为 2100 元，生产一件产品 B 的利润为 900 元. 该企业现有甲材料 150kg，乙材料 90kg，则在不超过 600 个工时的条件下，生产产品 A、产品 B 的利润之和的最大值为____________元.

解析：设生产 A 产品 x 件，生产 B 产品 y 件$(x\geqslant0,y\geqslant0)$，则$\begin{cases}1.5x+0.5y\leqslant150\\x+0.3y\leqslant90\\5x+3y\leqslant600\end{cases}$，利润 $z=2100x+900y$，即 $y=-\frac{7}{3}x+\frac{z}{900}$.

如图 10.18 所示，在平面直角坐标系中作出不等式组的约束区域，及 $y=-\frac{7}{3}x+\frac{z}{900}$，解$\begin{cases}x+0.3y=90\\5x+3y=600\end{cases}$可得：$A(60,100)$，即当 $y=-\frac{7}{3}x+\frac{z}{900}$ 平移至 $A(60,100)$ 点时，其截距最大，将$\begin{cases}x=60\\y=100\end{cases}$代入 $y=-\frac{7}{3}x+\frac{z}{900}$ 可得：$z=900\left(y+\frac{7x}{3}\right)=900\times\left(100+\frac{7}{3}\times60\right)=216000$.

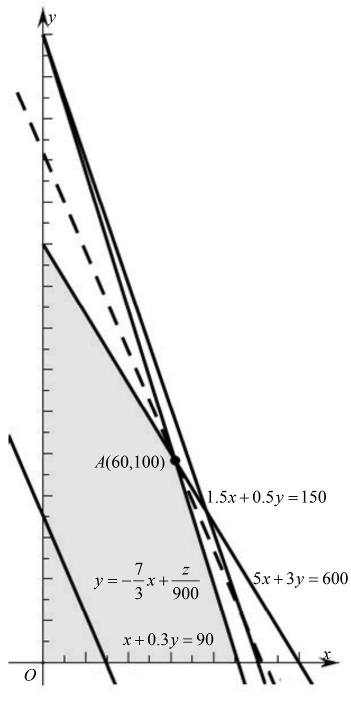


图 10.18

例 10.19（陕 1560）某企业生产甲、乙两种产品均需用 A，B 两种原料．已知生产 1 吨每种产品需原料及每天原料的可用限额如表 10.1 所示．

表 10.1

	甲	乙	原料限额
A(吨)	3	2	12
B(吨)	1	2	8

如果生产 1 吨甲、乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元，则该企业每天可获得最大利润为（　）．

A．12 万元　　B．16 万元　　C．17 万元　　D．18 万元

解析：由于该企业每天的利润与生产甲、乙两种产品的数量有关，因此，设该企业每天生产甲、乙两种产品分别为 x，y 吨 $\left(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\right)$，则该企业每天的利润为：$z=3x+4y$（万元）．

题设生产 1 吨甲、乙产品分别获利 3 万元、4 万元

由于题设生产 1 吨甲、乙产品分别需要 A 原料 3 吨和 2 吨，且每天限额 12 吨．因此，对甲原料而言有：$3x+2y\leqslant 12$，同理，对乙原料而言有：$x+2y\leqslant 8$．

综上所述，目标函数 $z=3x+4y$ 的约束条件为 $\begin{cases}3x+2y\leqslant 12\\x+2y\leqslant 8\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$．

第 1 步，如图 10.19 所示，画出线性约束区域．

由线性约束条件可知：可行域在 x 轴上方（$y\geqslant 0$），y 轴右侧（$x\geqslant 0$），以及直线 $3x+2y-12=0$ 和直线 $x+2y-8=0$ 的下方（$\leqslant$）．

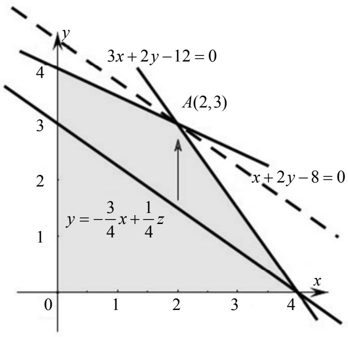


图 10.19

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=3x+4y$ 可以化为 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}z$，令直线的纵截距 $b=\dfrac{1}{4}z$，则 $z=4b$．显然，目标函数值 z 与纵截距 b 成正比，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}z$，为了求目标函数的最小值，必须移动线性目标函数 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}z$ 通过点 A，此时，直线的纵截距最大，即目标函数达到最大．

第 3 步，求目标函数最值．解 $\begin{cases}3x+2y-12=0\\x+2y-8=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，即点 $A\left(2,3\right)$．

将点 A 的坐标 $\left(2,3\right)$ 代入线性目标函数 $z=3x+4y$ 可得：$z_{\max}=3\times 2+4\times 3=18$（万元），故选 D．

经验总结：线性目标函数的最值问题本质上是对二元函数求最值．因此，求线性目标函数最值的应用问题关键是确定二元变量，并根据题设条件列出二元函数的约束条件和目标函数的二元解析式．

问题 2　线性目标函数的取值范围

问题分析：求线性目标函数 $z=ax+by\left(ab\neq 0\right)$ 的取值范围问题可以转化为既要求目标函数的最小值，又要求目标函数的最大值．

条件 2.1　线性目标函数是直线的截距

条件分析：当给定目标函数是直线的截距时，目标函数的取值范围取决于可行域的范围．

例 10.20 （丙 1705）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=x-y$ 的取值范围是（　）.

A．$[-3,0]$　　B．$[-3,2]$　　C．$[0,2]$　　D．$[0,3]$

解析：第 1 步，如图 10.20 所示，画线性约束区域．将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}3x+2y-6\leqslant 0\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $3x+2y-6=0$ 的下方（$\leqslant$），直线 $x=0$（即 y 轴）的左侧（$\geqslant$）和直线 $y=0$（即 x 轴）的上方（$\geqslant$）.

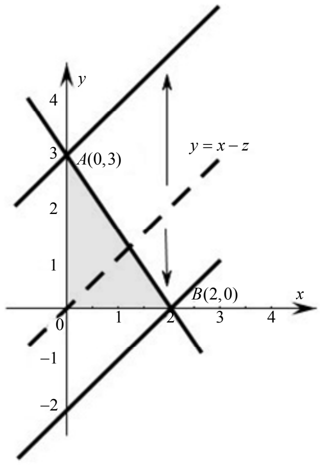


图 10.20

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=x-y$ 可以化为 $y=x-z$，由此可见：目标函数 z 是斜率为 1 的直线簇纵截距的负值．

第 3 步，求目标函数最值．将 $x=0$ 代入 $3x+2y-6=0$ 可得：$y=3$，即点 $A(0,3)$．由图可见：当直线过点 $A(0,3)$ 时纵截距最大，目标函数值取得最小值 $z_{\min}=x-y=0-3=-3$．

将 $y=0$ 代入 $3x+2y-6=0$ 可得：$x=2$，即点 $B(2,0)$．由图可见：当直线过点 $B(2,0)$ 时纵截距最小，目标函数值取得最大值 $z_{\max}=x-y=2-0=2$．因此，目标函数 $z=x-y$ 的取值范围是 $[-3,2]$.

故选 B，不选 ACD.

例 10.21 （粤 1453）若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant x\\x+y\leqslant 1\\y\geqslant -1\end{cases}$，且 $z=2x+y$ 的最大值和最小值分别为 M 和 m，则 $M-m=$（　）.

A．8　　B．7　　C．6　　D．5

解析：第 1 步，如图 10.21 所示，画线性约束区域．由于线性约束条件可以化为 $\begin{cases}-x+y\leqslant 0\\x+y-1\leqslant 0\\y+1\geqslant 0\end{cases}$，因此，线性约束区域在直线 $-x+y=0$ 和直线 $x+y-1=0$ 的下方（$\leqslant$），直线 $y=-1$ 的上方（$\geqslant$）.

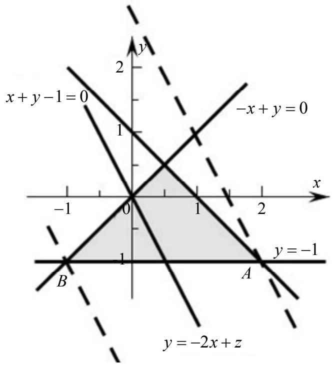


图 10.21

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=2x+y$ 可以化为 $y=-2x+z$，由此可见：目标函数 z 是斜率为 -2 的直线簇的纵截距．在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-2x+z$，由图可见：当直线 $y=-2x+z$ 移动到 A 点时，直线的纵截距最大，即目标函数取得最大值；当直线 $y=-2x+z$ 移动到 B 点时，直线的纵截距最小，即目标函数取得最小值．

第 3 步，求目标函数最值．由于点 A 是直线 $y=-1$ 与直线 $x+y-1=0$ 的交点，因此将 $y=-1$ 代入 $x+y-1=0$ 可得 $x=2$，即点 $A(2,-1)$；同理可以求得 $B(-1,-1)$．

将点 $A(2,-1)$ 代入目标函数 $z=2x+y$ 可得：$M=z_{\max}=2\times 2-1=3$．

将点 $B(-1,-1)$ 代入目标函数 $z=2x+y$ 可得：$m=z_{\min}=2\times(-1)-1=-3$．

因此，$M-m=3-(-3)=6$．故选 C，不选 ABD.

例 10.22 （粤 1363）给定区域 D：$\begin{cases}x+4y\geqslant 4\\x+y\leqslant 4\\x\geqslant 0\end{cases}$，令点集 $T=\{(x_0,y_0)\in D\,|\,x_0，y_0\in\mathbf{Z}，(x_0,y_0)$ 是

$z=x+y$ 在 D 上取得最大值或最小值的点}，则 T 中的点共确定______条不同的直线.

解析：第 1 步，如图 10.22 所示，画线性约束区域. 由于线性约束条件可以化为 $\begin{cases}x+4y-4\geqslant 0\\x+y-4\leqslant 0\\x\geqslant 0\end{cases}$，因此，线性约束区域在直线 $x+4y-4=0$ 的上方（≥）和直线 $x+y-4=0$ 的下方（≤），以及直线 $x=0$（即 y 轴）的右侧（≥）.

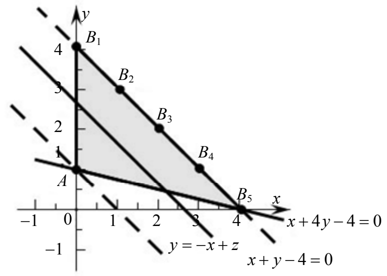


图 10.22

第 2 步，确定目标函数最值点. 由于线性目标函数 $z=x+y$ 可以化为 $y=-x+z$，由此可见：目标函数 z 是斜率为−1 的直线簇的纵截距. 在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-x+z$，由图可见：当直线 $y=-x+z$ 移动到 A 点时，直线的纵截距最小，即目标函数取得最小值；当直线 $y=-x+z$ 移动到直线 $x+y-4=0$ 处时，直线的纵截距最大，即目标函数取得最大值.

第 3 步，求目标函数最值. 将 $x=0$ 代入 $x+4y-4=0$ 可得：$y=1$，即目标函数直线 $y=-x+z$ 过点 $A(0,1)$ 时纵截距最小，即目标函数值最小；当目标函数直线 $y=-x+z$ 与直线 $x+y-4=0$ 重合时，目标函数取得最大值.

又因为题设 x_0，$y_0\in\mathbf{Z}$，所以 x_0，y_0 为整数. 因此，最大值点的坐标为 $B_1(0,4)$，$B_2(1,3)$，$B_3(2,2)$，$B_4(3,1)$，$B_5(4,0)$. 即 $T=\{(0,1),(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$. 由于 $B_1(0,4)$，$B_2(1,3)$，$B_3(2,2)$，$B_4(3,1)$，$B_5(4,0)$ 5 个点在一条直线上，所以这 5 个点连同点 $A(0,1)$ 一共 6 个点可以确定 6 条直线，即 AB_1，AB_2，AB_3，AB_4，AB_5，B_1B_5.

问题 3　线性约束条件中参数的求解

问题分析：线性约束条件中参数的求解问题往往假设参数已知，利用题设其他条件列方程求解.

条件 3.1　给定线性目标函数的最小值

条件分析：给定线性目标函数的最小值时，往往列方程求参数.

例 10.23（甲 1359）已知 $a>0$，x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geqslant 1\\x+y\leqslant 3\\y\geqslant a(x-3)\end{cases}$，若 $z=2x+y$ 的最小值为 1，则 $a=$（　）.

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

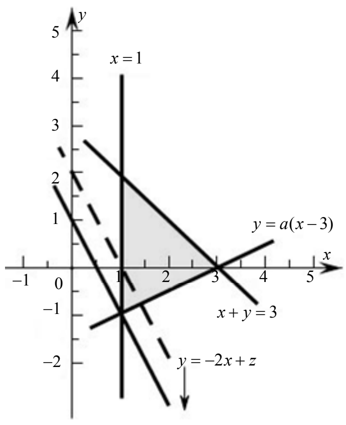


图 10.23

解析：第 1 步，画出线性约束区域.

∵ $x\geqslant 1$，∴可行域在直线 $x=1$ 右侧；

又∵ $x+y\leqslant 3$，∴可行域在直线 $x+y=3$ 的下方；

又∵ $y\geqslant a(x-3)$，∴可行域在直线 $y=a(x-3)$ 的上方.

∵题设 $a>0$，且直线 $y=a(x-3)$ 恒过点 $(3,0)$，∴画出可行域如图 10.23 所示.

第 2 步，确定目标函数的几何意义. ∵ $z=2x+y$，∴ $y=-2x+z$. 由直线方程可见：目标函数 z 是斜率为−2 的直线纵截距. 显然，当直线 $y=-2x+z$ 越向下平移，直线的纵截距越小.

第 3 步，确定临界位置. 将 $x=1$，$z_{\min}=1$ 代入目标函数可得：$y_{\min}=-2\times1+1=-1$.

再将 $x=1$，$y_{\min}=-1$ 代入直线 $y=a(x-3)$ 可得：$a=\dfrac{y}{x-3}=\dfrac{-1}{1-3}=\dfrac{1}{2}$，故选 B，不选 ACD.

例 10.24 （湘 1464）若变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}y\leqslant x\\x+y\leqslant 4\\y\geqslant k\end{cases}$，且 $z=2x+y$ 的最小值为-6，则 $k=$________.

解析：第 1 步，如图 10.24 所示，画线性约束区域．由于线性约束条件为：$\begin{cases}y\leqslant x\\x+y\leqslant 4\\y\geqslant k\end{cases}$，因此，线性约束区域在直线 $x+y-4=0$ 和直线 $-x+y=0$ 的下方（$\leqslant$），直线 $y=k$ 的上方（$\geqslant$）.

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=2x+y$ 可以化为 $y=-2x+z$，由此可见：目标函数 z 是斜率为-2 的直线簇的纵截距．在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-2x+z$，由图可见：当直线 $y=-2x+z$ 移动到 A 点时，直线的纵截距最小，即目标函数取得最小值.

第 3 步，求目标函数最值．由于点 A 是直线 $y=k$ 与直线 $y=x$ 的交点，因此将 $y=k$ 代入 $y=x$ 可得：$x=k$，即点 $A(k,k)$，将点 $A(k,k)$ 代入目标函数 $z=2x+y$ 可得：$M=z_{\max}=2\times k+k=3k$.

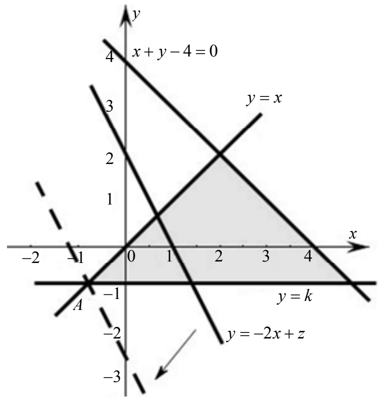


图 10.24

方程思想：利用题设条件列方程

由题设目标函数最小值为-6可得：$3k=-6$.

解得：$k=-2$．故填-2.

例 10.25 （京 1456）若 x，y 满足 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\kx-y+2\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$ 且 $z=y-x$ 的最小值为-4，则 k 的值为（　　）.

A．-2　　B．2　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

解析：第 1 步，画线性约束区域．由于线性约束条件可以化为 $\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\-kx+y-2\leqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，因此，线性约束区域在直线 $x+y-2=0$ 的上方（$\geqslant$），直线 $-kx+y-2=0$ 的下方（$\leqslant$），以及直线 $y=0$（即 x 轴）的上方（$\geqslant$）．由于直线 $-kx+y-2=0$ 即 $y=kx+2$ 的斜率是不确定，因此分别作图如图 10.25 所示.

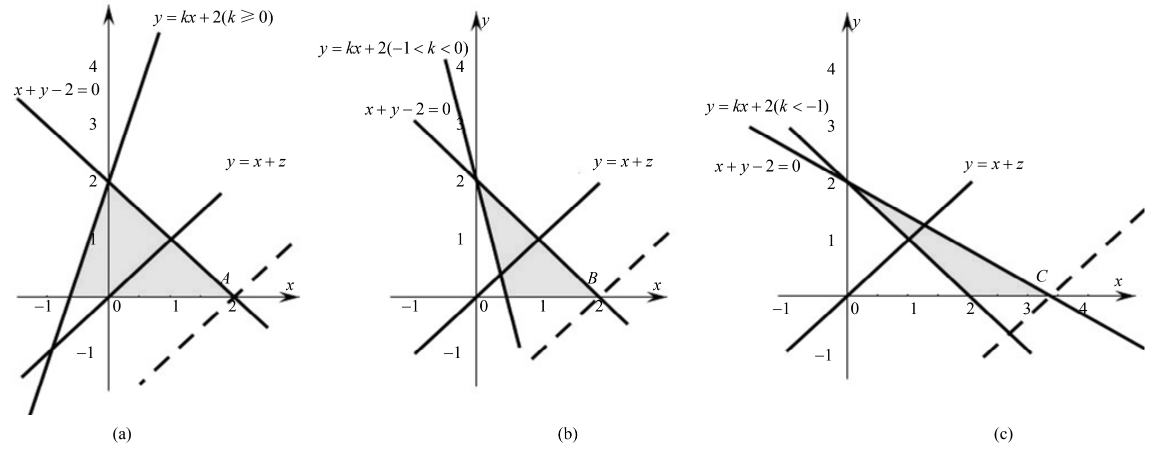


图 10.25

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=y-x$ 可以化为 $y=x+z$，由此可见：目标函数 z 是斜率为 1 的直线簇的纵截距．在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=x+z$，由图可见：

①$k\geqslant 0$ 时，当直线 $y=x+z$ 移到 A 点时，直线的纵截距最小，即目标函数取得最小值；

②$-1<k<0$ 时，当直线 $y=x+z$ 移到 B 点时，直线纵截距最小，即目标函数取得最小值；

③$k<-1$ 时，当直线 $y=x+z$ 移到 C 点时，直线纵截距最小，即目标函数取得最小值．

第 3 步，求目标函数最值．

①当 $k\geqslant 0$ 时，将 $y=0$ 代入 $x+y-2=0$ 可得：$x=2$，即目标函数直线 $y=x+z$ 过点 $A(2,0)$ 时纵截距最小，即目标函数值最小，因此，将点 $A(2,0)$ 代入目标函数 $z=y-x$ 可得：$z_{\min}=0-2=-2$．

②同理可得：当 $-1<k<0$ 时，$z_{\min}=0-2=-2$．

③当 $k<-1$ 时，将 $y=0$ 代入 $y=kx+2$ 可得：$x=-\dfrac{2}{k}$，即目标函数直线 $y=x+z$ 过点 $C(-\dfrac{2}{k},0)$ 时纵截距最小，即目标函数值最小，因此，将 C 点坐标代入目标函数 $z=y-x$ 可得：$z_{\min}=0-\left(-\dfrac{2}{k}\right)=\dfrac{2}{k}$．

由题设 $z_{\min}=-2$ 可得：$\dfrac{2}{k}=-4$．　方程思想：利用题设条件列方程

解得：$k=-\dfrac{1}{2}$．故选 D，不选 ABC．

> **经验总结：**对于线性约束条件中含有参数的问题，必须对参数在不同的范围进行分类讨论，分类讨论的范围还需要特别关注与已知约束条件进行比较（在已知约束直线的两侧）．

条件 3.2　给定可行域内存在点满足直线方程

条件分析：此条件可转化为直线与可行域有交点．

例 10.26（京 1358）设关于 x，y 的不等式组 $\begin{cases}2x-y+1>0\\x+m<0\\y-m>0\end{cases}$ 表示的平面区域内存在点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $x_0-2y_0=2$，求得 m 的取值范围是（　）．

A. $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right)$　　B. $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)$

C. $\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$　　D. $\left(-\infty,-\dfrac{5}{3}\right)$

解析：第 1 步，如图 10.26 所示，画出线性约束区域．

由于线性约束条件可化为 $\begin{cases}-2x+y-1<0\\x+m<0\\y-m>0\end{cases}$，因此，线性约束区域在直线 $-2x+y-1=0$ 的下方（$<$），直线 $x=-m$ 的左侧（$<$），直线 $y=m$ 的上方（$>$），即图中 $\triangle ABC$ 所示区域，显然点 $B(-m,m)$ 必须位于第四象限．

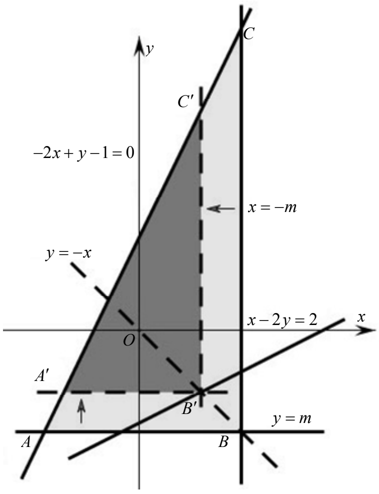


图 10.26

第 2 步，题设条件转换．

由于题设线性约束区域内存在点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $x_0-2y_0=2$，因此，可以转化为直线 $x-2y-2=0$ 与线性约束区域有交点．

第 3 步，确定约束条件最值点．由于线性约束区域受 $x=-m$ 和 $y=m$ 的影响，且两直线相交于点 $B(-m,m)$，即点 B 始终位于直线 $y=-x$ 上，由图可见：当点 B 移动到点 B' 后，直线 $x-2y-2=0$ 便与线性

约束区域不再有交点．解$\begin{cases}x-2y=2\\y=-x\end{cases}$可得：$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$．因此，当$y=m<-\dfrac{2}{3}$时，直线$x-2y-2=0$与线性约束区域始终有交点．即$m$的取值范围是$\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)$，故选 C，不选 ABD．

经验总结：对于线性约束条件中含有参数需要确定可行域范围的问题，必须对相关的辅助条件进行综合分析或等效转化．

问题 4 线性目标函数中参数的求解

问题分析：线性目标函数中参数的求解问题往往假设参数已知，利用题设其他条件列方程求解．

条件 4.1 给定含参线性目标函数的最大值

条件分析：给定线性目标函数的最大值时，往往可以利用最大值列方程求参数．

例 10.27 （鲁 1556）已知x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 2\\y\geqslant 0\end{cases}$，若$z=ax+y$的最大值为 4，则$a=$（　）．

A．3　　B．2　　C．-2　　D．-3

解析：第 1 步，如图 10.27 所示，画线性约束区域．由于线性约束条件可以化为$\begin{cases}-x+y\leqslant 0\\x+y-2\leqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$，因此，线性约束区域在直线$-x+y=0$和直线$x+y-2=0$的下方（$\leqslant$），以及直线$y=0$（即$x$轴）的上方（$\geqslant$）．

第 2 步，转换题设条件．由于题设线性目标函数$z=ax+y$的最大值为 4，因此可以转换为取得最大值的目标函数过点$P(0,4)$，且化为$y=-ax+4$，由此可见：参数$-a$是直线簇$y=-ax+4$的斜率．在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线$y=-ax+4$，由图可见：当直线$y=-ax+4$旋转到过A点时，直线的斜率最小，即参数a取得最大值．

第 3 步，求参数的最大取值．$\because k_{PA}=\dfrac{4-0}{0-2}=-2$，$\therefore a=-k=2$．

故选 B，不选 ACD．

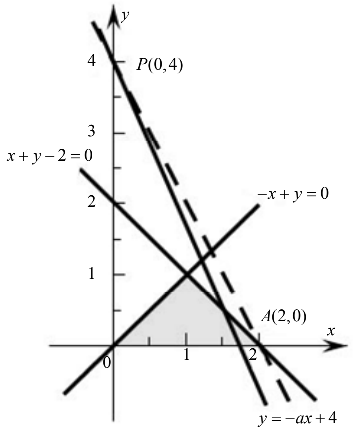


图 10.27

例 10.28 （浙 1363）设$z=kx+y$，其中实数x，y满足$\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\x-2y+4\geqslant 0\\2x-y-4\leqslant 0\end{cases}$，若$z$的最大值为 12，则实数$k=$_______．

解析：第 1 步，如图 10.28 所示，画线性约束区域．线性约束条件可以化为：$\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\-x+2y-4\leqslant 0\\-2x+y+4\geqslant 0\end{cases}$，因此，线性约束区域在直线$x+y-2=0$和直线$-2x+y+4=0$的上方（$\geqslant$），以及直线$-x+2y-4=0$的下方（$\leqslant$）．

第 2 步，转换题设条件．由于题设线性目标函数 $z=kx+y$ 的最大值为 12，因此可以转换为取得最大值的目标函数过点 $P(0,12)$，且化为 $y=-kx+12$，由此可见：参数 $-k$ 是直线簇 $y=-kx+12$ 的斜率．在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-kx+12$，由图可见：当直线 $y=-kx+12$ 旋转到过 A 点时，直线的斜率最小，即参数 k 取得最大值．

第 3 步，求参数的最大取值．

$\because$ 点 A 是直线 $-2x+y+4=0$ 与 $-x+2y-4=0$ 的交点，

$\therefore$ 解 $\begin{cases}-2x+y+4=0\\-x+2y-4=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}$，即点 $A(4,4)$．

又 $\because k_{PA}=\dfrac{12-4}{0-4}=-2$，$\therefore k=2$．故填 2．

经验总结：对于给定含有参数的线性目标函数取得最值的条件，可以转换为目标函数过最大值点．

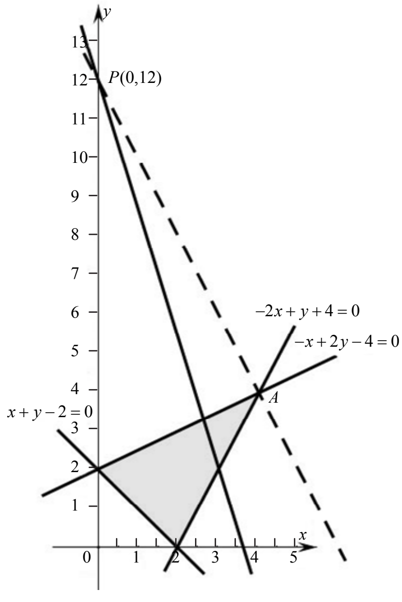


图 10.28

条件 4.2　给定含参线性目标函数的最小值

条件分析：给定含参线性目标函数的最小值时，往往在利用最小值列方程求出参数之后，需要对求得的参数进行检验．

例 10.29（乙 1411）设 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant a\\x-y\leqslant -1\end{cases}$ 且 $z=x+ay$ 的最小值为 7，则 $a=$（　）．

A．-5　　B．3　　C．-5 或 3　　D．5 或 -3

解析：第 1 步，如图 10.29 所示，画线性约束区域．将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}x+y\geqslant a\\-x+y\geqslant 1\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $x+y-a=0$ 和直线 $-x+y-1=0$ 的上方（$\geqslant$）．

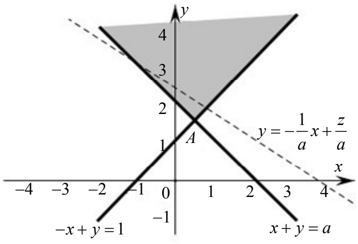


图 10.29

第 2 步，确定目标函数最值点．由于线性目标函数 $z=x+ay$ 可以化为 $y=-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{z}{a}$，令直线的纵截距 $b=\dfrac{1}{a}z$，则 $z=ab$．显然，目标函数值 z 与纵截距 b 有关，在已经画好线性约束区域的平面直角坐标系中作直线 $y=-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{z}{a}$，为了求目标函数的最小值，必须移动线性目标函数 $y=-\dfrac{1}{a}x+\dfrac{z}{a}$ 通过点 A，此时，直线的纵截距最大，即目标函数达到最小．

第 3 步，求出目标函数的参数．在平面区域内，平移直线 $z=x+ay$，可知在点 A 处，z 取得最值，解 $\begin{cases}x+y=a\\x-y=-1\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=\dfrac{a-1}{2}\\y=\dfrac{a+1}{2}\end{cases}$，即 A 点坐标为 $\left(\dfrac{a-1}{2},\dfrac{a+1}{2}\right)$，将 $\begin{cases}x=\dfrac{a-1}{2}\\y=\dfrac{a+1}{2}\end{cases}$ 代入目标函数 $z=x+ay$，且利用"最小值为 7"列方程可得：$\dfrac{a-1}{2}+a\times\dfrac{a+1}{2}=7$，化简可得：$a^2+2a-15=0$，解得：$a=-5$，$a=3$．

检验：　由于点 A 坐标使得目标函数既可能取最大，也可能取最小，因此需要进行检验

（1）当 $a=-5$ 时，约束条件为 $\begin{cases}x+y\geqslant -5\\x-y\leqslant -1\end{cases}$，目标函数为 $z=x-5y$，A 点坐标为 $(-3,-2)$，将 A 点坐标代入目标函数可得目标函数最大值为：$z=-3-5\times(-2)=7$（舍去）．

（2）当$a=3$时，约束条件为$\begin{cases}x+y\geqslant 3\\x-y\leqslant -1\end{cases}$，解得$A$点坐标为$(1,2)$，目标函数为$z=x+3y$，将$A$点坐标代入目标函数可得目标函数最小值为：$z=1+6=7$（符合题意）. 故选B，不选ACD.

例 10.30 （鲁 1459）已知x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y-1\leqslant 0\\2x-y-3\geqslant 0\end{cases}$，当目标函数$z=ax+by(a>0,\ b>0)$在该约束条件下取到最小值$2\sqrt{5}$时，$a^2+b^2$的最小值为（　）.

A．5　　　B．4　　　C．$\sqrt{5}$　　　D．2

解析：第1步，如图10.30所示，画线性约束区域. 将线性约束条件中y的系数化为正数可得：$\begin{cases}-x+y+1\geqslant 0\\-2x+y+3\leqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线$-x+y+1=0$的上方（$\geqslant$），直线$-2x+y+3=0$的下方（$\leqslant$）.

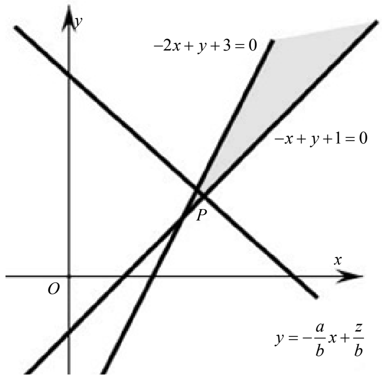


图 10.30

第2步，确定目标函数最值点. 由于线性目标函数$z=ax+by$可以化为$y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$，由于题设：$a>0$，$b>0$，因此，当直线$y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$经过直线$-x+y+1=0$和直线$-2x+y+3=0$的交点$P$时，目标函数取得最小值.

第3步，求出目标函数的参数. 解$\begin{cases}-x+y+1=0\\-2x+y+3=0\end{cases}$可得：$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，即点$P(2,1)$. 由于题设目标函数最小值为$2\sqrt{5}$，因此，将$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$代入目标函数$z=ax+by$可得：$2a+b=2\sqrt{5}$.

令$S=a^2+b^2$，则$S=a^2+\left(2\sqrt{5}-2a\right)^2=5a^2-8\sqrt{5}a+20$.

将S看成是关于a的一元二次函数，由于二次项系数$5>0$，因此这是一条开口向上的抛物线，且当$a=-\frac{B}{2A}=-\frac{-8\sqrt{5}}{2\times 5}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$时，$S_{\min}=C-\frac{B^2}{4A}=20-\frac{\left(-8\sqrt{5}\right)^2}{4\times 5}=20-16=4$. 故选B，不选ACD.

问题 5 非线性目标函数的最值计算

问题分析：在线性约束条件下求解非线性目标函数最值的关键是要明确非线性目标函数的几何意义.

条件 5.1　给定分式目标函数

条件分析：形如$z=\frac{ay+b}{cx+d}(ac\neq 0)$的分式目标函数，化为$ay+b=czx+zd$可得：$y=\frac{cz}{a}x+\frac{zd-b}{a}$，令$k=\frac{cz}{a}$，则$z=\frac{a}{c}k$，$y=kx+\frac{\frac{a}{c}kd-b}{a}=kx+\frac{d}{c}k-\frac{b}{a}$，化简可得：$y+\frac{b}{a}=k\left(x+\frac{d}{c}\right)$，解得：$k=\frac{y-\left(-\frac{b}{a}\right)}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}$；根据斜率的计算公式可知：此斜率表示可行域上动点$P(x,y)$与定点$Q\left(-\frac{d}{c},-\frac{b}{a}\right)$所在直线的斜率，而目标函数$z$是斜率$k$的$\frac{a}{c}$倍. 事实上，$z=\frac{ay+b}{cx+d}=\frac{a}{c}\times\frac{y-\left(-\frac{b}{a}\right)}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}$的意义更加直观，只是这一步很难想到.

例 10.31（乙 1565）若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\x-y\leqslant 0\\x+y-4\leqslant 0\end{cases}$，则 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为__________.

解析：第 1 步，如图 10.31 所示，画线性约束区域．将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\-x+y\geqslant 0\\x+y-4\leqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $-x+y=0$ 的上方（$\geqslant$），直线 $x+y-4=0$ 的下方（$\leqslant$），和直线 $x=1$ 的右侧（$\geqslant$）.

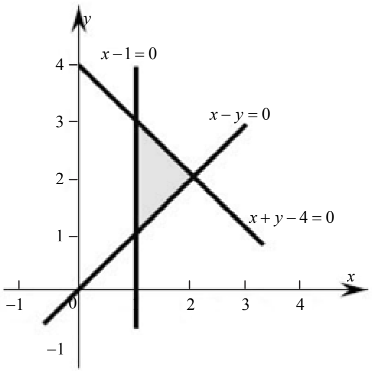


图 10.31

第 2 步，确定目标函数最值点．令目标函数 $z=\dfrac{y}{x}$，则目标函数可以化为 $y=zx$，由此可见：目标函数 z 是过 $(0,0)$ 点直线的斜率．由图可见：当直线 $y=zx$ 过点 A 时，斜率最大，即目标函数值达到最大.

第 3 步，求目标函数最值.

解 $\begin{cases}x+y-4=0\\x-1=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$，即点 A 的坐标为 $(1,3)$，将点 A 的坐标代入线性目标函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 可得：$z_{\max}=\dfrac{3}{1}=3$，即 $\dfrac{y}{x}$ 的最大值为 3.

条件 5.2　给定二元二次目标函数

条件分析：形如 $z=(x-a)^2+(y-b)^2$ 的目标函数的几何意义可以看成是可行域中动点 $P(x,y)$ 到定点 $Q(a,b)$ 的距离的平方.

例 10.32（鲁 1604）若变量 x，y 满足 $\begin{cases}x+y\leqslant 2\\2x-3y\leqslant 9\\x\geqslant 0\end{cases}$，则 x^2+y^2 的最大值是（　）.

A．4　　B．9　　C．10　　D．12

解析：第 1 步，如图 10.32 所示，画线性约束区域.

将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\-2x+3y+9\geqslant 0\\x\geqslant 0\end{cases}$，

由此可见：线性约束区域在直线 $x+y-2=0$ 的下方（$\leqslant$），直线 $-2x+3y+9=0$ 的上方（$\geqslant$），$x=0$（即 y 轴）的右侧（$\geqslant$）.

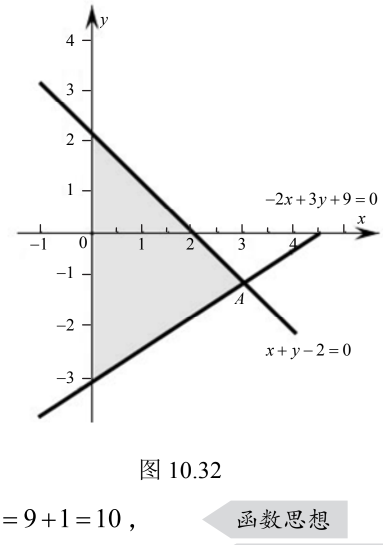


图 10.32

第 2 步，确定目标函数极点．令目标函数 $z=x^2+y^2$，则目标函数是动点 $P(x,y)$ 到坐标原点 $O(0,0)$ 距离的平方.

由图可见：当动点 $P(x,y)$ 到达点 A 时，动点到坐标原点的距离最大，即目标函数取得最大值.

第 3 步，求目标函数的最大值.

解 $\begin{cases}x+y-2=0\\-2x+3y+9=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$，即点 A 的坐标为 $(3,-1)$.

将点 A 的坐标代入线性目标函数 $z=x^2+y^2$ 可得：$z_{\max}=3^2+(-1)^2=9+1=10$，　函数思想

或利用两点间距离公式可得：$z_{\max}=|OA|^2=(3-0)^2+(-1-0)^2=9+1=10$．　数形结合思想

故选 C，不选 ABD.

例 10.33 （苏 1612）已知实数 x，y 满足 $\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0\\2x+y-2\geqslant 0\\3x-y-3\leqslant 0\end{cases}$，则 x^2+y^2 的取值范围是________.

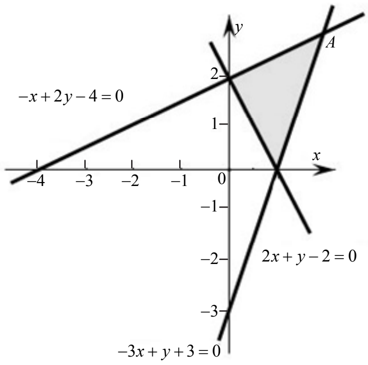


图 10.33

解析：第 1 步，如图 10.33 所示，画线性约束区域．将线性约束条件中 y 的系数化为正数可得：$\begin{cases}-x+2y-4\leqslant 0\\2x+y-2\geqslant 0\\-3x+y+3\geqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $-x+2y-4=0$ 的下方（$\leqslant$），直线 $2x+y-2=0$ 和直线 $-3x+y+3=0$ 的上方（$\geqslant$）.

第 2 步，确定目标函数最值点．令目标函数 $z=x^2+y^2$，则目标函数是动点 $P(x,y)$ 到坐标原点 $O(0,0)$ 距离的平方．由图可见：由于坐标原点 $O(0,0)$ 到直线 $2x+y-2=0$ 的距离最短，因此目标函数 z 的最小值是该距离的平方.

逆向思维：将约束区域内动点到坐标原点的最小距离转化为坐标原点到直线的距离

由图可见：当动点到达点 A 时，动点到坐标原点的距离最大，即目标函数取得最大值.

第 3 步，求目标函数取值范围．利用点到直线的距离公式可得：$z_{\min}=\left(\dfrac{|2\times 0+0-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2=\dfrac{4}{5}$.

解 $\begin{cases}-x+2y-4=0\\-3x+y+3=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，即点 A 的坐标为 $(2,3)$，

将点 A 的坐标代入线性目标函数 $z=x^2+y^2$ 可得：$z_{\max}=2^2+3^2=4+9=13$，

函数思想

或利用两点间距离公式可得：$z_{\max}=|OA|^2=(2-0)^2+(3-0)^2=4+9=13$.

数形结合思想

综上所述，目标函数 x^2+y^2 的取值范围是 $\left[\dfrac{4}{5},13\right]$.

条件 5.3 给定绝对值目标函数

条件分析：形如 $z=|Ax+By+C|$ 的目标函数可以化为 $z=\sqrt{A^2+B^2}\times\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，由此可见：目标函数的几何意义是可行域中的动点 $P(x,y)$ 到直线距离的 $\sqrt{A^2+B^2}$ 倍.

例 10.34 （浙 1564）若实数 x，y 满足 $x^2+y^2\leqslant 1$，则 $|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 的最小值是________.

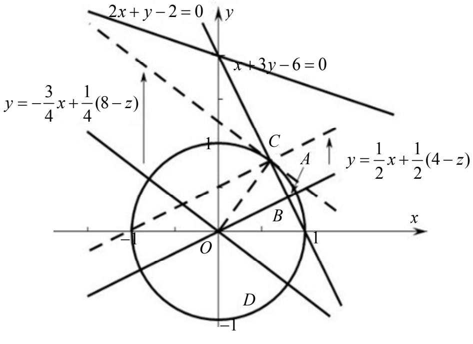


图 10.34

解析 1：第 1 步，如图 10.34 所示，画约束区域．由于约束条件是 $x^2+y^2\leqslant 1$，因此它是圆 $x^2+y^2=1$ 及其内部区域.

第 2 步，确定目标函数最值点．令 $z=|2x+y-2|+|6-x-3y|$，则由于目标函数涉及 $2x+y-2$ 与 $-x-3y+6$ 两个代数式，为此画出 $2x+y-2=0$ 与 $x+3y-6=0$ 两条直线，显然直线 $2x+y-2=0$ 将约束区域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 分为 A，B 两个区域.

由于 A 区域在直线 $2x+y-2=0$ 的上方，在直线 $x+3y-6=0$ 的下方，因此，$2x+y-2\geqslant 0$，$x+3y-6<0$，从而 $z=|2x+y-2|+|6-x-3y|=2x+y-2-(x+3y-6)=x-2y+4$，即 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}(4-z)$．由图可见：当直线移动到过点 C 时，纵截距最大，目标函数最小.

由于 B 区域在直线 $2x+y-2=0$ 和直线 $x+3y-6=0$ 的下方，因此，$2x+y-2<0$，$x+3y-6<0$，从

而 $z=|2x+y-2|+|6-x-3y|=-(2x+y-2)-(x+3y-6)=-3x-4y+8$，即 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}(8-z)$．由图 10.34 可见：当直线移动到过点 C 时，纵截距最大，即目标函数最小．

第 3 步，求目标函数的最大值．

在 A 约束区域：解 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\2x+y-2=0\end{cases}$ 可得：$x^2+(2-2x)^2=1$，即 $5x^2-8x+3=0$．解得：$\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$（舍去），即点 $C\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$．将 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}$ 代入 $z=|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 可得：

$z_{\min}=\left|2\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}-2\right|+\left|6-\dfrac{3}{5}-3\times\dfrac{4}{5}\right|=0+6-3=3$；

在 B 约束区域：过点 $O(0,0)$ 作 $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{4}(8-z)$ 的垂线：$y=\dfrac{4}{3}x$．解 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\y=\dfrac{4}{3}x\end{cases}$ 可得：$\left(1+\dfrac{16}{9}\right)x^2=1$，解得：$\begin{cases}x=\pm\dfrac{3}{5}\\y=\pm\dfrac{4}{5}\end{cases}$（舍负），即交点亦为点 $C\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，将 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}$ 代入 $z=|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 可得：

$z_{\min}=\left|2\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}-2\right|+\left|6-\dfrac{3}{5}-3\times\dfrac{4}{5}\right|=0+6-3=3$．

经验总结：本题目标函数在两“部分”约束区域的最值恰好相等，如果不等的话，还需要对所求得的两个最值，再进行比较取最值．

解析 2：（猜证思想）

第 1 步，画约束区域．由于本题的约束条件是 $x^2+y^2\leqslant 1$，因此它是圆 $x^2+y^2=1$ 及其内部区域，如图 10.35 所示．

第 2 步，确定目标函数极点．令 $z=|2x+y-2|+|6-x-3y|$，

则 $z=\sqrt{5}\times\dfrac{|2x+y-2|}{\sqrt{5}}+\sqrt{10}\times\dfrac{|6-x-3y|}{\sqrt{10}}$．

设 $D_1=\dfrac{|2x+y-2|}{\sqrt{5}}$，$D_2=\dfrac{|6-x-3y|}{\sqrt{10}}$，则 $z=\sqrt{5}D_1+\sqrt{10}D_2$．

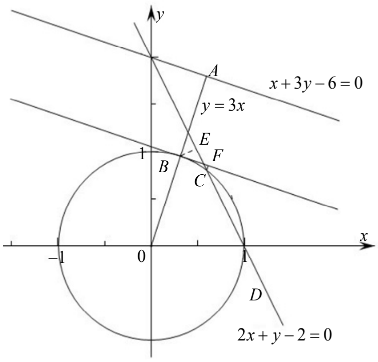


图 10.35

在平面直角坐标系中作出直线 $x+3y-6=0$ 与 $2x+y-2=0$，且作直线 $x+3y-6=0$ 的垂线 $y=3x$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 交于点 B，解 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\y=3x\end{cases}$ 可得：$B(\dfrac{\sqrt{10}}{10},\dfrac{3\sqrt{10}}{10})$．过点 B 作直线 $x+3y-6=0$ 的平行线（即为圆的切线）：$y-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=-\dfrac{1}{3}(x-\dfrac{\sqrt{10}}{10})$，即 $x+3y-\sqrt{10}=0$．

因此，可行域内点到直线 $x+3y-6=0$ 的最短距离就转化为点到切线 $x+3y-\sqrt{10}=0$ 的最短距离．

当动点在点 B 时，$D_2=0$，$D_1=BE$，$z_1=\sqrt{5}BE=\sqrt{5}\times\dfrac{\left|2\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}+\dfrac{3\sqrt{10}}{10}-2\right|}{\sqrt{5}}=\left|\dfrac{\sqrt{10}}{2}-2\right|=2-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$．

当动点在点 C 时，$D_1=0$，$D_2=CF$，解$\begin{cases}x^2+y^2=1\\2x+y-2=0\end{cases}$可得：$x^2+(2-2x)^2=1$，即 $5x^2-8x+3=0$．

解得：$\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}$或$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$（舍去），即点 $C\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$．$z_2=\sqrt{10}CF=\sqrt{10}\times\dfrac{\left|\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{4}{5}-\sqrt{10}\right|}{\sqrt{10}}=\left|3-\sqrt{10}\right|=\sqrt{10}-3$．

$\because z_1-z_2=2-\dfrac{\sqrt{10}}{2}+3-\sqrt{10}=5-\dfrac{3\sqrt{10}}{2}>5-\dfrac{3\times3.3}{2}>0$，$\therefore z_1>z_2$，故当动点在点 C 时，目标函数最小．

将$\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}$代入 $z=|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 可得：$z_{\min}=\left|2\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}-2\right|+\left|6-\dfrac{3}{5}-3\times\dfrac{4}{5}\right|=0+6-3=3$．

问题 6 其他形式目标函数问题

问题分析：对于其他形式的目标函数问题，解题的关键是要将其他形式的目标函数进行适当的转化.

条件 6.1 给定目标函数为线性约束区域在指定直线上的投影

条件分析：当给定目标函数是约束区域在直线上的投影时，需要作出约束区域、已知直线及约束区域在已知直线上的投影.

例 10.35 （浙 1653）在平面上，过点 P 作直线 l 的垂线所得的垂足称为点 P 在直线 l 上的投影．由区域$\begin{cases}x-2\leqslant 0\\x+y\geqslant 0\\x-3y+4\geqslant 0\end{cases}$中的点在直线 $x+y-2=0$ 上的投影构成的线段记为 AB，则 $|AB|=$（　）.

A．$2\sqrt{2}$　　B．4　　C．$3\sqrt{2}$　　D．6

解析：第 1 步，如图 10.36 所示，画出线性约束区域.

将$\begin{cases}x-2\leqslant 0\\x+y\geqslant 0\\x-3y+4\geqslant 0\end{cases}$化为$\begin{cases}x-2\leqslant 0\\x+y\geqslant 0\\-x+3y-4\leqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $x+y=0$ 的上方，直线 $-x+3y-4=0$ 的下方，直线 $x=2$ 的左侧.

第 2 步，确定目标函数.

如图 10.36 所示作出约束区域点 A' 和点 B' 在直线 $x+y-2=0$ 上的投影，则 $|AB|=|A'B'|$．

第 3 步，求目标函数最值．解$\begin{cases}x+y=0\\-x+3y-4=0\end{cases}$可得：$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，即点 $A'(-1,1)$．解$\begin{cases}x-2=0\\x+y=0\end{cases}$可得：$\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$，即点 $B'(2,-2)$．由两点间距离公式可得：$|AB|=|A'B'|=\sqrt{(-2-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$．故选 C，不选 ABD.

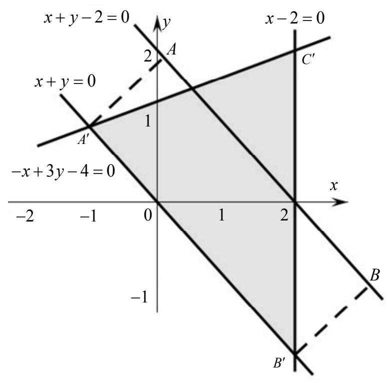


图 10.36

条件 6.2 给定目标函数为线性约束区域可行点到指定曲线的距离

条件分析：当给定目标函数是约束区域可行点到指定曲线的距离时，需要作出约束区域及所给指定曲线.

例 10.36（皖 0759）如果点 P 在平面区域 $\begin{cases}2x-y+2\geqslant 0\\ x-2y+1\leqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\end{cases}$ 上，点 Q 在曲线 $x^2+(y+2)^2=1$ 上，那么 $|PQ|$ 的最小值为（　）.

A. $\sqrt{5}-1$　　B. $\dfrac{4}{\sqrt{5}}-1$　　C. $2\sqrt{2}-1$　　D. $\sqrt{2}-1$

解析：第 1 步，如图 10.37 所示，画出线性约束区域. 将约束条件化为 $\begin{cases}-2x+y-2\leqslant 0\\ -x+2y-1\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $-2x+y-2=0$ 和直线 $x+y-2=0$ 的下方，在直线 $-x+2y-1=0$ 的上方.

第 2 步，确定目标函数. 由于曲线 $x^2+(y+2)^2=1$ 是圆心在 $M(0,-2)$，半径为 1 的圆. 因此，当点 Q 位于 MP 的连线上时，$|PQ|$ 的值最小，且 $|PQ|=|PM|-|QM|=|PM|-1$（$|QM|=1$ 为圆的半径）.

解 $\begin{cases}-2x+y-2=0\\ x-2y+1=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$，即点 $P(-1,0)$. 由两点间距离公式可得：$|PM|=\sqrt{(0+2)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，$|PQ|=|PM|-|QM|=|PM|-1=\sqrt{5}-1$. 故选 A，不选 BCD.

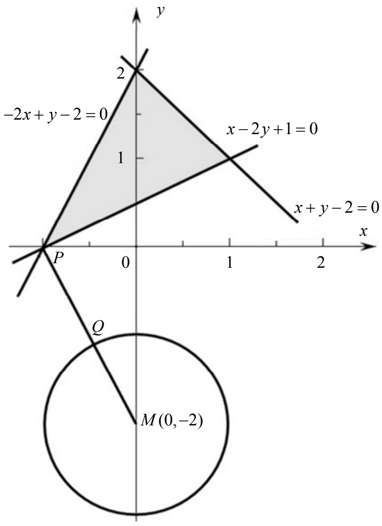


图 10.37

条件 6.3　给定目标函数为两个向量的数量积

条件分析：当给定目标函数是两个向量的数量积时，需要利用向量的坐标进行计算.

例 10.37（粤 1155）在平面直角坐标系 xOy 上的区域 D 由不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ y\leqslant 2\\ x\leqslant\sqrt{2}y\end{cases}$ 给定，若 $M(x,y)$ 为 D 上的动点，点 A 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$，则 $z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}$ 的最大值为（　）.

A. $4\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. 4　　D. 3

解析：第 1 步，如图 10.38 所示，画出线性约束区域. 将 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ y\leqslant 2\\ x\leqslant\sqrt{2}y\end{cases}$ 化为 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\\ y\leqslant 2\\ -x+\sqrt{2}y\geqslant 0\end{cases}$，由此可见：线性约束区域在直线 $x=0$ 与 $x=\sqrt{2}$ 之间，直线 $x-\sqrt{2}y=0$ 的上方，直线 $y=2$ 的下方.

第 2 步，确定目标函数. ∵ $M(x,y)$，$A(\sqrt{2},1)$，∴ $\overrightarrow{OM}=(x,y)$，$\overrightarrow{OA}=(\sqrt{2},1)$，由 $z=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}$ 可得：$z=\sqrt{2}x+y$，即 $y=-\sqrt{2}x+z$. 由图可见：当直线 $y=-\sqrt{2}x+z$ 移动到过点 $A(\sqrt{2},2)$ 时，直线的纵截距最大，即目标函数最大.

第 3 步，求目标函数最值. 将 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=2\end{cases}$ 代入 $z=\sqrt{2}x+y$ 可得：$z_{\max}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}+2=4$. 故选 C.

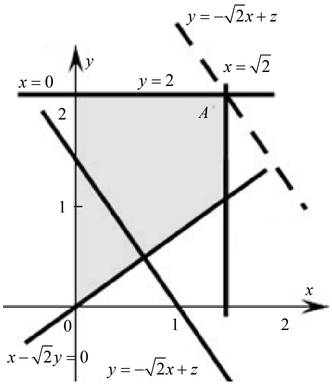


图 10.38

例 10.38 （闽 1158）已知O是坐标原点，点$A(-1,1)$，若点$M(x,y)$为平面区域$\begin{cases}x+y\geqslant 2\\x\leqslant 1\\y\leqslant 2\end{cases}$上的一个动点，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$的取值范围是（　）.

A. $[-1,0]$　　B. $[0,1]$　　C. $[0,2]$　　D. $[-1,2]$

解析：第 1 步，如图 10.39 所示，画出线性约束区域. 将$\begin{cases}x+y\geqslant 2\\x\leqslant 1\\y\leqslant 2\end{cases}$化为$\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\x\leqslant 1\\y\leqslant 2\end{cases}$. 由此可见：线性约束区域在直线$x+y-2=0$的上方，直线$y=2$的下方，直线$x=1$的左侧.

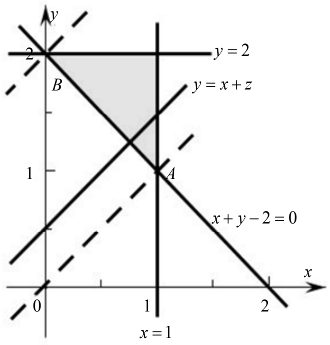


图 10.39

第 2 步，确定目标函数. ∵已知$M(x,y)$，$A(-1,1)$，∴$\overrightarrow{OM}=(x,y)$，$\overrightarrow{OA}=(-1,1)$，由$z=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}$可得：$z=-x+y$，即$y=x+z$.

第 3 步，求目标函数的取值范围. 由图可见：当直线$y=x+z$移动到过点$A(1,1)$时，直线的纵截距最小为 0；当直线$y=x+z$移动到过点$B(0,2)$时，直线的纵截距最大为 2. 因此，目标函数取值范围为$[0,2]$. 故选 C，不选 ABD.

问题 7 非线性约束条件的目标函数问题

问题分析：对非线性约束条件的目标函数问题，解题的关键是要正确画出约束条件对应的区域.

条件 7.1　给定约束条件为绝对值不等式

条件分析：当给定约束条件为绝对值不等式时，需要分象限确定约束条件不等式，然后分别画出四个象限的可行域.

例 10.39 （鄂 1158）已知向量$\boldsymbol{a}=(x+z,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,y-z)$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 若$x$，$y$满足$|x|+|y|\leqslant 1$，则$z$的取值范围为（　）.

A. $[-2,2]$　　B. $[-2,3]$　　C. $[-3,2]$　　D. $[-3,3]$

解析：第 1 步，如图 10.40 所示，画出线性约束区域. ∵约束条件为$|x|+|y|\leqslant 1$，

∴在第一象限：$x+y-1\leqslant 0$；在第二象限：$-x+y-1\leqslant 0$；在第三象限：$-x-y-1\leqslant 0$；在第四象限：$x-y-1\leqslant 0$.

第 2 步，确定目标函数.

∵$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，∴由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$可得：$2(x+z)+3(y-z)=0$，即$2x+3y=z$，

亦即$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{z}{3}$，显然目标函数是纵截距的 3 倍.

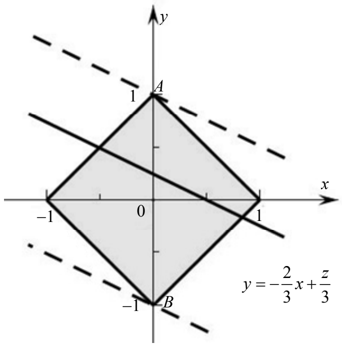


图 10.40

第 3 步，求目标函数的取值范围. 由图可见：当直线$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{z}{3}$移动到过点$A(0,1)$时，直线的纵截距最大为 1，即目标函数最大值为 3；当直线$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{z}{3}$移动到过点$B(0,-1)$时，直线的纵截距最小为–1，即目标函数最小值为$-3$. 因此，目标函数的取值范围为$[-3,3]$. 故选 D，不选 ABC.

第 11 题　程序框图背景

11

背景知识

程序框图

程序框图又称算法流程图，是一种用规定的程序框（包括起止框、输入/输出框、处理框、判断框、连接点及注释框等）、流程线和文字说明来准确、直观地表示算法的图形.

算法

按照一定的规则解决某一类问题的明确和有限的步骤.

顺序结构、条件结构和循环结构是构成算法的三种基本逻辑结构. 顺序结构由若干个“依次执行”的步骤组成；条件结构用于实现流程根据条件是否成立而“选择执行”不同流向的功能；循环结构是指从某处开始，按照一定的条件必须“反复执行”的步骤.

基本算法语句

基本算法语句包括输入语句（INPUT 语句）、输出语句（PRINT 语句）、赋值语句（=语句）、条件语句（IF-THEN 语句、IF-THEN-ELSE 语句）、循环语句（WHILE 语句、UNTIL 语句）.

典型算法

辗转相除法、更相减损术、秦九韶算法.

问题 1　输出循环结果

问题分析：研究输出循环结果问题首先必须明确所求结果对应的量为循环主体，然后再确定循环变量和循环条件. 一般来说，循环条件的控制既可以是对循环主体的控制，也可以是对循环变量的控制. 关注循环条件的方法是关注条件结构中的判断语句.

条件 1.1　给定循环次数

条件分析：对于给定循环次数求输出结果的问题，可以在有限的循环次数内，依次写出每次循环之后各变量的值，从而最终确定输出结果.

例 11.1（乙 1409/57）执行图 11.1 所示的程序框图，若输入的 a，b，k 分别为 1，2，3，则输出的 $M=(\quad)$.

A. $\dfrac{20}{3}$　　B. $\dfrac{16}{5}$　　C. $\dfrac{7}{2}$　　D. $\dfrac{15}{8}$

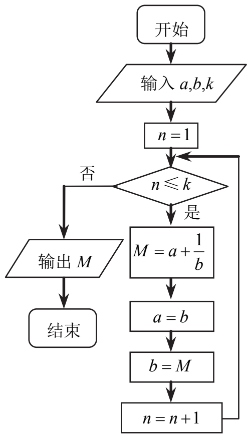


图 11.1

解析：首先关注条件结构中的判断语句 $n\leqslant k$，从而确定循环变量是 n，循环参数是 k，且循环次数 k 在程序结构中没有任何变化. 因此，这是一个给定了循环次数的输出结果问题.

∵输入的 a，b，k 分别为 1，2，3，∴ $a=1$，$b=2$，$k=3$.

当 $n=1$ 时，∵ $n=1\leqslant k=3$，∴ $M=a+\dfrac{1}{b}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，$a=b=2$，$b=M=\dfrac{3}{2}$；

当 $n=2$ 时，$\because n=2\leqslant k=3$，$\therefore M=a+\dfrac{1}{b}=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$，$a=b=\dfrac{3}{2}$，$b=M=\dfrac{8}{3}$；

当 $n=3$ 时，$\because n=3\leqslant k=3$，$\therefore M=a+\dfrac{1}{b}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{15}{8}$，$a=b=\dfrac{8}{3}$，$b=M=\dfrac{15}{8}$；

当 $n=4$ 时，$\because n=4>k=3$，$\therefore$输出 $M=\dfrac{15}{8}$．故选 D，不选 ABC.

例 11.2 （乙 1307/55）执行如图 11.2 所示的程序框图，如果输入的 $t\in[-1,3]$，则输出 s 属于（　）.

A．$[-3,4]$　　B．$[-5,2]$　　C．$[-4,3]$　　D．$[-2,5]$

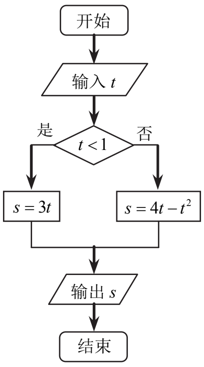


图 11.2

解析：$\because$条件（分支）结构的条件是 $t<1$，且当 $t<1$ 时，$s=3t$；

当 $t\geqslant 1$ 时，$s=4t-t^2$，$\therefore s=\begin{cases}3t, & -1\leqslant t<1\\ 4t-t^2, & 1\leqslant t\leqslant 3\end{cases}$.

因此本程序的功能是计算分段函数的值域，至此，问题迎刃而解.

$\because$当 $t\in[-1,1)$ 时，$s=3t\in[-3,3)$；当 $t\in[1,3]$ 时，$s=4t-t^2$ 是一段开口向下的抛物线，因此，当 $t=-\dfrac{B}{2A}=-\dfrac{4}{2\times(-1)}=2\in[1,3]$ 时，　抛物线的对称轴为 $t=2$

$s_{\max}=\dfrac{4AC-B^2}{4A}=\dfrac{-4^2}{4\times(-1)}=4$，且 $s_{\min}=s(1)=s(3)=4\times3-3^2=3$，即 $s=4t-t^2\in[3,4]$，

$\therefore s\in[3,4]$．故选 A，不选 BCD.

例 11.3 （甲 1710/58）执行如图 11.3 所示的程序框图，如果输入的 $a=-1$，则输出的 S 为（　）.

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

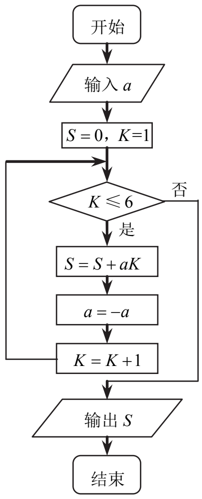


图 11.3

解析：$\because$初始化数据：$a=-1$，$K=1$，$S=0$．且循环条件为：$K\leqslant 6$.

$\therefore$循环过程执行结果如下：

第一次：

$S=S+aK=0+(-1)\times1=-1$，$a=-a=1$，$K=K+1=2<6$；

第二次：

$S=S+aK=-1+1\times2=1$，$a=-a=-1$，$K=K+1=3<6$；

第三次：

$S=S+aK=1+(-1)\times3=-2$，$a=-a=1$，$K=K+1=4<6$；

第四次：

$S=S+aK=-2+1\times4=2$，$a=-a=-1$，$K=K+1=5<6$；

第五次：

$S=S+aK=2+(-1)\times5=-3$，$a=-a=1$，$K=K+1=6\leqslant 6$；

第六次：

$S=S+aK=-3+1\times6=3$，$a=-a=-1$，$K=K+1=7>6$.

结束循环，输出 $S=3$．故选 B，不选 ACD.

例 11.4 （甲 1508/58）如图 11.4 所示程序框图的算法思路来源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”，执行该程序框图，若输入的 a，b 分别为 14，18，则输出的 a 为（　）.

A．0　　B．2　　C．4　　D．14

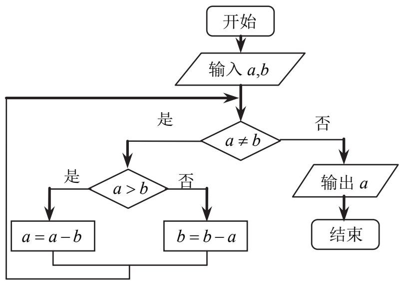


图 11.4

解析：由于程序框图中有两个菱形的“判断框”，因此，本程序包含两个条件结构，其中外层的分支条件（也是内层的循环条件）是“$a\neq b$”，而内层的分支条件是“$a>b$”.

第 1 次：$\because a=14<b=18$，$\therefore b=b-a=18-14=4$，$a=14$；

第 2 次：$\because a=14>b=4$，$\therefore a=a-b=14-4=10$，$b=4$；

第 3 次：$\because a=10>b=4$，$\therefore a=a-b=10-4=6，b=4$；

第 4 次：$\because a=6>b=4$，$\therefore a=a-b=6-4=2，b=4$；

第 5 次：$\because a=2<b=4$，$\therefore b=b-a=4-2=2，a=2$；

第 6 次：$\because a=2，b=2$，$\therefore$输出 $a=2$．

本题的实质是计算输出的两个数 a，b 的最大公约数．故选 B，不选 ACD．

例 11.5（甲 1609/58）中国古代有计算多项式值的秦九韶算法，图 11.5 是实现该算法的程序框图，执行该程序框图，若输入的 $x=2$，$n=2$．依次输入的 a 为 2，2，5，则输出的 $s=$（　）．

A．7　　B．12　　C．17　　D．24

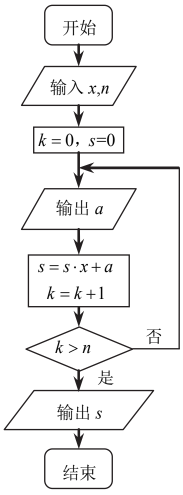


图 11.5

解析：$\because$输入 x，n，初始化 $k=0$，$s=0$，且循环条件为 $k>n$，

$\therefore$这是一个根据输入数据确定循环次数的输出结果问题．

因此，在输入了 $x=2$，$n=2$ 之后，对依次输入的数据处理结果如表 11.1 所示．

表 11.1

a	2	2	5
$k=k+1$	1	2	3
$s=s\cdot x+a$	2	6	17
$x=2$，$n=2$	$k<n$	$k=n$	$k>n$

故选 C，不选 ABD．

例 11.6（甲 1408/57）执行如图 11.6 所示的程序框图，如果输入的 x，t 均为 2，则输出的 $S=$（　）．

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

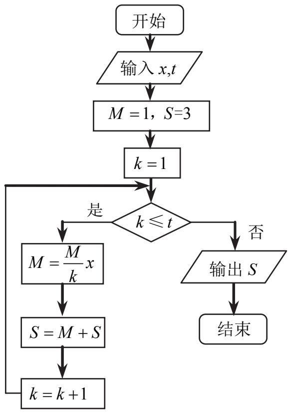


图 11.6

解析：当输入 $x=2$，$t=2$ 时，循环条件 $k\leqslant 2$．如表 11.2 所示．

表 11.2

k	$M=\dfrac{M}{k}x$	$S=M+S$	$k=k+1$
1	1	3	1
2	2	5	2
3	2	7	$k=3>t$，输出 $S=7$

故选 D，不选 ABC．

例 11.7（京 1553）执行如图 11.7 所示的程序框图，输出的结果为（　）．

A．$(-2,2)$　　B．$(-4,0)$　　C．$(-4,-4)$　　D．$(0,-8)$

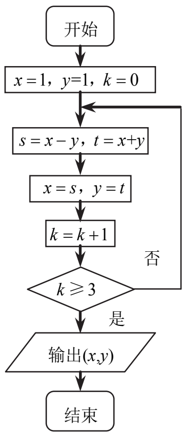


图 11.7

解析：由程序框图可见：循环变量为 k，循环条件为 $k\geqslant 3$．

循环主体是$\begin{cases}x=s=x-y\\y=t=x+y\end{cases}$，且初始值已知，为此列表 11.3．

表 11.3

$s=x-y$	$t=x+y$	$x=s$	$y=t$	$k=k+1$
		1	1	0
0	2	0	2	1
–2	2	–2	2	2
–4	0	–4	0	3
–4	–4	–4	–4	4

故选 B，不选 ACD．

注意：本题的关键是要将“$k\geqslant 3$”的“否”循环条件改为“$k<3$”的“是”循环，因此当$k=3$时即输出结果(x,y)；其次本题输出的不是一个数据，而是一组数据.

例 11.8（甲 1307/56）执行如图 11.8 所示的程序框图，如果输入的$N=4$，那么输出的$S=$（　）.

A. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$　　B. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 2}+\frac{1}{4\times 3\times 2}$

C. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$　　D. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 2}+\frac{1}{4\times 3\times 2}+\frac{1}{5\times 4\times 3\times 2}$

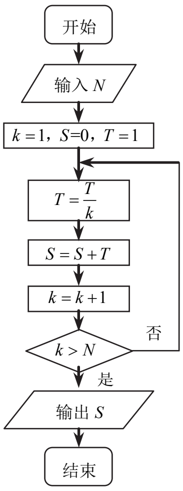


图 11.8

解析：当输入$N=4$时，循环条件为$k\leqslant 4$.

第一次循环：$T=1$，$S=1$，$k=2$；

第二次循环：$T=\frac{1}{2}$，$S=1+\frac{1}{2}$，$k=3$；

第三次循环：$T=\frac{1}{2\times 3}$，$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}$，$k=4$；

第四次循环：$T=\frac{1}{2\times 3\times 4}$，$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}$，$k=5$，此时满足条件$k>N$，输出$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}$，故选 B，不选 ACD.

条件 1.2　给定循环条件

条件分析：对于给定循环条件求输出结果的问题，可以根据循环次数和循环主体的变化判断其是否符合循环条件，从而确定输出结果.

例 11.9（鲁 1411）执行如图 11.9 所示的程序框图，若输入的x的值为 1，则输出的n的值为____.

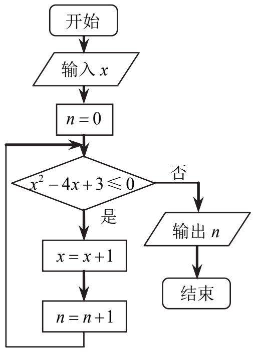


图 11.9

解析：由循环条件$x^2-4x+3\leqslant 0$，解得：$1\leqslant x\leqslant 3$.

由于题设：初始输入$x=1$. 因此：

第一次判断后循环，

　　$x=x+1=2$，$n=n+1=1$；

第二次判断后循环，

　　$x=x+1=3$，$n=n+1=2$；

第三次判断后循环，

　　$x=x+1=4$，$n=n+1=3$；

第四次判断时，

　　$\because x=4$，不满足循环条件$1\leqslant x\leqslant 3$，

　　$\therefore$结束循环，输出$n=3$. 故填“3”.

例 11.10（川 1406）执行如图 11.10 所示的程序框图，如果输入的x，$y\in\mathbf{R}$，那么输出的S的最大值为（　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

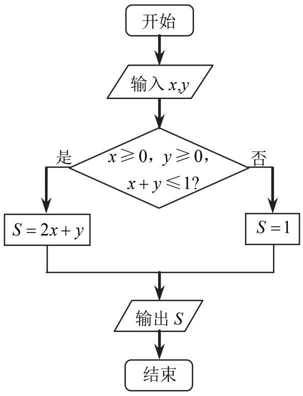


图 11.10

解析：由于循环条件由线性约束条件确定的可行域决定，而程序主体是根据输入的坐标(x,y)是否位于线性约束区域来判断输出变量的计算方式.

因此，必须先画出线性约束区域，再算出作为输出变量的目标函数$S=2x+y$的最大值与“1”进行比较，最后取两者中较大者作为输出变量的最大值.

又∵目标函数可以化为 $y=-2x+S$，∴如图 11.11 所示，当 $y=-2x+S$ 移动到过点 A 时，截距最大，即目标函数最大.

将 $y=0$ 代入 $x+y=1$ 可得 $x=1$，即点 $A(1,0)$. 将 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ 代入目标函数可得：

$S_{\max}=2x+y=2\times1+0=2>1$.

故本题应选 C，而不选 ABD.

注意： 此处求出 $S_{\max}=2$ 后，还需要与输入的 (x,y) 不在约束区域时输出的"$S=1$"进行比较，最终确定输出 S 的最大值为 2. 如果程序框图中的"$S=1$"处是"$S=3$"，那么输出 S 的最大值就是 3 了！

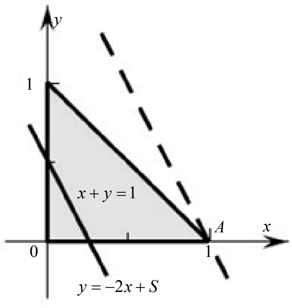


图 11.11

问题 2　计算循环次数

问题分析： 研究循环次数问题首先必须明确表示所求次数的循环变量，然后再依据设定的循环主体或循环变量的条件来确定循环次数.

条件 2.1　给定循环条件

条件分析： 对于给定循环条件求循环次数的问题，可以在有限的循环次数内，依次写出每次循环之后各变量的值，最后根据循环条件确定需要循环的次数.

例 11.11（乙 1509/59）执行如图 11.12 所示的程序框图，如果输入的 $t=0.01$，则输出的 $n=$（　）.

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

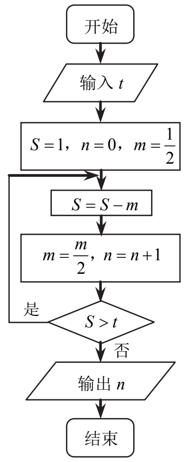


图 11.12

解析 1：（列表法）题设 $t=0.01$，且初始赋值 $S=1$，$n=0$，$m=\frac{1}{2}$.

∵条件结构中判断语句为：$S>t$，

∴循环条件为：$S>0.01$. 如表 11.4 所示.

表 11.4

循环次数	1	2	3	4	5	6	7	说明
$S=S-m$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}<\frac{1}{100}=0.01$
$m=\frac{m}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	完成第 6 次循环后第 7 次执行程序，输出第 6 次循环结果
$n=n+1$	1	2	3	4	5	6	7	

解析 2：（计算法）（题设 $t=0.01=\frac{1}{100}$，判断循环条件 $S>t$，即输出条件 $S\leqslant t$.）

初始赋值：$S=1$，$n=0$，$m=\frac{1}{2}$.

第 1 次：$S=S-m=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$m=\frac{m}{2}=\frac{1}{4}$，$n=n+1=1$，$S=\frac{1}{2}>t=\frac{1}{100}$，循环；

第 2 次：$S=S-m=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，$m=\frac{m}{2}=\frac{1}{8}$，$n=n+1=2$，$S=\frac{1}{4}>t=\frac{1}{100}$，循环；

第 3 次：$S=S-m=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$，$m=\frac{m}{2}=\frac{1}{16}$，$n=n+1=3$，$S=\frac{1}{8}>t=\frac{1}{100}$，循环；

第 4 次：$S=S-m=\frac{1}{8}-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}$，$m=\frac{m}{2}=\frac{1}{32}$，$n=n+1=4$，$S=\frac{1}{16}>t=\frac{1}{100}$，循环；

第 5 次：$S=S-m=\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{32}=\dfrac{1}{32}$，$m=\dfrac{m}{2}=\dfrac{1}{64}$，$n=n+1=5$，$S=\dfrac{1}{32}>t=\dfrac{1}{100}$，循环；

第 6 次：$S=S-m=\dfrac{1}{32}-\dfrac{1}{64}=\dfrac{1}{64}$，$m=\dfrac{m}{2}=\dfrac{1}{128}$，$n=n+1=6$，$S=\dfrac{1}{64}>t=\dfrac{1}{100}$，循环；

第 7 次：$S=S-m=\dfrac{1}{64}-\dfrac{1}{128}=\dfrac{1}{128}<t=\dfrac{1}{100}$，$m=\dfrac{m}{2}=\dfrac{1}{256}$，$n=n+1=7$，循环结束，输出 n=7.

故选 C，不选 ABD.

例 11.12 （丙 1608/57）执行如图 11.13 所示的程序框图，如果输入的 $a=4$，$b=6$，那么输出的 $n=$（　）.

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

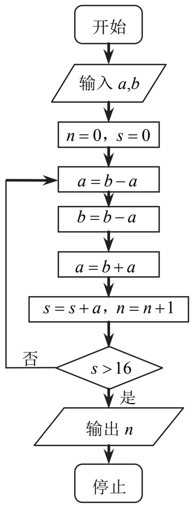


图 11.13

解析：由于题设输入 $a=4$，$b=6$，初始化 $b=0$，$s=0$，且条件结构的分支条件是 $s>16$．由于循环是依据“否”来进行的，因此，循环的条件应该改写为 $s\leqslant 16$．

循环过程如表 11.5 所示.

表 11.5

$a=b-a$	6－4=2	4－6=－2	6－4=2	4－6=－2
$b=b-a$	6－2=4	4－(－2)=6	6－2=4	4+2=6
$a=b+a$	4+2=6	6－2=4	4+2=6	6－2=4
$n=n+1$	1	2	3	4
$s=s+a$	0+6=6	6+4=10	10+6=16	16+4=20

故选 B，不选 ACD

问题 3 完善程序功能（补写程序代码）

问题分析：对于需要通过补写程序代码来完善程序功能的问题，往往需要根据程序结构，通过分析程序的循环条件或循环次数来确定循环主体或循环变量，并结合题目给定的选项，最终确定需要补写的程序代码.

条件 3.1　给定循环主体

条件分析：对于给定循环主体求循环次数的问题，可以在有限的循环次数内，依次写出每次循环之后各变量的值，最后根据循环条件确定需要循环的次数.

例 11.13（乙 1710/58）如图 11.14 所示的程序框图是为了求出满足 $3^n-2^n>1000$ 的最小偶数 n，那么在◇和□两个空白框中，可以分别填入（　）.

A．$A>1000$ 和 $n=n+1$　　B．$A>1000$ 和 $n=n+2$

C．$A\leqslant 1000$ 和 $n=n+1$　　D．$A\leqslant 1000$ 和 $n=n+2$

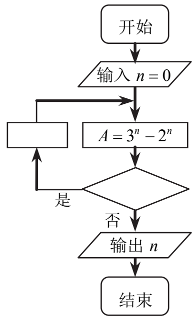


图 11.14

解析：由于题干给定了两个需要填写程序的程序框分别是◇和□，因此，在◇内必须填写“分支条件”，而在□内必须填写“处理语句”．且由程序框图可见：程序主体是“$A=3^n-2^n$”，循环变量是 n．$\because A(n)=3^n-2^n$，$\therefore$ 令 $f(x)=3^x-2^x$，则 $f'(x)=3^x\ln 3-2^x\ln 2>3^x\ln 2-2^x\ln 2=(3^x-2^x)\ln 2>0$，因此随着 n 的增加，$f(x)=3^x-2^x$ 的值不断增大.

数列构成的函数，自变量 n 是不连续的，不能直接求导

因此，随着 n 的增加，A 的值不断增大.

由于程序在“否”输出，因此判断框内的“输出条件”不能是“大于”而只能是“小于等于”，因此排除 A，B 选项.

此处，很容易受到题干中“$3^n-2^n>1000$”的影响

另外，题干要求“最小偶数”，因此，在初始值 $n=0$ 的条件下，需要设置 $n=n+2$ 做循环.

如果初始值为 $n=1$，那么依旧需要设置 $n=n+2$ 做循环，只是输出 $n-1$ 即可，问题就更复杂一些了.

故选 D，不选 ABC.

由此可见：在循环程序中，变量的初始赋值也是十分重要的一项工作

例 11.14 （渝 1455）执行如图 11.16 所示的程序框图，若输出 k 的值为 6，则判断框图可填入的条件是（　）.

A．$s>\frac{1}{2}$　　B．$s>\frac{3}{5}$　　C．$s>\frac{7}{10}$　　D．$s>\frac{4}{5}$

解析：由于本题的目的是寻找“循环条件”使得输出的 $k=6$，因此，可以按照程序执行循环的次数依次写出每次循环之后的 k 值和 s 值，通过研究 s 值的变化趋势或规律，最终确定 s 值的“界限”作为循环条件.

由程序框图可知：循环变量为 $k=k-1$，初始值 $k=9$，$s=1$，故程序运行后的 k 值依次为 8，7，6．程序每次循环运行后的数据如表 11.6 所示.

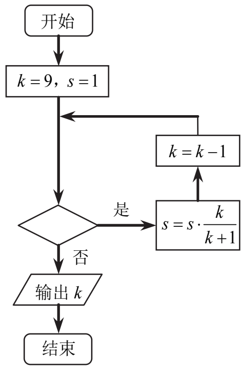


图 11.15

表 11.6

循环次数	$s=s\cdot\frac{k}{k+1}$	$k=k-1$
1	$1\times\frac{9}{9+1}=\frac{9}{10}$	8
2	$\frac{9}{10}\times\frac{8}{8+1}=\frac{8}{10}$	7
3	$\frac{8}{10}\times\frac{7}{7+1}=\frac{7}{10}$	6
4	$\frac{7}{10}\times\frac{6}{6+1}=\frac{6}{10}$	5

由此可见：在程序运行过程中，s 值在逐渐减小，且必须运行到 $\frac{7}{10}$ 时才能保证 $k=6$．即当程序运行 3 次之后，$s=\frac{7}{10}$，$k=6$，因此，确保程序能够运行三次的条件是 $s>\frac{7}{10}$ 或 $s\geqslant\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$．故选 C，不选 ABD.

例 11.15 （赣 1307）阅读如图 11.16 所示的程序框图，如果输出 $i=4$，那么空白的判断框中应填入的条件是（　）.

A．$S<8$　　B．$S<9$

C．$S<10$　　D．$S<11$

解析：依次运行 i=1，2，3，4 时，$S=0$，5，8，9．若输出 i=4，则表示 S=8 时运行“是”；当 s=9 时运行“否”，故选 B，不选 ACD.

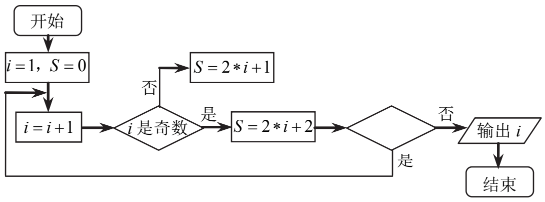


图 11.16

例 11.16 （甲 1808/57）为计算 $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$，设计了如图 11.17 所示的程序框图，则在空白框中应填入（　）.

A．$i=i+1$　　B．$i=i+2$　　C．$i=i+3$　　D．$i=i+4$

解析：∵输出 $S=N-T$，且目的是为了计算

$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$.

数学观察：用数学的眼光观察问题

∴对比可得：$N=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}$；$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}$.

类比方法

即 N 是奇数项之和，T 是偶数项之和，因此 $i=i+2$．故选 B，不选 ACD.

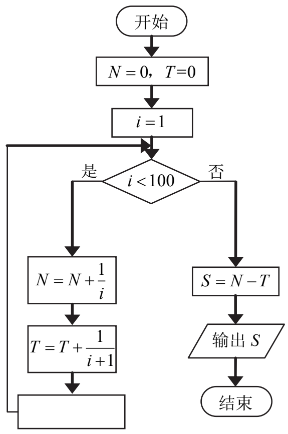


图 11.17

问题 4 确定程序输出的双变量关系

问题分析：对于需要确定程序输出的双变量之间的关系问题，需要根据程序主体、循环变量及双变量输出时的关系来确定.

条件 4.1 给定循环主体及双变量各自的变化规律

条件分析：对于给定循环主体及双变量各自的变化规律求输出双变量的关系问题，可以在有限的循环次数内，依次写出每次循环之后各个变量的值，最后根据循环条件确定输出双变量的关系.

例 11.17 （乙 1610/59）执行如图 11.18 所示的程序框图，如果输入的 x=0，y=1，n=1，则输出 x，y 的值满足（ ）.

A．$y=2x$　　B．$y=3x$　　C．$y=4x$　　D．$y=5x$

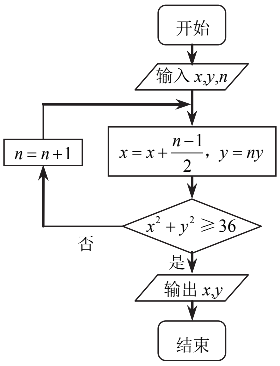


图 11.18

解析：循环过程如表 11.7 所示.

表 11.7

	1	2	3
x	0	$\frac{1}{2}=0+\frac{2-1}{2}$	$\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3-1}{2}$
y	$1=1\times1$	$2=2\times1$	$6=3\times2$
x^2+y^2	1	$4\frac{1}{4}$	$1.5^2+6^2>36$

因此，输出 x，y 的值满足 $y=4x$．故选 C，不选 ABD.

问题 5 确定初始输入数据（循环变量阈值）

问题分析：对于需要确定初始输入数据的问题，需要根据程序主体、循环变量及输出结果来确定.

条件 5.1 给定循环主体及输出结果

条件分析：对于给定循环主体及输出结果来确定初始输入数据的问题，可以在有限的循环次数内，依次写出每次循环之后循环变量和循环主体的值，最后根据循环结果的要求确定循环次数，进而根据循环条件确定初始输入数据.

例 11.18 （丙 1708/57）执行如图 11.19 所示的程序框图，为使输出 S 的值小于 91，则输入的正整数 N 的最小值为（ ）.

A．5　　B．4　　C．3　　D．2

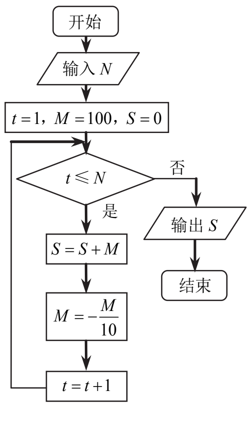


图 11.19

解析：初始化数据：$t=1$，$M=100$，$S=0$，然后进入循环.

第一次循环：$S=S+M=0+100=100>91$，$M=-\frac{M}{10}=-\frac{100}{10}=-10$，$t=t+1=1+1=2$.

第二次循环：$S=S+M=100-10=90<91$，$M=-\frac{M}{10}=-\frac{-10}{10}=1$，$t=t+1=2+1=3$.

此时满足 $S<91$，可以跳出循环，由此可见：循环两次即需跳出循环，此时，$t=3$，$S=90$.

因此，输入的正整数 N 的最小值为 2．故选 D，不选 ABC.

第 12 题　三角变换背景

12

背景知识

两角和公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

分子、分母同除以 $\cos\alpha\cos\beta$

两角差公式（令 $\alpha=x$，$\beta=-y$ ）

$\sin(x-y)=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$\cos(x-y)=\cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x+\tan(-y)}{1-\tan x\tan(-y)}=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}\text{，}\left(x\text{，}y\text{，}x-y\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\text{，}k\in\mathbf{Z}\right)$$

二倍角公式（令 $\alpha=x$，$\beta=x$ ）

$\sin 2x=\sin(x+x)=\sin x\cos x+\cos x\sin x=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\cos(x+x)=\cos x\cos x-\sin x\sin x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

$$\tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\ \left(x\text{，}2x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\text{，}k\in\mathbf{Z}\right)$$

分子、分母同除以 $\cos^2 x$

半角公式

由 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ 可得：$\sin x=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$，即 $\sin\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$

由 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ 可得：$\cos x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}$，即 $\cos\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}\ \left(x\text{，}\frac{x}{2}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\text{，}k\in\mathbf{Z}\right)$$

问题 1　两角和（或差）的三角函数值计算

问题分析：对于两角和（或差）的三角函数计算问题，往往需要借助两角和（差）公式或者将所给条件中的两角和（或差）利用余角公式进行转化.

条件 1.1　给定未知角的范围及其正切函数值

条件分析：当给定未知角的范围及其某一种函数值时，一般都需要根据需要计算出该角的其他函数值，作为隐含条件用于后续的计算.

例 12.1　（乙 1715）已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=2$，则 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$__________.

解析 1：（从条件出发）由 $\tan\alpha=2$ 可得：$\sin\alpha=2\cos\alpha$，

正切公式

又∵ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$， 基本公式

∴ $5\cos^2\alpha=1$，解得： $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{5}$. 列方程

又∵题设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，∴ $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$， 解方程

又∵ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}$， 差角公式

∴ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. 代入计算

解析 2：（从问题出发）∵ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}$， 差角公式

∴ $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha(1+\tan\alpha)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$， 明确目标

∵由 $\tan\alpha=2$ 可得： $\sin\alpha=2\cos\alpha$， 正切定义

∴代入基本公式： $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得： $5\cos^2\alpha=1$， 列方程

解得：$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$（∵ $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，∴舍负值），代入上式可得：$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

解方程

经验总结：比较两种解法可见，从所求问题出发更容易找到解决问题的目标 $\cos\alpha$.

条件 1.2　给定未知角的范围及其与 45°角的和角正弦函数值

条件分析：当给定未知角的范围及其与已知角的某一种函数值时，往往需要根据该函数值判定和角的范围和所求角的范围，为后续计算奠定基础.

例 12.2　（乙 1614）已知 θ 为第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$ ，则 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=$__________.

解析 1：（从条件出发）∵题设 θ 为第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$，

∴ $2k\pi<\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$， $\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$是第一象限角

故 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)<2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$， 上式两边同时减去 $\dfrac{\pi}{2}$ 将 $\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 凑成 $\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

因此，$\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 也是第四象限角，故 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)<0$，

由 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$ 可得： $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$，由余角公式可得： $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{5}$.

由基本公式可得： $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\pm\dfrac{4}{5}$，∵ $\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 还是第四象限角，∴ $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{4}{5}<0$，

故 $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{4}{3}$.

解析 2：（从问题出发）

$\because \tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，

$\therefore$ 明确目标求 $\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$. $\because$ 题设 θ 为第四象限角，且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{5}$，

$\therefore \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，　无论 $\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ 在第四象限还是在第一象限，其余弦值均为正值

故 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$.

经验总结：遇到给定未知角与 45° 角之和（或差）的三角函数来求未知角与 45° 角之差（或和）的三角函数值时，往往可以利用余角公式将所求的“两角”差（或和）转化为“两角”和（或差）的三角函数. 即将所给的两角和（或差）看成是一个整体.

余角公式： $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$，$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

例 12.3 （甲 1815）已知 $\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，则 $\tan\alpha=$ ＿＿＿＿＿＿.

解析 1：$\because$ 题设 $\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，$\therefore \frac{\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)}=\frac{1}{5}$，　利用正切函数与正弦、余弦函数的关系

即 $\frac{\sin\alpha\cos\frac{5\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{5\pi}{4}}{\cos\alpha\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{5\pi}{4}}=\frac{1}{5}$，　利用正弦函数和余弦函数的和角公式

亦即 $\frac{\sin\alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\cos\alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\cos\alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sin\alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{5}$.　$\because$ 角 $\frac{5\pi}{4}$ 在第三象限，$\therefore$ 利用特殊角的正弦和余弦函数值

两边交叉相乘可得：$5(\sin\alpha-\cos\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha$，即 $4\sin\alpha=6\cos\alpha$，亦即 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{2}$.

解析 2：$\because$ 题设 $\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，

$\therefore \frac{\tan\alpha+\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}{1-\tan\alpha\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)}=\frac{1}{5}$，　将 $\alpha-\frac{5\pi}{4}$ 看成 $\alpha+\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$，运用正切和角公式

$\because$ 角 $-\frac{5\pi}{4}$ 在第二象限，$\therefore \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=-1$，代入上式可得：$\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{1}{5}$.

两边交叉相乘可得：$5(\tan\alpha-1)=1+\tan\alpha$，即 $4\tan\alpha=6$，解得：$\tan\alpha=\frac{3}{2}$.

问题 2 二倍角的三角函数值计算

问题分析：对于二倍角的三角函数计算问题，往往需要借助二倍角公式，再结合所给条件进行转化.

条件 2.1 给定 45°角与未知角之差的余弦值

条件分析：对于给定 45°角与未知角之差的余弦值的问题，可以利用两角差的余弦公式进行展开，获得未知角的正弦函数值与余弦函数值之和.

例 12.4 （甲 1659）若 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$（　）.

A. $\dfrac{7}{25}$　　B. $\dfrac{1}{5}$　　C. $-\dfrac{1}{5}$　　D. $-\dfrac{7}{25}$

解析 1：（从条件出发）$\because \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{3}{5}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，即 $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，两边平方可得：$1+\sin 2\alpha=\dfrac{18}{25}$，解得：$\sin 2\alpha=-\dfrac{7}{25}$，故选 D，不选 ABC.

解析 2：（从问题出发）

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]^2-1=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-1=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25},$$

或 $\sin 2\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\cos 2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-1=2\times\dfrac{9}{25}-1=-\dfrac{7}{25}$，故选 D，不选 ABC.

条件 2.2 给定未知角的正弦与余弦的函数值之差

条件分析：对于给定未知角的正弦与余弦函数值之差的条件的问题，可以先平方，再利用正弦和余弦的平方和等于 1 来求得未知角的二倍角正弦函数值.

例 12.5 （丙 1704）已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{4}{3}$，则 $\sin 2\alpha=$（　）.

A. $-\dfrac{7}{9}$　　B. $-\dfrac{2}{9}$　　C. $\dfrac{2}{9}$　　D. $\dfrac{7}{9}$

解析 1：（从条件出发）$\because (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin 2\alpha$，　正弦倍角公式

$\therefore \sin 2\alpha=1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\dfrac{16}{9}=-\dfrac{7}{9}$.

解析 2：（从问题出发）$\because \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，　正弦倍角公式

且 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha$，　从条件出发

$\therefore$ 两式相加可得：$\sin 2\alpha+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1$.　将 $2\sin\alpha\cos\alpha$ 看成一个整体，消去

解得：$\sin 2\alpha=1-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-\dfrac{16}{9}=-\dfrac{7}{9}$.

解析 3：（从问题出发）$\sin 2\alpha=-\left[(\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1\right]=-\left(\dfrac{16}{9}-1\right)=-\dfrac{7}{9}$，所以选 A，不选 BCD.

条件 2.3 给定未知角的正切函数值

条件分析：对于给定未知角正切的问题，可以先将问题转化为包含正切的三角函数式，再进行计算.

例 12.6 （丙 1606）若 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2\theta=$（　）.

A. $-\dfrac{4}{5}$　　B. $-\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

解析 1：$\because \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，$\therefore$ 问题转化为求 $\sin^2\theta$ 和 $\cos^2\theta$.

由 $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ 可得：$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}$，即 $\cos\theta=3\sin\theta$，代入 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 可得：$10\sin^2\theta=1$，

解得：$\sin^2\theta=\dfrac{1}{10}$，从而 $\cos^2\theta=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$，$\therefore \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{9}{10}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$.

解析 2：$\because \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，故选 D，不选 ABC.

> **经验总结**：遇到含有 $\sin^2\theta$ 或 $\cos^2\theta$ 的式子，给它凑一个等于 1 的分母 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$，有时会使问题的处理更加简单.

例 12.7 （丙 1804/54）若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$（　）.

A. $\dfrac{8}{9}$　　B. $\dfrac{7}{9}$　　C. $-\dfrac{7}{9}$　　D. $-\dfrac{8}{9}$

解析：$\because \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$.　　余弦函数倍角公式

$\therefore \cos 2\alpha=1-2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=1-2\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{9}$. 故选 B，不选 ACD.

条件 2.4　给定未知角的正切取值范围

条件分析：对于给定未知角的正切取值范围问题，可以先将条件转化为角所对应的区间，然后再研究所求问题.

例 12.8 （乙 1402）若 $\tan\alpha>0$，则（　）.

A. $\sin\alpha>0$　　B. $\cos\alpha>0$　　C. $\sin 2\alpha>0$　　D. $\cos 2\alpha>0$

解析：$\because$ $\tan\alpha>0$，$\therefore k\pi<\alpha<k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 α 终边在第一、三象限，当 α 终边在第三象限时，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 皆小于 0，排除 A，B 选项.

将 $k\pi<\alpha<k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 两边同乘以 2 可得：$2k\pi<2\alpha<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 2α 角的终边在第一、二象限或 y 轴非负半轴，所以正确的结论只有 $\sin 2\alpha>0$. 故选 C，不选 ABD.

问题 3　多个已知角的三角函数式计算

问题分析：对于求多个已知角的三角函数值问题，关键在于发现所给角度之间的关系.

条件 3.1　给定两个已知角的三角函数式

条件分析：对于给定两个已知角的三角函数式，关键在于“发现”两角的“和”或“差”是否为常见角度，然后再将所给函数式与两角和（差）公式进行对比，或者将相乘的两项用“积化和差”，或将相加的两项用“和差化积”.

例 12.9 （乙 1552） $\sin20^\circ\cos10^\circ-\cos160^\circ\sin10^\circ=$（　）.

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

解析： 原式 $=\sin20^\circ\cos10^\circ-\cos\left(180^\circ-20^\circ\right)\sin10^\circ=\sin20^\circ\cos10^\circ+\cos20^\circ\sin10^\circ$

$=\sin\left(20^\circ+10^\circ\right)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$，故选 D，不选 ABC.

例 12.10 （渝 1359） $4\cos50^\circ-\tan40^\circ=$（　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}-1$

解析： 本题的关键在于出现了 10° 和 40°，要能想到利用 $40^\circ-10^\circ=30^\circ$ 这三个特殊角之间的关系进行计算.

$$\text{原式}=4\sin40^\circ-\frac{\sin40^\circ}{\cos40^\circ}=\frac{4\sin40^\circ\cos40^\circ-\sin40^\circ}{\cos40^\circ}=\frac{2\sin80^\circ-\sin40^\circ}{\cos40^\circ}$$

$$=\frac{2\cos10^\circ-\sin40^\circ}{\cos40^\circ}=\frac{2\cos(40^\circ-30^\circ)-\sin40^\circ}{\cos40^\circ}$$

$$=\frac{2\times\left(\cos40^\circ\cos30^\circ+\sin40^\circ\sin30^\circ\right)-\sin40^\circ}{\cos40^\circ}$$

$=\frac{\sqrt{3}\cos40^\circ}{\cos40^\circ}=\sqrt{3}$，故选 C，不选 ABD.

> **和差化积公式：**
>
> $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$；$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$；
>
> $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$；$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
>
> **积化和差公式：** 设 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$y=\frac{\alpha-\beta}{2}$，则 $\alpha=x+y$，$\beta=x-y$，代入上式即可.

例 12.11 （甲 1865）已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$， $\cos\alpha+\sin\beta=0$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$__________.

解析： ∵已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$， $\cos\alpha+\sin\beta=0$，∴两式平方后相加可得：

$2+2\left(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\right)=1$，即 $2\sin\left(\alpha+\beta\right)=-1$，解得： $\sin\left(\alpha+\beta\right)=-\frac{1}{2}$.

问题 4 两角和三角函数的平方计算

问题分析： 对于求三角函数的平方问题，往往需要利用余弦的二倍角公式进行“降幂”.

条件 4.1　给定未知角二倍角的正弦函数值

条件分析： 对于给定二倍角的正弦函数值问题，往往无法直接从条件出发（有目标地）去“凑”问题的答案，而是应该从问题出发，寻找问题与条件之间的联系.

例 12.12 （甲 1306）已知 $\sin2\alpha=\frac{2}{3}$，则 $\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$（　）.

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

解析：∵ $\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\cos2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1-\sin2\alpha}{2}$， 余弦倍角公式、余角公式

∴ $\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\sin2\alpha}{2}=\frac{1-\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{6}$. 故选 A，不选 BCD.

问题 5 一次三角函数式的计算

问题分析：对于一次三角函数式的计算问题，往往需要利用辅助角公式来凑成两角和（或差）的三角函数，进而利用已知条件进行计算.

条件 5.1 给定未知角的范围及其与 45°角之和的正切函数值

条件分析：当给定了未知角的范围时，一般都需要通过题设条件来确定未知角与 45° 角之和所在的范围，并求出两角和的相应函数值.

例 12.13 （甲 1365）设 θ 为第二象限角，若 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$，则 $\sin\theta+\cos\theta=$________.

解析：∵ θ 为第二象限角，$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}>0$，∴ $\theta+\frac{\pi}{4}$ 为第三象限角.

又∵ $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\sin\theta\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$. 设 $\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$， $\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则 $\tan\alpha=\frac{a}{b}$. 当 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$， $\theta+\frac{\pi}{4}$ 是第三象限角，即 $a=1$，$b=2$ 时，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

∴ $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{5}$.

> 辅助角公式：$A\sin x+B\cos x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{B}{A}$.

问题 6 二次三角函数式的计算

问题分析：对于二次三角函数式的计算问题，往往需要先利用二倍角公式进行“降幂”，然后再利用其他公式进行计算.

条件 6.1 给定未知角的正切函数值

条件分析：当给定了未知角的正切函数值时，往往可以计算出未知角的正弦和余弦函数值.

例 12.14 （丙 1655）若 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，则 $\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=$（ ）.

A. $\frac{64}{25}$　　B. $\frac{48}{25}$　　C. 1　　D. $\frac{16}{25}$

解析 1：∵ $\tan\alpha=\frac{3}{4}$， 从条件出发

∴ $\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha$ 正弦倍角公式

$$=\frac{\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$$ 为了利用题设正切条件，凑分母

$$=\frac{1+4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}$$ 分子、分母同除以$\cos^2\alpha$，凑出$\tan\alpha$

$$=\frac{1+4\times\frac{3}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}=\frac{64}{25}.$$ 将$\tan\alpha=\frac{3}{4}$代入进行计算

解析 2：$\because \tan\alpha=\frac{3}{4}$， 从条件出发

$\therefore \sin\alpha=\pm\frac{3}{5}$， $\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$， $\because \tan\alpha>0$，$\therefore \sin\alpha$与$\cos\alpha$同号！

$$\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha=\frac{16}{25}+4\times\left(\pm\frac{3}{5}\right)\times\left(\pm\frac{4}{5}\right)=\frac{64}{25}.$$

解析 3：（从问题出发）

$\cos^2\alpha+2\sin2\alpha=\cos^2\alpha(1+4\tan\alpha)=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}(1+4\tan\alpha)=\frac{16}{25}\times(1+3)=\frac{64}{25}$，故选 A，不选 BCD

条件 6.2 给定未知角的正弦和余弦关系式

条件分析：当给定了未知角的正弦和余弦关系式时，往往可以先计算出未知角的正切函数值.

例 12.15 （川 1513）已知$\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，则$2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$的值是__________.

解析：$\because$由已知条件可得：$\tan\alpha=-2$，

$$\therefore 2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{-4-1}{4+1}=-1.$$

问题 7 三角函数式的最值计算

问题分析：对于三角函数式的最值计算问题，往往需要利用辅助角构造两角和的正弦函数或余弦函数进行求解.

条件 7.1 给定一个未知角的正弦和余弦函数值

条件分析：当给定了一个角的正弦和余弦函数时，往往借助辅助角构造未知角与辅助角的正弦或余弦三角函数式.

例 12.16 （甲 1713）函数$f(x)=2\cos x+\sin x$的最大值为________.

解析：$\because f(x)=2\cos x+\sin x=\sqrt{2^2+1^2}\left(\frac{2}{\sqrt5}\cos x+\frac{1}{\sqrt5}\sin x\right)=\sqrt5\sin(\varphi+x)\leqslant\sqrt5$，

$\therefore$函数$f(x)=2\cos x+\sin x$的最大值为$\sqrt5$.

例 12.17 （甲 1764）函数$f(x)=\sin^2x+\sqrt3\cos x-\frac{3}{4}\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$的最大值是__________.

解析：$\because f(x)=\sin^2x+\sqrt3\cos x-\frac{3}{4}=1-\cos^2x+\sqrt3\cos x-\frac{3}{4}=-\left(\cos x-\frac{\sqrt3}{2}\right)^2+1$且$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

$\therefore$当$x=\frac{\pi}{6}$，即$\cos x=\frac{\sqrt3}{2}$时，$f_{\max}(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$.

例 12.18　（乙 1866）已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$ 的最小值是________.

解析 1：（求函数的最值先求导，再解三角函数方程）

$\because f(x)=2\sin x+\sin 2x$，且其中 $\sin x$ 的周期为 2π，$\sin 2x$ 的周期为 π，

$\therefore$ 猜想：函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 的周期为 π 或 2π.

$\because f(x+\pi)=2\sin(x+\pi)+\sin 2(x+\pi)=-2\sin x+\sin 2x\neq f(x)$，

$f(x+2\pi)=2\sin(x+2\pi)+\sin 2(x+2\pi)=2\sin x+\sin 2x=f(x)$，

$\therefore$　函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$ 的最小正周期为 2π，因此，只需求 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的最小值.

又 $\because f(x)=2\sin x+\sin 2x$，$\therefore f'(x)=2\cos x+(\sin 2x)'_{2x}\cdot(2x)'_{x}=2\cos x+2\cos 2x$. 用到了复合函数求导

令 $f'(x)=0$ 可得：$2\cos x+2\cos 2x=0$，即 $\cos 2x+\cos x=0$.

利用二倍角公式可得：$2\cos^2 x+\cos x-1=0$.

由一元二次方程求根公式可得：$\cos x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{-1\pm 3}{4}$，解得：$\cos x_1=-1$，$\cos x_2=\dfrac{1}{2}$.

在 $[0,2\pi]$ 内由 $\cos x_1=-1$ 解得：$x_1=\pi$，此时，$f(x_1)=2\sin x_1+\sin 2x_1=0$.

在 $[0,2\pi]$ 内由 $\cos x_2=\dfrac{1}{2}$ 解得：$x_2=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $x_2=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}$.

此时，$f(x_2)=2\sin x_2+\sin 2x_2=2\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{2\pi}{3}=3\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

或者 $f(x_2)=2\sin x_2+\sin 2x_2=2\sin\dfrac{5\pi}{3}+\sin\dfrac{10\pi}{3}=2\sin\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

比较三个极点的函数值可见：$f_{\min}(x)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

解析 2：（求函数的最值先求导，再将三角函数当整体，分别计算极值，最后比较大小）

$\because f(x)=2\sin x+\sin 2x$，

$\therefore f'(x)=2\cos x+(\sin 2x)'_{2x}\cdot(2x)'_{x}=2\cos x+2\cos 2x$. 用到了复合函数求导

令 $f'(x)=0$ 可得：$2\cos x+2\cos 2x=0$，即 $\cos 2x+\cos x=0$.

利用二倍角公式可得：$2\cos^2 x+\cos x-1=0$，由一元二次方程求根公式可得：$\cos x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{-1\pm 3}{4}$，解得：$\cos x_1=-1$，$\cos x_2=\dfrac{1}{2}$.

当 $\cos x_1=-1$ 时，$\sin x_1=0$，$\sin 2x_1=0$，$f(x_1)=2\sin x_1+\sin 2x_1=0$.

当 $\cos x_2=\dfrac{1}{2}$ 时，$\sin x_2=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 2x_2=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$f(x_2)=2\sin x_2+\sin 2x_2=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

故 $f_{\min}(x)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

解析 3：（先用三角函数倍角公式化简，再使用基本不等式）

$\because f(x)=2\sin x+\sin 2x=2\sin x(1+\cos x)$，

$\therefore f^2(x)=4\sin^2 x(1+\cos x)^2=4(1-\cos x)(1+\cos x)^3=\dfrac{4}{3}(3-3\cos x)(1+\cos x)^3$.

利用基本不等式 $\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}\leqslant\dfrac{(1-\cos x)+(1+\cos x)}{2}$，即 $(1-\cos x)(1+\cos x)\leqslant\left[\dfrac{(1-\cos x)+(1+\cos x)}{2}\right]^2$ 可得：$f^2(x)\leqslant\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3(1-\cos x)+3(1+\cos x)}{4}\right)^4=\dfrac{4}{3}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^4=\dfrac{27}{4}$.

由于 $f(x)$ 是奇函数，因此 $-\frac{3\sqrt{3}}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $f_{\min}(x)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

条件 7.2 给定两个未知角的正弦和余弦函数值

条件分析：当给定了两个角的正弦和余弦函数值时，往往借助两角和公式、和差化积或积化和差公式进行化简.

例 12.19 （甲 1414/64）函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)-2\sin\varphi\cos x$ 的最大值为________．

解析：$\because$ $f(x)=\sin(x+\varphi)-2\sin\varphi\cos x=\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi-2\sin\varphi\cos x=\sin x\cos\varphi-\cos x\sin\varphi$

$=\sin(x-\varphi)$，

$\therefore$函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)-2\sin\varphi\cos x$ 的最大值为 1.

条件 7.3 给定未知角及二倍角的正弦和余弦函数值

条件分析：当给定未知角及二倍角的正弦和余弦函数值时，往往借助二倍角公式及和角公式，将函数式化成关于正弦函数或余弦函数的二次函数，构造一个关于正弦函数或余弦函数的二次复合函数.

例 12.20 （甲 1611）函数 $f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 的最大值为（　）.

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

解析：$\because f(x)=\cos 2x+6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1-2\sin^2 x+6\sin x=-2\left(\sin^2 x-3\sin x+\frac{3^2}{2^2}-\frac{3^2}{2^2}\right)+1$

$=-2\left(\sin x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$，$\therefore$当 $\sin x=1$时，$f_{\max}(x)=-2\times\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}=5$.

故选 B，不选 ACD.

第 13 题　三角函数背景

13

背景知识

三角函数的定义

设 $P(x,y)$ 是角 α 终边上任意一点，且 $|PO|=r(r>0)$，则有 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$（其中，$x\neq0$，且 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ）.

同角三角函数基本关系为：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，且 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z})$.

三角函数诱导公式

x	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$	$2\pi\pm\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos x$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$

三角函数线

设角 α 的终边在第三象限与单位圆交于点 $P(x,y)$，如图 13.1 所示，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，则有向线段 MP 称为角 α 的正弦线，OM 称为角 α 的余弦线.

过点 $A(1,0)$ 作 x 轴的垂线（即单位圆的切线），与角 α 的终边或其反向延长线交于点 T，则有向线段 AT 称为角 α 的正切线.

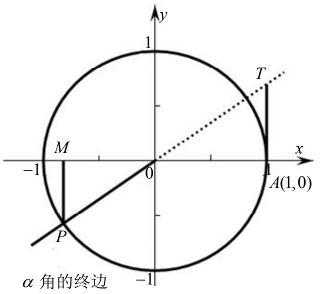


图 13.1

三角函数图像

形如 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的函数图像可以通过如下两种方式获得.

第一，五点作图法．令 $t=\omega x+\varphi$，则 $x=\dfrac{t-\varphi}{\omega}$．依次取 $t=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi$，算出对应的 x 值，描出五个特殊点连线作图.

第二，变换函数图像．通过“先平移后伸缩”或者“先伸缩后平移”的图像变换来获得.

三角函数的性质

（1）周期性：函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 与 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

（2）奇偶性：①当 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 为奇函数，$y=A\cos(\omega t+\varphi)$ 为偶函数；②当 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，由余角公式可得：$y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 为偶函数，$y=A\cos(\omega t+\varphi)$ 为奇函数.

（3）单调性：令 $t=\omega x+\varphi$，即将 $\omega x+\varphi$ 看成是一个整体，用类比 $y=A\sin t$ 的方法研究.

（4）对称性：（研究方法同上）.

问题 1 确定三角函数的解析式

问题分析：对于确定三角函数解析式的问题，基本思路是确定 $\omega x+\varphi$ 中的 ω 和 φ.

条件 1.1 给定三角函数图像

条件分析：通过给定的三角函数图像及特殊值来确定 ω 和 φ.

例 13.1（甲 1603）函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的部分图像如图 13.2 所示，则（　）.

A. $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　B. $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

C. $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　D. $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

解析：∵四个选项中，$A=2$，$\omega=2$，∴可设 $y=2\sin\left(2x+\varphi\right)$.

∵由图可见：当 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 时，$y=-2$，∴ $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)=-1$，

解得：$-\dfrac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，即 $\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}$.

又∵由图可见：当 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$y=2$，∴ $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+\varphi\right)=1$，

解得：$\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，即 $\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{3}=2k\pi-\dfrac{\pi}{6}$.

综上所述，当 $k=0$ 时，$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$. 故选 A，不选 BCD.

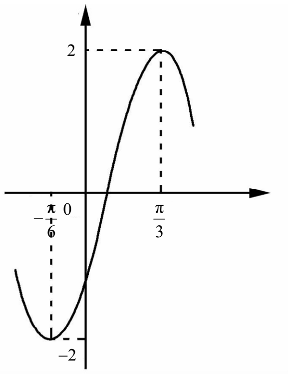


图 13.2

条件 1.2 给定三角函数含参方程

条件分析：当给定三角函数含参方程时，通过化简给定的三角函数方程来确定待定系数.

例 13.2（浙 1660）已知 $2\cos^2x+\sin 2x=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)+b\left(A>0\right)$，则 $A=$________，$b=$________.

解析：∵ $2\cos^2 x+\sin 2x=\cos 2x+1+\sin 2x$　　反用二倍角公式

$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)+1$$

利用辅助角 $\dfrac{\pi}{4}$

$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1,$$

反用两角和公式

∴由题设条件可得：$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)+b$，　　将题设条件进行转化

利用“恒等思想”可得：$A=\sqrt{2}$，$\omega=1$，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，$b=1$.

问题 2 确定三角函数的单调区间

问题分析：对于确定三角函数单调区间的问题，基本思路是将 $\omega x+\varphi$ 看成是一个整体与基本三角函数的单调区间进行类比.

条件 2.1 给定三角函数的图像

条件分析：当给定未知三角函数的图像时，一般都需要先根据函数图像确定三角函数的参数 ω 和 φ，

然后写出三角函数解析式，再将 $\omega x+\varphi$ 看成整体与基本三角函数进行类比.

例 13.3 （乙 1508/58）函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 的部分图像如图 13.3 所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为（　）.

A. $(k\pi-\frac{1}{4},k\pi+\frac{3}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$

B. $(2k\pi-\frac{1}{4},2k\pi+\frac{3}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $(k-\frac{1}{4},k+\frac{3}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$

D. $(2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$

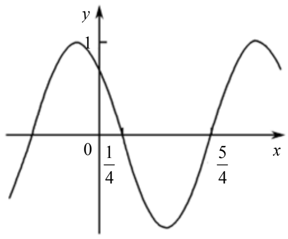


图 13.3

解析：∵题设 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$，且由图可见：当 $x=\frac{1}{4}$ 和 $x=\frac{5}{4}$ 时，$f(x)=0$.

∴由五点作图法可知：$\begin{cases}\frac{1}{4}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}\\ \frac{5}{4}\omega+\varphi=\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\omega=\pi\\ \varphi=\frac{\pi}{4}\end{cases}$，　基于图像上两横坐标点列方程求解

因此 $f(x)=\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$. ∵ $f(x)=\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的单调递减区间是 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$，

∴解 $2k\pi<\pi x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\pi$ 可得：$2k-\frac{1}{4}<x<2k+\frac{3}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

即 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(2k-\frac{1}{4},2k+\frac{3}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$，故选 D，不选 ABC.

问题 3　求三角函数的最小正周期

问题分析： 对于确定含正弦（余弦）函数最小正周期的问题，由于函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 与 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，因此关键在于确定 $|\omega|$.

条件 3.1　给定三角函数解析式

条件分析： 当给定三角函数的解析式时，可以依据 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$ 来计算含正弦或余弦函数的最小正周期，依据 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$ 来计算含正切或余切函数的最小正周期.

例 13.4 （甲 1703）函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为（　）.

A. 4π　　B. 2π　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

解析：由题意知：$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选 C，不选 ABD.

例 13.5 （乙 1407）在函数① $y=\cos|2x|$，② $y=|\cos x|$，③ $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，④ $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 中，最小正周期为 π 的所有函数为（　）.

A. ①②③　　B. ①③④　　C. ②④　　D. ①③

解析：①∵ $y=\cos|2x|$ 是偶函数，∴ $y=\cos|2x|=\cos 2x$，故最小正周期为 π，即①正确；

②∵ $y=|\cos x|$ 的最小正周期是 π，∴②也正确；

③∵ $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π，∴③也正确；

④∵ $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，∴④不正确．即正确答案为①②③，故选 A，不选 BCD.

例 13.6 （丙 1806）函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ 的最小正周期为（ ）.

A. $\dfrac{\pi}{4}$ B. $\dfrac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

解析：∵ $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}=\dfrac{\tan x\cdot\cos^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，∴ $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

本题 $\omega=2$

故选 C，不选 ABD.

例 13.7 （乙 1808）已知函数 $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2$，则（ ）.

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 3 B. $f(x)$ 的最小正周期为 π，最大值为 4

C. $f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 3 D. $f(x)$ 的最小正周期为 2π，最大值为 4

分析：∵四个选项的前一句都有“最小正周期”，后一句都有“最大值”，∴需要从这两个角度进行判断.

∵题设 $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2$ 中包含 $\cos^2 x$ 和 $\sin^2 x$，虽然 $\sin(x+\pi)=-\sin x$，$\cos(x+\pi)=-\cos x$，但是 $\sin^2(x+\pi)=\sin^2 x$，$\cos^2(x+\pi)=\cos^2 x$，因此 $f(x+\pi)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

解析 1：∵ $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2=2(1-\sin^2 x)-\sin^2 x+2=4-3\sin^2 x$，且在 $[0,\pi]$ 上，$(\sin^2 x)_{\min}=0$，∴ $f_{\max}(x)=4-3(\sin^2 x)_{\min}=4$．故选 B，不选 ACD.

解析 2：∵ $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2=2\cos^2 x-(1-\cos^2 x)+2=3\cos^2 x+1$，且在 $[0,\pi]$ 上，$(\cos^2 x)_{\max}=1$，∴ $f_{\max}(x)=3(\cos^2 x)_{\max}+1=4$.

解析 3：∵ $f(x)=2\cos^2 x-\sin^2 x+2=2\times\dfrac{1+\cos 2x}{2}-\dfrac{1-\cos 2x}{2}+2=\dfrac{3}{2}\cos 2x+\dfrac{5}{2}$.

∴最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，$f_{\min}(x)=\dfrac{3}{2}\times(-1)+\dfrac{5}{2}=1$，$f_{\max}(x)=\dfrac{3}{2}\times 1+\dfrac{5}{2}=4$．故选 B.

条件 3.2 给定三角函数的极值点不等式

条件分析：当给定已知三角函数的极值点不等式时，往往需要将极值点的横坐标与纵坐标代入极值点不等式进行求解.

例 13.8 （甲 1462）设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi x}{m}$．若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0 满足 $x_0^2+[f(x_0)]^2<m^2$，则 m 的取值范围是（ ）.

A. $(-\infty,-6)\cup(6,\infty)$ B. $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$ C. $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$ D. $(-\infty,-1)\cup(4,\infty)$

解析 1：∵当 $\dfrac{\pi x}{m}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$f(x)=\pm\sqrt{3}$，即当 $x_0=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)m$ 时，$f(x_0)=\pm\sqrt{3}$，

$[f(x_0)]^2=3$，即 $\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2 m^2+3<m^2$，

将题设条件转化为参数 m 与整数 k 的二元不等式

化简可得：$\left[1-\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2\right]m^2>3$，

将二元不等式转化成两个“有理式”的乘积

欲使上式成立，必须使$\left(k+\frac{1}{2}\right)^2<1$，解得：$-1<k+\frac{1}{2}<1$，即$-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$.

当取$k=-1$，0 时，均有$\left(k+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，此时，$\frac{3}{4}m^2>3$，即$m^2>4$．解得：$m\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

故选 C，不选 ABD.

解析 2：$\because$当$\frac{\pi x}{m}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$f(x)=\pm\sqrt{3}$，即当$x_0=\left(k+\frac{1}{2}\right)m$时，$f(x_0)=\pm\sqrt{3}$，$[f(x_0)]^2=3$，即$\left(k+\frac{1}{2}\right)^2m^2+3<m^2$，

将题设条件转化为参数 m 与整数 k 的二元不等式

化简可得：$m^2k^2+m^2k+3-\frac{3}{4}m^2<0$.

转换目标：为求 m 的取值范围需关注关于 k 的函数

令$g(k)=m^2k^2+m^2k+3-\frac{3}{4}m^2$，则$g(k)$是$k$的二次函数（$A=m^2$，$B=m^2$，$C=3-\frac{3}{4}m^2$），因此，原命题等价于：存在整数$k$，使得$g(k)<0$，从而只需$g_{\min}(k)<0$.

$\because A=m^2>0$，$\therefore g(k)$是一个开口向上的抛物线，且对称轴为$k=-\frac{B}{2A}=-\frac{m^2}{2m^2}=-\frac{1}{2}$，

又$\because k$为整数，$\therefore g(k)$只能在$k=-\frac{1}{2}$附近的整数处取最小值.

$k=-\frac{1}{2}$ 附近的整数为-1 和 0

计算可得：$g(-1)=g(0)=3-\frac{3}{4}m^2$.

恰遇 $g(-1)=g(0)$，否则还要比较两者大小取最小

由$g_{\min}(k)<0$可得：$3-\frac{3}{4}m^2<0$，$\frac{3}{4}m^2>3$，亦即$m^2>4$．解得：$m\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

故选 C，不选 ABD.

条件 3.3 给定三角函数的含参复合函数

条件分析：当给定三角函数的含参复合函数时，往往需要将极值点的横坐标与纵坐标代入极值点不等式进行求解.

例 13.9 （浙 1655）设函数$f(x)=\sin^2x+b\sin x+c$，则$f(x)$的最小正周期（　）.

A．与 b 有关，且与 c 有关　　B．与 b 有关，但与 c 无关

C．与 b 无关，且与 c 无关　　D．与 b 无关，但与 c 有关

解析：认真分析四个选项发现：结论主要集中在$f(x)$的最小正周期与b是否有关，与c是否有关．因此，按照与b是否有关选项可以分为两组：选项 A，B 与参数b有关，选项 C，D 与参数b无关；按照与c是否有关选项也可以分为两组：选项 A，D 与参数c有关，选项 B，C 与参数c无关.

由$f(x)=\sin^2x+b\sin x+c$可得：$f(x)-c=\sin^2x+b\sin x$.

令$F(x)=f(x)-c=\sin^2x+b\sin x$，则$F(x)$的图像是$f(x)$向上（或向下）移动$|c|$个长度单位的结果.

仿照“左加右减”，可得“上加下减”

因此，函数$f(x)=\sin^2x+b\sin x+c$的周期性与参数c无关，从而排除选项 A 和 C.

又$\because f(x)=\sin^2x+b\sin x+c=\frac{1-\cos2x}{2}+b\sin x+c=-\frac{1}{2}\cos2x+b\sin x+c+\frac{1}{2}$，

$\therefore$当$b=0$时，$f(x)=-\frac{1}{2}\cos2x+c+\frac{1}{2}$，最小正周期为$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

注意与 c 无关

当$b\neq0$时，$f(x)=\sin^2x+b\sin x+c=\left(\sin x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$，最小正周期为$T=2\pi$.

显然，函数$f(x)=\sin^2x+b\sin x+c$的最小正周期与参数b有关，因此排除选项 D．故选 B，不选 ACD.

问题 4 求三角函数的频率问题

问题分析：对于求三角函数的频率问题，关键是要将所给三角函数化成标准的 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的形式，然后确定三角函数的频率 ω.

条件 4.1 给定三角函数解析式及其指定区间无零点

条件分析：当给定三角函数解析式及其无零点的条件时，往往需要将三角函数解析式先进行化简，再研究其"零点"，进而通过自变量的范围来确定其频率.

例 13.10 （津 1608）已知函数 $f(x)=\sin^2\dfrac{\omega x}{2}+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}(\omega>0，x\in\mathbf{R})$. 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围可以是（　）.

A. $(0,\frac{1}{8}]$　　B. $(0,\frac{1}{4}]\cup[\frac{5}{8},1)$　　C. $(0,\frac{5}{8}]$　　D. $(0,\frac{1}{8}]\cup[\frac{1}{4},\frac{5}{8}]$

解析 1：$\because f(x)=\dfrac{1}{2}(1-\cos\omega x)+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}$　　反用二倍角公式，化为同角 ωx 的函数

$$=\frac{1}{2}(\sin\omega x-\cos\omega x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right),$$

$\therefore$ 令 $f(x)=0$ 可得：$\sin\left(\omega x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，

解得：$\omega x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}(k=0,1,2,\cdots)$，即 $x=\dfrac{1}{\omega}\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)(k=0,1,2,\cdots)$.

$\because$ 题设 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有零点，$\therefore x=\dfrac{1}{\omega}\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\pi$ 或 $x=\dfrac{1}{\omega}\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant 2\pi$.

$\because$ 题设 $\omega>0$，

$\therefore$ 由 $x=\dfrac{1}{\omega}\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\pi$ 可得：$\omega\geqslant k+\dfrac{1}{4}$，取 $k=0$ 可得：$\dfrac{1}{4}\leqslant\omega$.

由 $x=\dfrac{1}{\omega}\left(k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant 2\pi$ 可得：$\omega\leqslant\dfrac{1}{2}\left(k+\dfrac{1}{4}\right)$，取 $k=0$ 可得：$\omega\leqslant\dfrac{1}{8}$；取 $k=1$ 可得：$\omega\leqslant\dfrac{5}{8}$.

综上所述，ω 的取值范围可以是 $0<\omega\leqslant\dfrac{1}{8}$ 或 $\dfrac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{5}{8}$. 故选 D，不选 ABC.

解析 2：$\because f(x)=\dfrac{1}{2}(1-\cos\omega x)+\dfrac{1}{2}\sin\omega x-\dfrac{1}{2}$　　反用二倍角公式，化为同角 ωx 的函数

$$=\frac{1}{2}(\sin\omega x-\cos\omega x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right).$$

$\therefore$ 当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$\omega x-\dfrac{\pi}{4}\in\left(\omega\pi-\dfrac{\pi}{4},2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)$. 令 $t=\omega x-\dfrac{\pi}{4}$，则 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t$，且 $t\in\left(\omega\pi-\dfrac{\pi}{4},2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 上无零点. 由于题设 $\omega>0$，因此 $\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}$ 有可能小于零.

故由正弦函数图像可得：满足条件的最小正数 ω 应满足 $\begin{cases}\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\geqslant-\pi\\2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\geqslant 0\\2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\pi\end{cases}$.

解$\begin{cases}\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\geqslant-\pi\\2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant 0\end{cases}$可得：$\begin{cases}\omega\geqslant-\dfrac{3}{4}\\\omega\leqslant\dfrac{1}{8}\end{cases}$，∵题设$\omega>0$，∴解为$\begin{cases}\omega>0\\\omega\leqslant\dfrac{1}{8}\end{cases}$.

解$\begin{cases}\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\geqslant 0\\2\omega\pi-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\pi\end{cases}$可得：$\begin{cases}\omega\geqslant\dfrac{1}{4}\\\omega\leqslant\dfrac{5}{8}\end{cases}$. 综上所述，$\omega$（较小正数）的取值范围是$0<\omega\leqslant\dfrac{1}{8}$或$\dfrac{1}{4}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{5}{8}$.

故选 D，不选 ABC.

条件 4.2　给定三角函数的零点、对称轴及单调区间

条件分析：当给定三角函数的零点、对称轴及单调区间时，可以借助零点和对称轴建立辅助角的方法进行化简.

例 13.11（乙 1662）已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x=-\dfrac{\pi}{4}$为$f(x)$的零点，$x=\dfrac{\pi}{4}$为$y=f(x)$图像的对称轴，且$f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$上单调，则$\omega$的最大值为（　）.

A．11　　B．9　　C．7　　D．5

解析：∵ $x=-\dfrac{\pi}{4}$为$f(x)$的零点，$x=\dfrac{\pi}{4}$为$y=f(x)$图像的对称轴，

∴ $nT+\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{4}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，即$nT+\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，　①

或$nT+\dfrac{3T}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.　②

将$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$代入①式可得：$\omega=4n+1$，据此可知：在四个选项中，当$n=2$时，应选 B.

将$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$代入②式可得：$\omega=4n+3$，据此可知：在四个选项中，当$n=2$时，应选 A.

又∵ $f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$上单调，∴据此应对 A、B 两种可能进行进一步排除：

（1）当$n=2$时，由$nT+\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{2}$可得：$\dfrac{9}{4}T=\dfrac{\pi}{2}$，解得：$T=\dfrac{2\pi}{9}=\dfrac{8\pi}{36}$.

在区间$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$即$\left[-\dfrac{9\pi}{36},\dfrac{9\pi}{36}\right]$上画出$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$图像的一种示意图如图 13.4 所示.

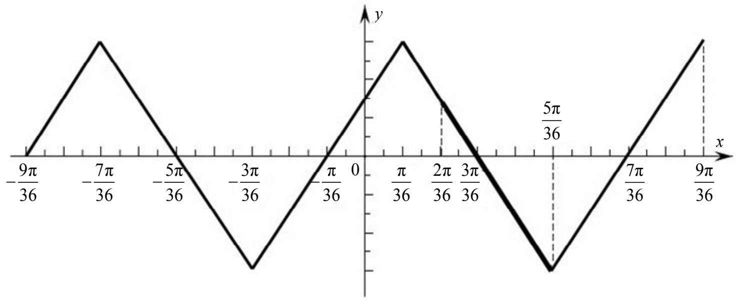


图 13.4

可见，该函数在$\left(\dfrac{\pi}{18},\dfrac{5\pi}{36}\right)$上单调，符合要求，故选 B，不选 ACD.　单选题，至此足矣

（2）当 $n=2$ 时，由 $nT+\frac{3T}{4}=\frac{\pi}{2}$ 可得：$\frac{11}{4}T=\frac{\pi}{2}$，解得：$T=\frac{2\pi}{11}=\frac{8\pi}{44}$．

在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 即 $\left[-\frac{11\pi}{44},\frac{11\pi}{44}\right]$ 上画出 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 图像的一种示意图如图 13.5 所示．

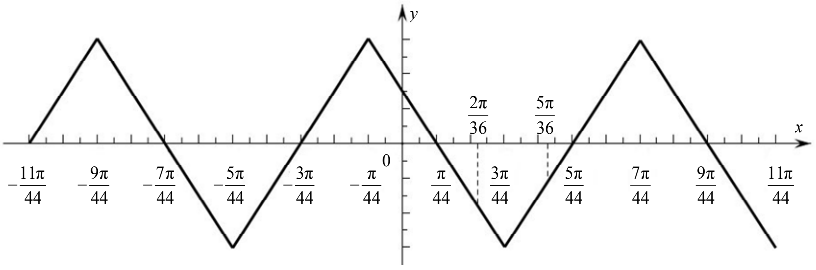


图 13.5

$\because \frac{2}{36}=\frac{88}{36\times44}<\frac{3\times36}{44\times36}<\frac{5\times44}{36\times44}$，$\therefore$ 该函数在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$ 上不具备单调性，故排除 A，应选 B.

问题 5 求三角函数的最值问题

问题分析：对于求三角函数的最值问题，关键是要将所给三角函数化成标准的 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$，然后确定三角函数的最值为 $\pm A$．

条件 5.1 给定三角函数解析式

条件分析：当给定三角函数的解析式时，可以借助辅助角的方法进行化简．

例13.12 （乙1316/65）设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$______.

解析：$\because$ $f(x)=\sin x-2\cos x=\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\sin x-\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos x\right)$，若令 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，显然，当 $x+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)$ 取最大值．

又 $\because$ 题设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，$\therefore$ $\theta+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi$，

因此，$\cos\theta=\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

例 13.13 （丙 1706）函数 $f(x)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为（ ）.

A. $\frac{6}{5}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{1}{5}$

解析：$\because$ 由诱导公式可得：$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos(\frac{\pi}{6}-x)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore$ $f(x)=\frac{1}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6}{5}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. 因此，函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{6}{5}$. 故选 A，不选 BCD.

例 13.14 （甲 1860/10）若 $f(x)=\cos x-\sin x$ 在 $[-a,a]$ 上是减函数，则 a 的最大值是（ ）.

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. π

分析：$\because$ 题设 $f(x)=\cos x-\sin x$，

公式想象：由题设条件想象标准三角函数

$\therefore f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

解析 1：可以将函数 $f(x)$ 看成是余弦函数 $g(x)=\sqrt{2}\cos x$ 向左平移 $\frac{\pi}{4}$. 数形想象：由解析式想象函数图像

绘制 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像如图 13.6 所示.

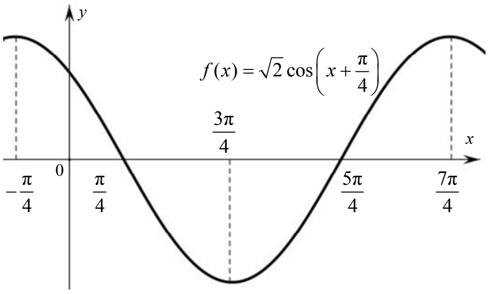


图 13.6

由图可见：函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递减.

$\because$ 题设：函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $[-a,a]$ 上单调递减，$\therefore a_{\max}=\frac{\pi}{4}$. 故选 A，不选 BCD.

解析 2：$\because f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$\therefore$ 当 $0\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi$ 时函数单调递减，即 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$ 时函数单调递减，$\therefore a_{\max}=\frac{\pi}{4}$. 故选 A，不选 BCD. 将 $x+\frac{\pi}{4}$ 看成一个整体

问题 6 三角函数图像的平移问题

问题分析：函数图像的平移问题，主要是研究平移后图像的相关性质.

条件 6.1　给定函数图像左右移动

条件分析：当将三角函数的图像左右平移若干个单位长度时，习惯上借助于“左加右减”的法则来改写函数解析式，然后绘制新的三角函数图像. 其实，我们还可以借用逆向思维：对于图像左右移动的问题，往往可以将坐标系反向右、向左平移建立新的坐标系，基于新旧坐标系之间的关系，确定在新坐标系中原来图像的解析式. 因此，原函数图像相对于新坐标系的函数图像相当于原函数图像平移后相对于原坐标系的图像.

例 13.15 （甲 1657）若将函数 $y=2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，则平移后图像的对称轴为（　）.

A. $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$　　B. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$

C. $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$　　D. $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$

解析 1：$\because$ 将函数 $y=2\sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度可得：$y=2\sin 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$.

图像左移后的解析式，相当于原解析式中自变量增加移动的单位长度 $\frac{\pi}{12}$

将 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 中的 $\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 看成是一个整体，由正弦函数的对称性可知：$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的对称轴为 $\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得：$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$. 故选 B，不选 ACD.

解析 2：（图像左移相当于坐标系右移）

第一步：在平面直角坐标系 xOy 中作出函数 $y=2\sin 2x$ 的图像如图 13.7 所示. 确定 $y=2\sin 2x$ 的对称

轴为 $2x = k\pi + \frac{\pi}{2}$，即 $x = \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$.

第二步："将函数图像向左平移 $\frac{\pi}{12}$" 改为"将坐标系向右平移 $\frac{\pi}{12}$" 构建 $x'O'y'$.

第三步：确定新旧坐标系之间的关系.

由图可见：对于图中的同一个点，在两个坐标系中横坐标的关系为 $x = x' + \frac{\pi}{12}$，即 $x' = x - \frac{\pi}{12}$.

第四步：确定在新坐标系中的对称轴．将 $x = \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$ 代入 $x' = x - \frac{\pi}{12}$ 中可得 $x' = \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{6}$.

故选 B，不选 ACD.

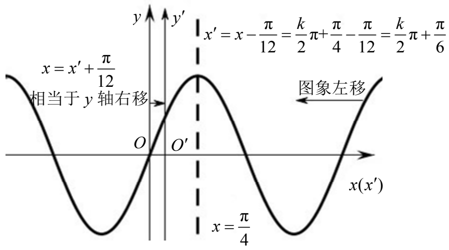


图 13.7

> **经验总结：** 函数图像的平移问题可以转化为坐标轴的反向平移．通过确定两个坐标系中坐标的关系来确定图像"移动"后的函数解析式.

例 13.16 （丙 1614）函数 $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y = 2\sin x$ 的图像至少向右平移______个单位长度得到.

解析 1： $\because y = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore$ 函数 $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y = 2\sin x$ 的图像至少向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到.

根据图像平移的"左加右减"法则，现在是 $-\frac{\pi}{3}$，必定是函数图像右移 $\frac{\pi}{3}$.

解析 2： $\because y = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore$ 令 $x = x' - \frac{\pi}{3}$，则 $x' = x + \frac{\pi}{3}$.

由此可见：新坐标系相当于原坐标系向左移动了 $\frac{\pi}{3}$，即将函数图像向右移动了 $\frac{\pi}{3}$.

> **经验总结：** 函数图像平移问题分为移动前、移动后，将移动后的函数解析式化为 $y = f(x + a)$，以便与移动前的解析式 $y = f(x)$ 比较确定移动方向和距离.

例 13.17 （丙 1664）函数 $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ 的图像至少向右平移____________个单位长度得到.

解析： $\because$ $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$，而 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$．$\therefore$ $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ 的图像可由函数 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ 的图像至少向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个长度单位获得.

左加右减

> **经验总结：** 如果图像移动前的函数解析式为 $y = f(x + a)$，则需要将移动后的函数解析式化为 $y = f(x + a + b)$，以便将 $x + a$ 看成整体，再根据"$+b$"来判断图像移动的方向和距离.

例 13.18 （甲 1316）函数 $y = \cos(2x + \varphi)(-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后，与函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像重合，则 $\varphi =$_________.

解析：$\because$ $y=\cos(2x+\varphi)(-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后与 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像重合，

$\therefore$ $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位后与 $y=\cos(2x+\varphi)(-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 的图像重合.

按照“左加右减”的法则，可得左移后的函数为 $y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)$，或者将图像左移看成是坐标系右移，即 $x'=x-\frac{\pi}{2}$，由此可得：$x=x'+\frac{\pi}{2}$，代入亦可得到上式.

$\because$ $y=\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)$ 与 $y=\cos(2x+\varphi)(-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 图像重合，

$\therefore$确定目标是将 $y=\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)$ 化成余弦函数：

$y=\sin\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$ 将 $\left(2x+\frac{4\pi}{3}\right)$ 看成整体，直接运用余角公式

$=\cos\left(-2x+\frac{3\pi}{6}-\frac{8\pi}{6}\right)=\cos\left(-2x-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$，因此，取 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

例 13.19 （乙 1759）已知曲线 C_1：$y=\cos x$，C_2：$y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，则下面结论正确的是（ ）.

A．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

B．把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

C．把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

D. 把 C_1 上各点的横坐标 C_2 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到曲线 C_2

解析：因为曲线 C_1，C_2 的函数不同名，所以先将 C_2 利用诱导公式转化成与 C_1 同名的函数，即 C_2：$y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})=\cos(2x+\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2})=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$，则由 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍变为 $y=\cos 2x$，再将曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 C_2. 故选 D，不选 ABC.

经验总结：对于三角函数图像变换问题，首先要将不同名函数转换成同名函数，利用诱导公式，需要重点记住 $\sin\alpha=\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$，$\cos\alpha=\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})$；另外，在进行图像变换时，提倡先平移后伸缩，而先伸缩后平移在考试中也经常出现，无论哪种变换，记住每一个变换总是对单个变量 x 而言.

例 13.20 （乙 1606）将函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后所得图像对应的函数为（ ）.

A．$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　B．$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　C．$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$　　D．$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

解析：∵ $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，∴ $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，从而 $\dfrac{1}{4}T=\dfrac{\pi}{4}$.

又∵图像向右平移，∴将 $y=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 中的“x”改写为“$x-\dfrac{\pi}{4}$”可得：

$y=2\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$. 故选 D，不选 ABC.

问题 7 三角函数的图像判断问题

问题分析：三角函数的图像判断问题，主要是通过确定函数的解析式，再通过研究函数的性质来判断可能的图像.

条件 7.1 给定三角函数的几何意义

条件分析：当给定三角函数的几何意义时通过给定三角函数的几何意义来确定三角函数的解析式.

例 13.21 （乙 1456）如图 13.8 所示，圆 O 的半径为 1，A 是圆上的定点，P 是圆上的动点，角 x 的始边为射线 OA，终边为射线 OP，过点 P 作直线 OA 的垂线，垂足为 M，将点 M 到直线 OP 的距离表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图像大致为（ ）.

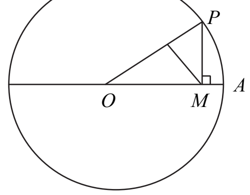
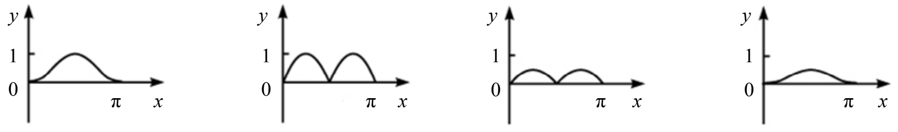


图 13.8



A.　　B.　　C.　　D.

解析：如图 13.9 所示，过 M 作 $MD\perp OP$ 于点 D，

则 $PM=OP\sin x=\sin x$，$OM=|\cos x|$.

∵在 Rt△ODM 中，$MD=OM\sin x=|\cos x|\sin x=\dfrac{1}{2}|\sin 2x|$，

∴ $f(x)=\dfrac{1}{2}|\sin 2x|(0\leqslant x\leqslant\pi)$. 故选 C，不选 ABD.

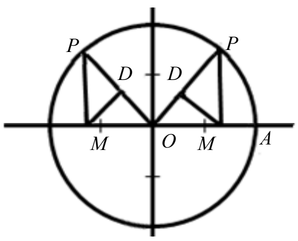
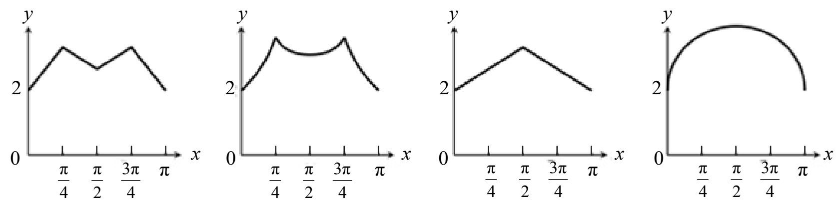


图 13.9

例 13.22 （甲 1511/60）如图 13.10 所示，长方形的边 $AB=2$，$BC=1$，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC，CD 与 DA 运动，记 $\angle BOP=x$，将动点 P 到 A，B 两点的距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $f(x)$ 的图像大致为（ ）.



A.　　B.　　C.　　D.

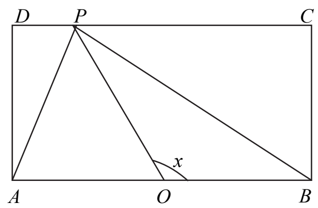


图 13.10

解析 1：（分析法）如图 13.11（a）所示：

当点 P 从 B 到 C 运动时，$PB=\tan x$，$PA=\sqrt{4+\tan^2 x}$，即 $PA+PB=\sqrt{4+\tan^2 x}+\tan x$，此时，$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{4}$. 且当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$PA+PB=\sqrt{5}+1$.

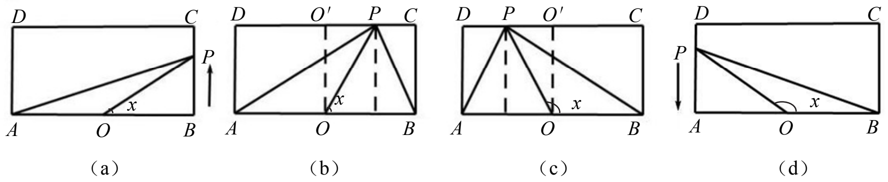


图 13.11

如图 13.11（b）和图 13.11（c）所示：

当点 P 从 C 到 D 运动时，$PA+PB=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{\tan x}-1\right)^2}+\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{\tan x}+1\right)^2}$，此时，$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$，且当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$PA+PB=2\sqrt{2}$；

如图 13.11（d）所示：

当点 P 从 D 到 A 运动时，$PA=\tan(\pi-x)=-\tan x$，$PB=\sqrt{4+\tan^2 x}$，即 $PA+PB=\sqrt{4+\tan^2 x}+|\tan x|$，且 $\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\pi$.

由此可见：（1）函数图像关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称；（2）函数图像大致由三段组成；（3）$\because\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}>\left(2\sqrt{4}\right)^2=8$，$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. 由此判断应选 B，不选 ACD.

解析 2：（特殊值排除法） ∵四个选项中都给了横坐标的值，提示我们可以计算这些特殊点的函数值，且由题意可得：$f(0)=2$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{5}+1$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{5}+1>\sqrt{4}+1=3$，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}<3$，可得：$f\left(\frac{\pi}{4}\right)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

据此，可以判定 C，D 不符合要求，即排除 C，D 选项.

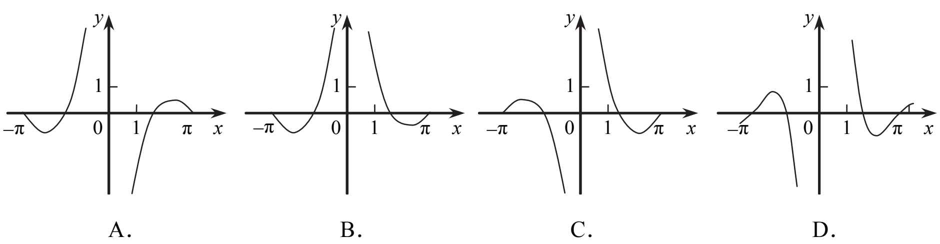
又∵当 P 点在 BC 边上运动时，$PA+PB=\sqrt{4+\tan^2 x}+\tan x$，即 $f(x)=\sqrt{4+\tan^2 x}+\tan x$.

∴ $f(x)$ 与 x 是非线性关系，因此，在 A，B 选项中应排除 A，选择 B. 故选 B，不选 ACD.

条件 7.2 给定三角函数的解析式

条件分析：给定三角函数的解析式时，可以通过研究函数的性质来判断图像.

例 13.23 （乙 1708）函数 $y=\frac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 的部分图像大致为（ ）.



解析：（排除法） ∵题设 $f(x)=\frac{\sin 2x}{1-\cos x}$，$\therefore f(-x)=\frac{\sin 2(-x)}{1-\cos(-x)}=\frac{-\sin 2x}{1-\cos x}=-f(x)$，

即 $f(x)=\frac{\sin 2x}{1-\cos x}$ 为奇函数，因此排除 B 选项. 图像 B 关于 y 轴对称，是偶函数图像

认真观察图像 A，C，D，可以发现 x 轴上有三个特殊值：$-\pi$，1，π.

取 $x=-\pi$ 或 $x=\pi$ 均可得：$f(x)=0$，因此可以排除 D 选项．

取 $x=1$ 可得：$f(x)=\dfrac{\sin 2}{1-\cos 1}>0$，因此在 A，C 选项中可以排除 A 选项．故选 C，不选 ABD．

经验总结：函数图像的判断问题首先应该关注定义域；再根据图像的对称性分析函数的奇偶性，根据函数的奇偶性排除部分选项；最后从图像的最高点、最低点或零点，分析函数的最值、极值或零点坐标，并利用特殊值进行检验．较难的问题往往需要综合研究图像的单调性（走向趋势）、最值和周期性等函数性质来判断．

问题 8 三角函数的综合问题

问题分析：三角函数的综合问题，往往需要综合考虑三角函数的周期性、单调性、对称性、最值、零点等问题．

条件 8.1 给定三角函数研究其性质

条件分析：对于给定三角函数解析式研究其性质的问题需要逐项排除．

例 13.24 （丙 1756）设函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，则下列结论错误的是（　）．

A．$f(x)$ 的一个周期为 -2π　　B．$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{8\pi}{3}$ 对称

C．$f(x+\pi)$ 的一个零点为 $x=\dfrac{\pi}{6}$　　D．$f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减

解析：（对于需要找出“错误”选项的问题，必须逐个排除）

$\because$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期为 $T=2k\pi(k\neq 0,\ k\in\mathbf{Z})$，当 $k=-1$ 时可得函数 $f(x)$ 的一个周期为 -2π，因此，选项 A 正确；

$\because$ 函数 $f(x)$ 图像的对称轴满足 $x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得：$x=k\pi-\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=3$ 时可得 $x=\dfrac{8\pi}{3}$，即 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{8\pi}{3}$ 对称，因此，选项 B 正确；

$\because f(x+\pi)=\cos\left[(x+\pi)+\dfrac{\pi}{3}\right]=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-f(x)$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的零点满足 $x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得：$x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$．当 $k=0$ 时可得 $x=\dfrac{\pi}{6}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 是 $f(x+\pi)$ 的一个零点，因此，选项 C 正确；

$\because$ 当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{4\pi}{3}\right)$，即 $x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\pi-\dfrac{\pi}{6},\pi+\dfrac{2\pi}{6}\right)$，将 $f(x)$ 看成整体 $\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的余弦函数，则 $f(x)$ 在 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 即 $x+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\pi-\dfrac{\pi}{6},\pi+\dfrac{2\pi}{6}\right)$ 上有增有减，因此，选项 D 错误．

故选 D，不选 ABC．

例 13.25（乙 1811）已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边上有两点 $A(1,a)$，$B(2,b)$，且 $\cos 2\alpha=\dfrac{2}{3}$，则 $|a-b|=$（　）．

A．$\dfrac{1}{5}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　C．$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．1

解析：$\because \cos 2\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\therefore$角 2α 的终边在第 1 象限或第 4 象限.

又$\because$终边上有两点 $A(1,a)$，$B(2,b)$，$\therefore$角 α 的终边在第 4 象限.

由 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 可得：$2\cos^2\alpha-1=\dfrac{2}{3}$，解得：$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，$\sin\alpha=-\sqrt{1-\dfrac{30}{36}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

从而 $\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，因此，$a=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$b=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$|a-b|=\left|-\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故选 B，不选 ACD.

例 13.26 （丙 1865）函数 $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上的零点个数为________.

解析：$\because$题设 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$\therefore 0\leqslant 3x\leqslant 3\pi$，$\dfrac{\pi}{6}\leqslant 3x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant 3\pi+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{19\pi}{6}$.

又$\because \cos\dfrac{\pi}{2}=0$，$\therefore$第一个零点在 $3x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}>\dfrac{\pi}{6}$ 处，第二个零点在 $3x+\dfrac{\pi}{6}=\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 处，第三个零点在 $3x+\dfrac{\pi}{6}=2\pi+\dfrac{\pi}{2}<3\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 处，第四个零点在 $3x+\dfrac{\pi}{6}=3\pi+\dfrac{\pi}{2}>3\pi+\dfrac{\pi}{6}$ 处.

因此，在 $[0,\pi]$ 内的零点个数为 3.

例 13.27 （沪 1412）方程 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的所有解的和等于______.

解析：如图 13.12 所示，$\because \sin x+\sqrt{3}\cos x=2\left(\sin x\times\dfrac{1}{2}+\cos x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore$由 $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ 可得：$2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，解得：$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

$\because x\in[0,2\pi]$，$\therefore x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right]$，解 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$ 可得：$x+\dfrac{\pi}{3}=\pi-\dfrac{\pi}{6}$ 或 $x+\dfrac{\pi}{3}=2\pi+\dfrac{\pi}{6}$，即 $x_1=\pi-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，$x_2=2\pi+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{11\pi}{6}$.

因此，$x_1+x_2=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{11\pi}{6}=\dfrac{14\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{3}$.

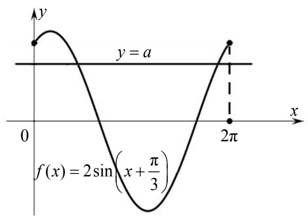


图 13.12

例 13.28 （乙 1458）设 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\tan\alpha=\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$，则（　　）

A. $3\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　B. $2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　C. $3\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　D. $2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

解析：$\because$由三角函数定义可得：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，并且题设：$\tan\alpha=\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$.

$\therefore \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1+\sin\beta}{\cos\beta}$,即 $\sin\alpha\cos\beta=\cos\alpha+\cos\alpha\sin\beta$，亦即 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha$.

利用和角公式和余角公式可得：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$\because \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore -\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{\pi}{2}-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

即 $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$. 选 B，不选 ACD.

第 14 题　空间几何体背景

14

背景知识

几何体主要包括柱体、锥体、台体和球体，各种几何体的特征、侧面（展开）图、表面积和体积如表 14.1 所示.

表 14.1

几何体		特征	侧面（展开）图	表面积	体积
柱体	棱柱	上下底面互相平行，侧面都是平行四边形.	平行四边形	$S=2S_{底}+S_{侧}$	$V=S_{底}\cdot h$
	圆柱	以矩形的一条边所在直线为旋转轴，其余三边旋转所围成的几何体.	长方形	$S=2\pi r^2+2\pi rl$	$V=\pi r^2\cdot h$
锥体	棱锥	以多边形为底和其余侧面由有一个公共点的多个三角形围成的几何体.	多个三角形	$S=S_{底}+S_{侧}$	$V=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h$
	圆锥	以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的曲面所围成的几何体.	扇形	$S=\pi r^2+\pi rl$	$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h$
台体	棱台	用一个平行于棱锥（圆锥）底面的平面去截棱锥（圆锥），底面和截面之间的部分.	多个梯形	$S=S_{上底}+S_{下底}+S_{侧}$	$V=\frac{1}{3}\left(S+\sqrt{SS'}+S'\right)\cdot h$
	圆台		扇环	$S=\pi r'^2+\pi\left(r+r'\right)l+\pi r^2$	$V=\frac{1}{3}\pi\left(r^2+rr'+r'^2\right)\cdot h$
球体		以半圆的直径所在的直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的几何体.	无展开图	$S=4\pi r^2$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

组合体：由柱体、锥体、台体、球体等组合而成的几何体称为组合体，组合的形式有：多面体与多面体的组合、多面体与旋转体的组合、旋转体与旋转体的组合等.

几何体的三视图：包括正（主）视图、俯视图和侧（左）视图，三视图的画法是“长对正、高平齐、宽相等”.

几何体的直观图：（斜二侧画法）.

问题 1　三视图的识读

问题分析：对于三视图的识读问题要根据三视图的“长对正、高平齐、宽相等”特点将两两视图进行对比分析.

条件 1.1　给定几何体的三视图

条件分析：通过对给定几何体的三视图进行识读，逐步还原几何体.

例 14.1 （乙 1408）如图 14.1 所示，网格纸的各小格都是正方形，粗实线画出的是一个几何体的三

视图，则这个几何体是（　）.

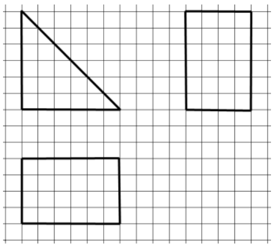


图 14.1

A．三棱锥　　B．三棱柱　　C．四棱锥　　D．四棱柱

解析：根据所给三视图可知，对应的几何体是一个侧面横放、从底面主视的三棱柱．故选 B，不选 ACD．

经验总结：通过三视图还原几何体时，往往先根据俯视图的图形和主视图或左视图的下边线来确定几何体的底部“基座”.

例 14.2　（乙 1462）如图 14.2 所示，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的各条棱中，最长的棱的长度为（　）.

A．$6\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{2}$　　C．6　　D．4

解析：如图 14.3 所示，原几何体为三棱锥 $D-ABC$，其中 $AB=BC=4$，$AC=4\sqrt{2}$，$DB=DC=2\sqrt{5}$，$DA=\sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2+4}=6$，因此，最长的棱的长度为 $DA=6$．故选 C，不选 ABD．

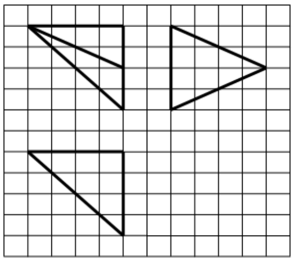


图 14.2

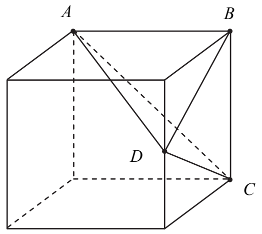
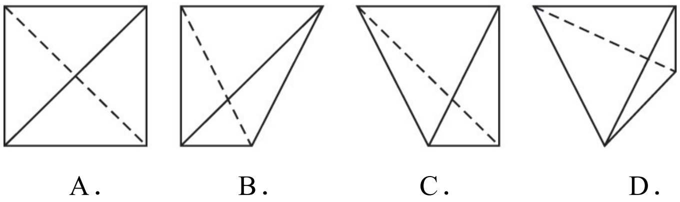


图 14.3

经验总结：通过三视图还原几何体时，如果三个视图中有两个视图中都有“直角”，可以先虚构一个立方体，然后将对应的边或点标注在立方体上，最后连点成线还原几何体.

例 14.3　（甲 1309/57）如图 14.4 所示，一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(1,0,1)$，$(1,1,0)$，$(0,1,1)$，$(0,0,0)$，画该四面体三视图中的正视图时，以 zOx 平面为投影面，则得到正视图可以为（　）.



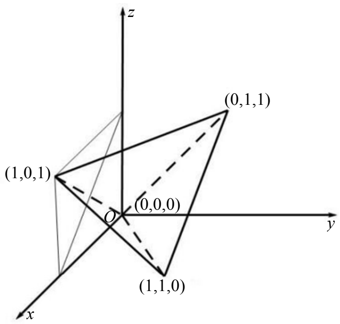
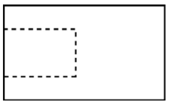


图 14.4

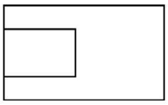
解析：如图 14.4 所示，在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中标出 $(1,0,1)$，$(1,1,0)$，$(0,1,1)$，$(0,0,0)$ 四个点，则向 zOx 平面作投影可见：$(0,0,0)$ 点的投影始终在右下角，故选 A，不选 BCD．

例 14.4　（丙 1803/53）中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来，构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的小长方体是榫头．若如图 14.5 所示摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合

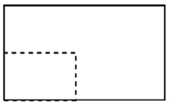
成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是（　）.



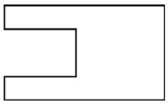
A.



B.



C.



D.

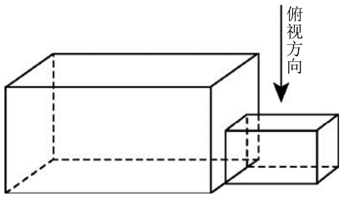


图 14.5

解析：如图在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中标出 $(1,0,1)$，$(1,1,0)$，$(0,1,1)$，$(0,0,0)$ 四个点，则向 zOx 平面作投影可见：$(0,0,0)$ 点的投影始终在右下角，故选 A，不选 BCD.

问题 2 几何体的体积问题

问题分析：对于几何体的体积问题关键在于确定几何体的类型，然后再选用相应的体积计算公式.

条件 2.1　给定古代数学名著问题

条件分析：对于借助古代数学名著给定的问题，必须认真阅读原文并领会其含义.

例 14.5（乙 1506/56）《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题："今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺．问：积及为米几何?"其意思为："在屋内墙角处堆放米（如图 14.6 所示，米堆为一个圆锥的四分之一），米堆底部的弧度为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少?"已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放的米约有（　）.

图 14.6

A．14 斛　　　　B．22 斛

C．36 斛　　　　D．66 斛

解析：∵米堆底部的弧度为 8 尺，∴设米堆底部半径为 r，则 $\frac{1}{4}\times 2\pi r=8$，解得：$r=\frac{16}{\pi}$.

从而米堆的体积为 $V=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{12}\pi\times\left(\frac{16}{\pi}\right)^2\times 5=\frac{320}{3\pi}$.

又∵题设圆周率约为 3，∴ $V=\frac{320}{9}$（立方尺）．又∵题设 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，

∴ $V=\frac{320}{9}$（立方尺）的米约有 $\frac{V}{1.62}=\frac{320}{9\times 1.62}\approx 22$（斛）．故选 B，不选 ACD.

条件 2.2　给定几何体的切割体

条件分析：对于给定几何体的切割体问题，必须先了解原几何体的特征和性质，再关注切割点的位置.

例 14.6（甲 1407）正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2，侧棱长为 $\sqrt{3}$，D 为 BC 中点，则三棱锥 $A-B_1DC_1$ 的体积为（　）.

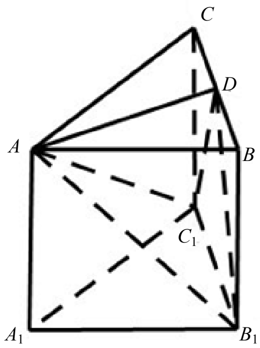


图 14.7

A．1　　　　B．2

C．3　　　　D．5

解析：如图 14.7 所示，∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，且 D 为 BC 中点，∴ $AD\perp BC$.

又∵ $\triangle ABC\perp$ 平面BCC_1B_1，且 $AD\subset\triangle ABC$，$\triangle ABC\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC$.

$\therefore AD \perp$ 平面BCC_1B_1，即 $AD \perp \triangle DC_1B_1$，故 AD 为三棱锥 $A-B_1DC_1$ 的高.

又$\because$ $AD = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$，$S_{\triangle B_1DC_1} = \frac{1}{2}B_1C_1 \cdot B_1B = \frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

$\therefore V_{A-B_1DC_1} = \frac{1}{3}S_{\triangle B_1DC_1} \cdot AD = \frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 1$. 故选 A，不选 BCD.

例 14.7 （丙 1709/58）已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为（　）.

A．π　　B．$\frac{3\pi}{4}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

解析：绘制圆柱体的轴截面如图 14.8 所示，

由题意可得：$AD = 2，AC = 1$.

在$\triangle AEO$ 中，$AO = \frac{1}{2}AD = 1$，$EO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}$.

由勾股定理可得底面半径 $AE = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

由圆柱的体积公式可得：圆柱的体积是$V = \pi r^2 h = \pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times 1 = \frac{3}{4}\pi$. 故选 B，不选 ACD.

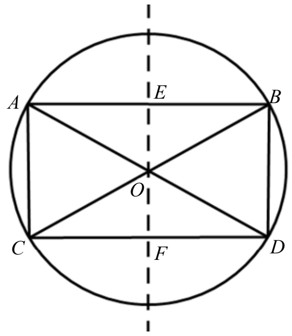


图 14.8

经验总结：对于球与其他几何体的切、接问题，往往需要通过球心及其他几何体的切点或接点画出截面图，将空间问题转化为平面问题，再利用平面几何知识寻找几何体中诸多元素之间的关系.

例 14.8 （乙 1810）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB = BC = 2$，如图 14.9 所示，AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为30°，则该长方体的体积为（　）.

A．8　　B．$6\sqrt{2}$　　C．$8\sqrt{2}$　　D．$8\sqrt{3}$

分析：$\because$题设：在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB = BC = 2$，

底面是正方形

$\therefore$由勾股定理可得：底面的一条对角线

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

勾股定理

又$\because$题设 AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为30°，

$\therefore$ AC_1 与侧面对角线 BC_1 的夹角为30°.

线面夹角概念

求长方体体积的关键是确定其高，为此设高 $CC_1 = h$.

空间想象

由图可见：$\because$在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC_1$ 中，$AB = 2，\angle AC_1B = 30^\circ$，

$\therefore$确定 AC_1 或 BC_1 有两种解法.

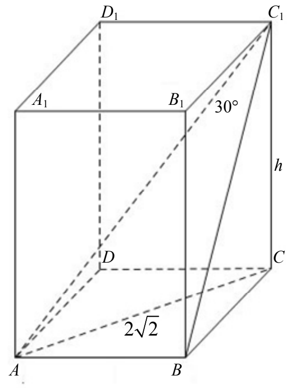


图 14.9

解析 1：在 $\mathrm{Rt}\triangle ACC_1$ 中由勾股定理可得：$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{8 + h^2}$.　①

又$\because$在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC_1$ 中，AC_1 与侧面对角线 BC_1 的夹角为30°，$\therefore$ $AC_1 = 2AB = 4$.　②

由①②两式可得：$\sqrt{8 + h^2} = 4$，

利用相等关系列方程

解得：$h = 2\sqrt{2}$，因此，长方体的体积为$2\times 2\times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

解析 2：在 $\mathrm{Rt}\triangle BCC_1$ 中由勾股定理可得：$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{4 + h^2}$.　①

又$\because$在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC_1$ 中，AC_1 与侧面对角线 BC_1 的夹角为30°，$\therefore$ $AB = \frac{\sqrt{3}}{3}BC_1$.　②

由①②两式可得：$2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{4 + h^2}$，解得：$h = 2\sqrt{2}$.

利用相等关系列方程

因此，长方体的体积为$2\times 2\times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. 故选 C，不选 ABD.

问题 3 组合体的面积问题

问题分析：求组合体的面积问题关键在于确定组合体是由哪几种几何体的哪些部分组成的，然后分别计算各部分的面积，最后求和.

条件 3.1 给定组合体的三视图

条件分析：对于给定组合体的三视图的问题，关键是还原组合体的效果图，确认组合体的组成.

例 14.9 （乙 1757）某多面体的三视图如图 14.10 所示，其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长为 2，俯视图为等腰直角三角形．该多面体的各个面中有若干个是梯形，这些梯形的面积之和为（　）.

A．10　　B．12　　C．14　　D．16

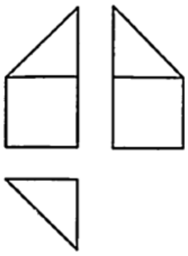


图 14.10

解析：由三视图可见：三个视图中都存在“直角”图形，因此可以先虚构一个几何体，再通过切割构造出组合体.

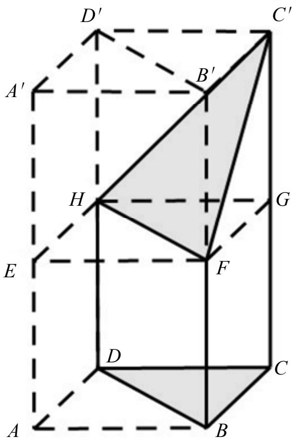


图 14.11

由于题设“正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长为 2”，因此可以先虚构一个底面边长为 2，高为 4 的四棱柱 $A'B'C'D'-ABCD$，如图 14.11 所示.

首先由俯视图可见：需要将四棱柱从上到下沿着对角线 $B'D'-BD$ “切”一刀变成三棱柱，再看主视图和左视图，需要从三棱柱 $B'C'D'-BCD$ 的顶角 C' 向最大侧面的中线 FH “切”一刀.

由此可见：符合题意的组合是由下部的一个三棱柱和上部的一个三棱锥构成．因此，该组合体的各个面中只有两个侧面是相同的梯形（$BFC'C$ 和 $DHC'C$），则这些梯形的面积之和为 $2\times(2+4)\times2\times\dfrac{1}{2}=12$，故选 B.

经验总结：本题详细介绍了通过三视图还原几何体的方法，值得关注.

例 14.10 （乙 1607/56）如图 14.12 所示，某几何体的三视图是三个半径相等的圆及每个圆中两条互相垂直的半径．若该几何体的体积是 $\dfrac{28\pi}{3}$，则它的表面积是（　）.

A．17π　　B．18π　　C．20π　　D．28π

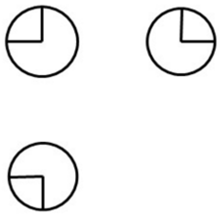


图 14.12

解析：由于三个视图的轮廓线都是半径相等的圆，因此，该几何体的主体造型应该是一个球；又因为三个视图中都有两条相互垂直的半径，因此，这些半径必定是沿半径的切痕，因此，猜想该几何体是一个球在左前上方被切取了 $\dfrac{1}{8}$ 后剩余的部分，如图 14.13 所示.

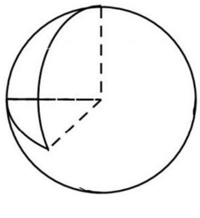


图 14.13

设球的半径为 R，则球的体积公式为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

∵题设该几何体的体积是 $\dfrac{28\pi}{3}$，∴ $\left(1-\dfrac{1}{8}\right)\times\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{28\pi}{3}$，解得：$R=2$.

由于该几何体是一个球被切去了 $\dfrac{1}{8}$ 后剩余的部分，因此，该几何体的表面积包含 $\dfrac{7}{8}$ 的球表面积和三个 $\dfrac{1}{4}$ 圆面积两部分．故 $S=\dfrac{7}{8}\times4\pi R^2+3\times\dfrac{1}{4}\pi R^2=\dfrac{17}{4}\pi R^2=17\pi$.

故选 A，不选 BCD．

经验总结：根据三视图猜想几何体也是一种很好的策略.

例 14.11 （甲 1607/56）图 14.14 是由圆柱与圆锥组合而成的几何体的三视图，则该几何体的表面积为（　）.

A．20π　　B．24π　　C．28π　　D．32π

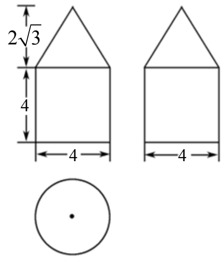


图 14.14

解析：由三视图可见：该几何体上部是圆锥，下部是圆柱体，且圆柱体的高为 4，底面半径为 2；圆锥体的底面半径也为 2，高为 $2\sqrt{3}$．

该几何体的表面积由圆锥的侧面积、圆柱的侧面积和一个底面积三部分组成．其中，底面积为 $\pi r^2=4\pi$，圆柱体的侧面积（长方形）为：圆周长×圆柱高 $=2\pi r\times 4=16\pi$　（$r=2$）.

又∵圆锥高为 $2\sqrt{3}$，底面半径为 2，∴由勾股定理可得母线长为 $\sqrt{12+4}=4$．

因此，圆锥侧面（扇形）的面积为 $\pi r\times 4=8\pi$．

故该几何体的表面积为 $4\pi+16\pi+8\pi=28\pi$，故选 C，不选 ABD.

例 14.12 （乙 1511/61）圆柱被一个平面截去一部分后与半球（半径为 r）组成一个几何体，该几何体三视图中的正视图和俯视图如图 14.15 所示，若该几何体的表面积为 $16+20\pi$，则 $r=$（　）.

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

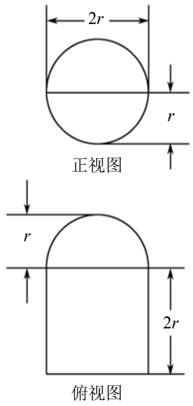


图 14.15

解析：由正视图和俯视图知，该几何体是半球与半个圆柱的组合体，圆柱的半径与球的半径都为 r，圆柱的高为 $2r$，其表面积为：$S=\dfrac{1}{2}\times 4\pi r^2+\pi r\times 2r+\pi r^2+2r\times 2r=5\pi r^2+4r^2$．

由题意可得：$5\pi r^2+4r^2=16+20\pi$，解得：$r=2$，故选 B，不选 ACD.

例 14.13 （丙 1610/59）如图 14.16 所示，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为（　）.

A．$18+36\sqrt{5}$　　B．$54+18\sqrt{5}$

C．90　　D．81

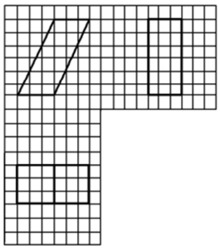


图 14.16

解析：如图 14.16 所示，该几何体的表面积由上下两个正方形（面积为 S_1）、左右两个矩形（面积为 S_2）和前后两个平行四边形（面积为 S_3）组成.

其中，$S_1=2\times 3^2=18$；$S_2=2\times 3\times\sqrt{3^2+6^2}=18\sqrt{5}$；

$S_3=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times 3\times 6+\dfrac{1}{2}\times 3\times 6\right)=36$．

∴ $S=S_1+S_2+S_3=18\left(3+\sqrt{5}\right)$．故选 B，不选 ACD

例 14.14 （皖 1457）一个多面体的三视图如图 14.17 所示，则该多面体的表面积为（　）.

A．$21+\sqrt{3}$　　B．$18+\sqrt{3}$　　C．21　　D．18

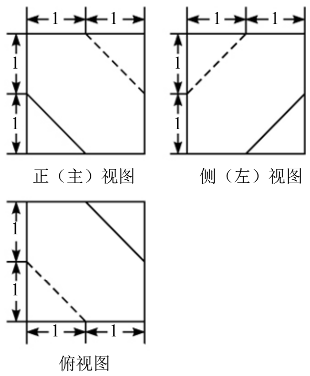


图 14.17

解析：由三视图可知：该多面体是把正方体割去两个角后剩余的部分，因此多面体的直观图如图 14.18 所示.

因此，所求多面体的表面积为：$S=S_{正方体}-6S_{直角三角形}+2S_{等边三角形}$．

其中，正方体的表面积为 6 个正方形的面积，即 $S_{正方体}=6\times 2^2=24$；

$S_{直角三角形}=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$．

∵等边三角形的边长为 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore S_{等边三角形}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

因此，$S=S_{正方体}-6S_{直角三角形}+2S_{等边三角形}=24-6\times\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
$=21+\sqrt{3}$．故选 A，不选 BCD．

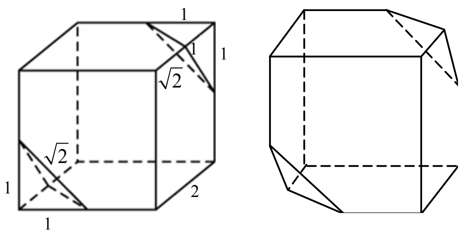


图 14.18

例 14.15 （乙 1805）已知圆柱的上、下底面的中心分别为 O_1，O_2，过直线 O_1O_2 的平面截该圆柱所得的截面是面积为 8 的正方形，则该圆柱的表面积为（　）．

A．$12\sqrt{2}\pi$　　B．12π　　C．$8\sqrt{2}\pi$　　D．10π

解析：∵截面是面积为 8 的正方形，∴正方形的边长为 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，即圆柱的高为 $2\sqrt{2}$，底面直径为 $2\sqrt{2}$，从而底面半径为 $\sqrt{2}$，故上、下底面的面积都为 $\pi r^2=\pi\left(\sqrt{2}\right)^2=2\pi$，底面周长为 $2\pi r=2\sqrt{2}\pi$，侧面积为 $2\pi r\cdot h=2\sqrt{2}\pi\times 2\sqrt{2}=8\pi$，因此，该圆柱的表面积为 $2\times 2\pi+8\pi=12\pi$．故选 B，不选 ACD．

将 $\sin\angle ASB=\frac{\sqrt{15}}{8}$ 代入，并利用 $SA=SB$，解得：$SA=4\sqrt{5}$．

又∵ SA 与圆锥底面所成的角为 45°，∴ $AC=\sqrt{2}SA=4\sqrt{10}$，从而底面周长为 $AC\pi=4\sqrt{10}\pi$．

因此，圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{10}\pi\times 4\sqrt{5}=40\sqrt{2}\pi$．　类似三角形公式

例 14.16 （甲 1816）已知圆锥的顶点为 S，母线 SA，SB 互相垂直，SA 与圆锥底面所成的角为 30°，若 $\triangle SAB$ 的面积为 8，则该圆锥的体积为__________．

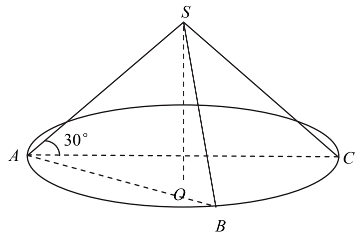


图 14.19

解析：如图 14.19 所示，在 $\triangle SAB$ 中，∵母线 SA，SB 互相垂直，且 $\triangle SAB$ 的面积为 8，∴ $\frac{1}{2}SA\cdot SB=8$，解得 $SA=SB=4$．

又∵ SA 与圆锥底面所成的角为 30°，

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle SAO$ 中，$SO=SA\sin 30^\circ=4\times\frac{1}{2}=2$；$AO=SA\cos 30^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$．

从而圆锥的底面积为 $S=\pi\cdot OA^2=\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2=12\pi$，圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}S\cdot|SO|=\frac{1}{3}\times 12\pi\times 2=8\pi$．

例 14.17 （甲 1866）已知圆锥的顶点为 S，母线 SA，SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$，SA 与圆锥底面所成的角为 45°，若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为__________．

解析：如图 14.20 所示，在 $\triangle SAB$ 中，$\cos\angle ASB=\frac{7}{8}$，则 $\sin\angle ASB=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$．

由 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$ 可得：$\frac{1}{2}SA\cdot SB\sin\angle ASB=5\sqrt{15}$，将 $\sin\angle ASB=\frac{\sqrt{15}}{8}$ 代入，并根据 $SA=SB$，解得：$SA=4\sqrt{5}$．

又∵ SA 与圆锥底面所成角为 45°，∴ $AC=\sqrt{2}SA=4\sqrt{10}$，从而底面周长为 $AC\pi=4\sqrt{10}\pi$．

因此，圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{10}\pi\times 4\sqrt{5}=40\sqrt{2}\pi$．

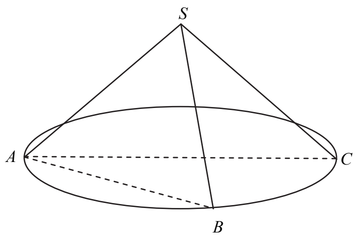


图 14.20

问题 4 组合体的体积问题

问题分析：对于组合体的体积问题关键在于确定组合体是由哪几种几何体的哪些部分组成的，然后分

别计算各部分的体积，最后求和.

条件 4.1　给定组合体的三视图

条件分析：对于给定组合体的三视图，关键是还原组合体的效果图，确认组合体的组成.

例 14.18　（乙 1311/58）某几何体的三视图如图 14.21 所示，则该几何体的体积为（　）.

A．$16+8\pi$　　B．$8+8\pi$　　C．$16+16\pi$　　D．$8+16\pi$

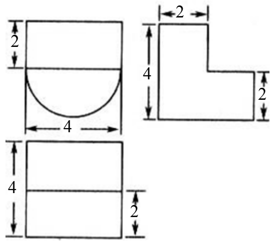


图 14.21

解析：根据三视图可以看出：该几何体由上、下两部分组成，其中下部是底面半径为 2 的半个圆柱体，上部是棱长为 2，2，4 的长方体，因此，整个组合体的体积为$\frac{1}{2}\times\pi\times2^2\times4+2\times2\times4=16+8\pi$．故选 A，不选 BCD．

例 14.19　（甲 1706/54）如图 14.22 所示，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后得到，则该几何体的体积为（　）.

A．90π　　B．63π　　C．42π　　D．36π

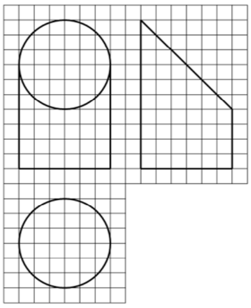


图 14.22

解析：由题意，该几何体是一个组合体，下半部分是一个底面半径为 3，高为 4 的圆柱，其体积$V_1=\pi\times3^2\times4=36\pi$；上半部分是一个底面半径为 3，高为 6 的圆柱的一半，其体积$V_2=\frac{1}{2}\times(\pi\times3^2\times6)=27\pi$．

故该组合体的体积$V=V_1+V_2=36\pi+27\pi=63\pi$．故选 B，不选 ACD．

> **经验总结：**在根据三视图还原几何体的实际效果图时，通常都是以正视图和俯视图为主，结合侧视图进行综合考虑.

例 14.20　（甲 1506/56）一个正方体被一个平面截去一部分后，剩余部分的三视图如图 14.23 所示，则截去部分的体积与剩余部分体积的比值为（　）.

A．$\frac{1}{8}$　　B．$\frac{1}{7}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{1}{5}$

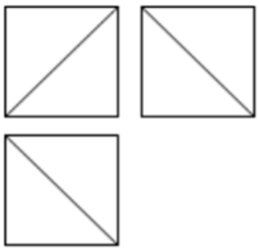


图 14.23

解析：∵题设一个正方体被一个平面截去一部分，

∴第一步：如图 14.24（a）所示，先绘制一个正方体$ABCD-A'B'C'D'$；

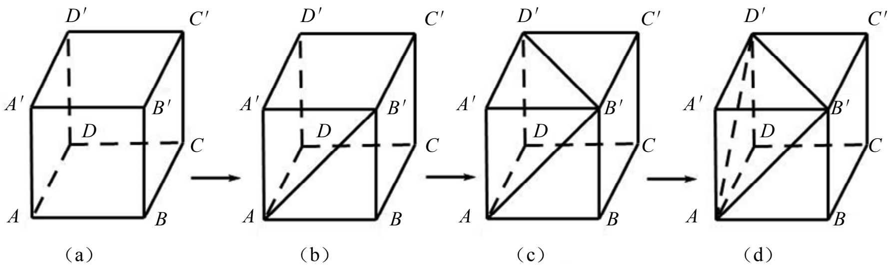


图 14.24

第二步：如图 14.24（b）所示，依据主视图，在正方体的前表面$ABA'B'$上画一条主视轮廓线AB'；

第三步：如图 14.24（c）所示，依据俯视图，在正方体的上表面$A'B'C'D'$上画一条俯视轮廓线$D'B'$；

第四步：如图 14.24（d）所示，依据侧视图，在正方体的左侧面$ADD'A'$上画一条侧视轮廓线$D'A$．

拿去三棱锥$A'-AB'D'$所剩即为所得几何体.

设正方体边长为 1，则正方体的体积为$V_{正}=1$，且拿掉的三棱锥的体积为$V_{三}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$.

因此，剩余几何体的体积为：$V_{剩}=V_{正}-V_{三}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，所以，$\frac{V_{三}}{V_{剩}}=\frac{1}{5}$．故选 D，不选 ABC．

例 14.21 （甲 1406/56）如图 14.25 所示，网格纸上正方形小格的边长为 1（表示 1 cm），图中粗线画出的是某零件的三视图，该零件由一个底面半径为 3 cm，高为 6 cm 的圆柱体毛坯切削得到，则切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为（　）．

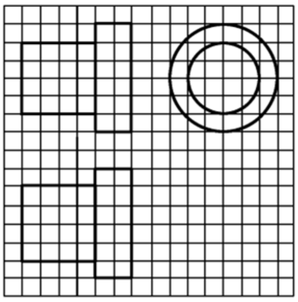


图 14.25

A．$\frac{17}{27}$　　B．$\frac{5}{9}$　　C．$\frac{10}{27}$　　D．$\frac{1}{3}$

解析：∵加工前零件半径为 3，高为 6，∴$V_1=\pi 3^2\cdot 6=54\pi$．

又∵加工后的零件，左半部分为小圆柱体，半径为 2，高为 4；右半部分为大圆柱体，半径为 3，高为 2．

∴两部分的体积为 $V_2=\pi 2^2\cdot 4+\pi 3^2\cdot 2=34\pi$．∴切削掉部分的体积为 $54\pi-34\pi=20\pi$．

∴切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为 $\frac{20\pi}{54\pi}=\frac{10}{27}$．故选 C，不选 ABD．

例 14.22 （乙 1766）如图 14.26 所示，圆形纸片的圆心为 O，半径为 5 cm，该纸片上的等边 $\triangle ABC$ 的中心为 O．D，E，F 为圆 O 上的点，$\triangle DBC$，$\triangle ECA$，$\triangle FAB$ 分别是以 BC，CA，AB 为底边的等腰三角形．沿虚线剪开后，分别以 BC，CA，AB 为折痕折起 $\triangle DBC$，$\triangle ECA$，$\triangle FAB$，使得 D，E，F 重合，得到三棱锥．当 $\triangle ABC$ 的边长变化时，所得三棱锥体积（单位：cm^3）的最大值为______．

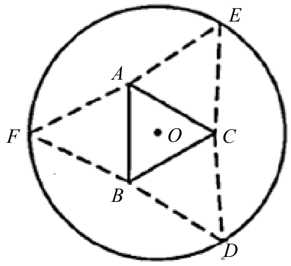


图 14.26

解析：设 $\triangle DBC$，$\triangle ECA$，$\triangle FAB$ 折起后使得 D，E，F 重合于点 S，则所得三棱锥为 $S-ABC$，如图 14.27 所示．

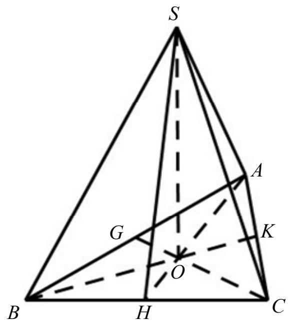


图 14.27

由于等边 $\triangle ABC$ 边长的变化会引起三棱锥底面 $\triangle ABC$ 面积的变化及其高的变化，因此，三棱锥的体积是底面边长的函数．本题的关键就是要首先确定这个函数．

为此，设等边 $\triangle ABC$ 的边长为 $AB=BC=AC=x$，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}x^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$．　等边 $\triangle ABC$ 的相邻两边都为 x，且夹角为 60°

为了研究三棱锥的高 SO 与 $\triangle ABC$ 的边长 x 的关系，在 $\mathrm{Rt}\triangle SHO$ 中需要确定 SH 和 OH 与 x 的关系，且 $SH+HO=5$．　题设圆的半径

为此，连接 OD 交于 BC 的中点 H，如图 14.28 所示．

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCK$ 中，$BK=BC\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}x$．

由于 $\mathrm{Rt}\triangle OHB\backsim\mathrm{Rt}\triangle CKB$，　两直角三角形有一个公共角

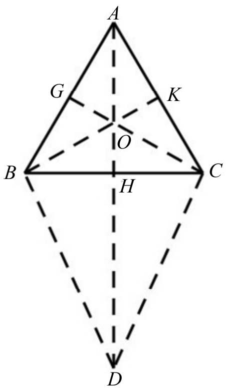


图 14.28

因此 $\frac{OH}{CK}=\frac{BH}{BK}$．∵ $CK=BH=\frac{1}{2}x$，$BK=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

∴ $OH=\frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}x}=\frac{1}{2\sqrt{3}}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$．事实上，根据平面几何中的中线定理可得：

$OH=\frac{1}{3}AH=\frac{1}{3}AB\sin 60^\circ=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{6}x$．从而 $HD=5-OH=5-\frac{\sqrt{3}}{6}x$，

即 $HS=5-\frac{\sqrt{3}}{6}x$．因此，在 Rt$\triangle SHO$ 中，由勾股定理可得：

$$SO=\sqrt{SH^2-OH^2}=\sqrt{\left(5-\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2}=\sqrt{25-\frac{5\sqrt{3}}{3}x}.$$

故三棱锥 $S-ABC$ 的体积为：

$$V_{S-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot SO=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\times\sqrt{25-\frac{5\sqrt{3}}{3}x}=\frac{\sqrt{15}}{12}\sqrt{5x^4-\frac{\sqrt{3}}{3}x^5}.$$

令 $f(x)=5x^4-\frac{\sqrt{3}}{3}x^5$，则 $f'(x)=20x^3-\frac{5\sqrt{3}}{3}x^4$．令 $f'(x)=0$ 可得：$20x^3-\frac{5\sqrt{3}}{3}x^4=0$，解得：$x=4\sqrt{3}$．即当 $x=4\sqrt{3}$ 时，$f_{\max}(x)=f(4\sqrt{3})=5x^4-\frac{\sqrt{3}}{3}x^5=x^4\left(5-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)=\left(4\sqrt{3}\right)^4\times\left(5-\frac{\sqrt{3}}{3}\times4\sqrt{3}\right)=48^2$，故 $V_{\max}=\frac{\sqrt{15}}{12}\times48=4\sqrt{15}$．

例 14.23（丙 1812/60）设 A，B，C，D 是同一个半径为 4 的球面上的四点，$\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，则三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为（　）.

A．$12\sqrt{3}$　　B．$18\sqrt{3}$　　C．$24\sqrt{3}$　　D．$54\sqrt{3}$

解析：如图 14.29 所示作图.

∵题设 $\triangle ABC$ 为等边三角形且其面积为 $9\sqrt{3}$，

∴当点 D 到 $\triangle ABC$ 的距离最大时，三棱锥 $D-ABC$ 体积最大.

又∵等边三角形 $\triangle ABC$ 的面积为 $9\sqrt{3}$，

∴由三角形面积公式可得：$\frac{1}{2}AB^2\sin60°=9\sqrt{3}$，解得：$AB=6$．由正弦定理可得：等边三角形 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 r 满足：$\frac{AB}{2r}=\sin60°$，解得：$r=\frac{AB}{2\sin60°}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$．

还可以利用三角函数或勾股定理求得，但计算较为复杂

又∵球半径 $R=4$，∴由勾股定理可得：球心到 $\triangle ABC$ 的距离为 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16-12}=2$．

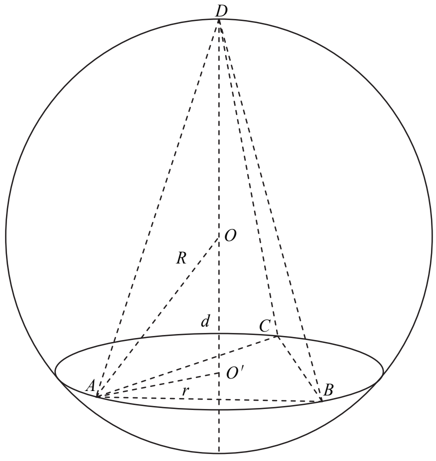


图 14.29

从而三棱锥 $D-ABC$ 体积最大时，顶点 D 到 $\triangle ABC$ 的距离（即高 h）为 $h=R+d=4+2=6$．

从而 $\left(V_{D-ABC}\right)_{\max}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times6=18\sqrt{3}$．

故选 B，不选 ACD.

问题 5　球的表面积问题

问题分析：对于球的表面积问题关键是要求出球的半径.

条件 5.1　给定球内接几何体的体积

条件分析：给定球内接几何体的体积时，关键是要找出球的半径与几何体体积的关系.

例 14.24（乙 1716）已知三棱锥的所有顶点都在球 O 的球面上，SC 是球 O 的直径．若平面 $SCA\perp$ 平面 SCB，$SA=AC$，$SB=BC$，三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9，则球 O 的表面积为________.

解析：如图 14.30 所示，以 SC 为直径（轴）作球 O.

∵题设平面 $SCA\perp$ 平面 SCB，∴点 A，B 在四分之一的球面上.

又∵题设 $SA=AC$，$SB=BC$，

∴点 A，B 在过球心 O，且与直径 SC 垂直的平面上.

∵ $SA=AC$，$SB=BC$，∴ $OA\perp SC$，$OB\perp SC$.

∵平面 $SAC\perp$ 平面 SBC，∴ $OA\perp$ 平面 SBC.

设 $OA=r$，则 $V_{A-SBC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle SBC}\times OA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2r\times r\times r=\frac{1}{3}r^3$，所以由 $\frac{1}{3}r^3=9$ 可得：$r=3$. 代入球表面积公式可得：$4\pi r^2=36\pi$.

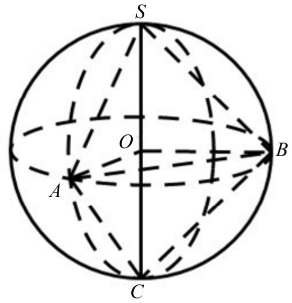


图 14.30

例 14.25 （甲 1604）体积为 8 的正方体的顶点都在同一球面上，则该球面的表面积为（　）.

A．12π　　B．$\frac{32}{3}\pi$　　C．8π　　D．4π

解析：如图 14.31 所示设正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的体积为 8，则边长均为 2. 在底面 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，由勾股定理可得：底面对角线长为 $BD=2\sqrt{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle B'BD$ 中，由勾股定理可得：$B'D=\sqrt{B'B^2+BD^2}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. 因此，该正方体外接球的半径为 $\sqrt{3}$，从而该球的表面积为 $S=4\pi R^2=12\pi$. 故选 A，不选 BCD.

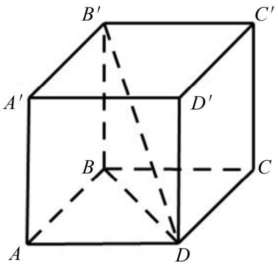


图 14.31

例 14.26 （甲 1510/59）已知 A，B 是球 O 的球面上两点，$\angle AOB=90^\circ$，C 为该球面上的动点，若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36，则球 O 的表面积为（　）.

A．36π　　B．64π

C．144π　　D．256π

解析：如图 14.32 所示，设球的半径为 R，∵ $\angle AOB=90^\circ$，

∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}R^2$. ∵ $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}$，且 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}R^2$ 为定值. ∴当点 C 到平面 AOB 的距离最大时，$V_{O-ABC}=V_{C-AOB}$ 达到最大，即当 OC 垂直平面 AOB 时，$V_{O-ABC}=V_{C-AOB}$ 达到最大，此时，$OC=R$，$V_{C-AOB}=\frac{1}{3}S_{\triangle AOB}\cdot R=\frac{1}{6}R^3$.

∵三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36，∴ $\frac{1}{6}R^3=36$，解得：$R=6$.

∴球的表面积为 $4\pi R^2=144\pi$. 故选 C，不选 ABD.

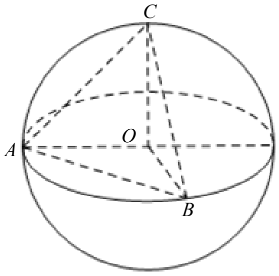


图 14.32

例 14.27 （甲 1315）已知正四棱锥 $O-ABCD$ 的体积为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，底面边长为 $\sqrt{3}$，则以 O 为球心，OA 为半径的球的表面积为________.

解析：∵正四棱锥 $O-ABCD$ 的底面边长为 $\sqrt{3}$，∴ $AB=BC=CD=DA=\sqrt{3}$，且底面对角线 $AC=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$. 设正四棱锥的高为 h，则由“正四棱锥 $O—ABCD$ 的体积为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$”可得：$\frac{1}{3}AB\cdot BC\cdot h=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，解得：$h=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 由勾股定理可得：$OA=\sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2+h^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$. 所以球的表面积为 $S=4\pi OA^2=4\pi\left(\sqrt{6}\right)^2=24\pi$.

例 14.28 （甲 1715）长方体的长、宽、高分别为 3，2，1，其顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为__________.

解析：∵球的直径是长方体的对角线，∴ $2R=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$，$S=4\pi R^2=14\pi$.

经验总结：涉及球与棱柱，棱锥的切、接等问题时，一般过球心及多面体中的特殊点（一般为接、切点）或线作截面.

条件 5.2　给定球内截圆的面积

条件分析：当给定球内截圆的面积时，关键是要找出球的半径与内截圆面积的关系.

例 14.29　（乙 1315）已知 H 是球 O 的直径 AB 上一点，$AH:HB=1:2$，$AB\perp$ 平面 α，H 为垂足，α 截球 O 所得截面的面积为 π，则球 O 的表面积为______.

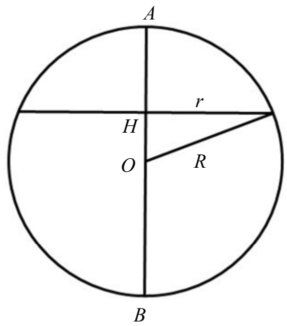


图 14.33

解析：如图 14.33 所示，设球的半径为 R，截面圆的半径为 r，则 $AB=2R$.

$\because AH:HB=1:2$，$\therefore AH=\dfrac{1}{3}\times 2R=\dfrac{2}{3}R$，故 $OH=R-AH=\dfrac{1}{3}R$.

又$\because$题设 α 截球 O 所得截面的面积为 π，$\therefore \pi r^2=\pi$，解得：$r=1$.

在直角三角形中，由勾股定理可得：$R^2=OH^2+r^2$，即 $R^2=\left(\dfrac{1}{3}R\right)^2+1^2$，

解得：$R^2=\dfrac{9}{8}$. 因此，球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times\dfrac{9}{8}=\dfrac{9}{2}\pi$.

问题 6　球的体积问题

问题分析：对于球的体积问题关键是要求出球的半径.

条件 6.1　给定球冠的高度

条件分析：对于给定球冠的高度的问题，关键是要通过构造三角形获得“弦心距”.

例 14.30　（乙 1356）如图 14.34 所示，有一个水平放置的透明无盖的正方体容器，容器高 8 cm，将一个球放在容器口，再向容器内注水，当球面恰好接触水面时测得水深为 6 cm，如不计容器的厚度，则球的体积为（　）.

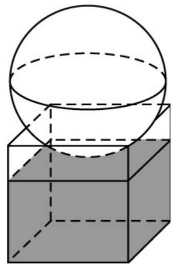


图 14.34

A. $\dfrac{500\pi}{3}\text{cm}^3$　　B. $\dfrac{866\pi}{3}\text{cm}^3$

C. $\dfrac{1372\pi}{3}\text{cm}^3$　　D. $\dfrac{2084\pi}{3}\text{cm}^3$

解析：画出球的一个纵向截面如图 14.35 所示，则

$MC=8-6=2\text{cm}$，$AB=8\text{cm}$.

正方体容器宽与高相等

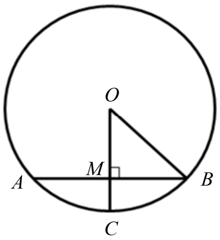


图 14.35

设球的半径为 $R\text{cm}$，则在 $\text{Rt}\triangle OMB$ 中，$OB=OC=R$.

$\because$ $OM=R-MC=R-2$，$MB=\dfrac{1}{2}AB=4\text{cm}$，由勾股定理可得：$R^2=OM^2+MB^2$，即 $R^2=(R-2)^2+4^2$，解得：$R=5\text{cm}$，

$\therefore V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\times 5^3\pi=\dfrac{500\pi}{3}\text{cm}^3$. 故选 A，不选 BCD.

条件 6.2　给定球外切三棱柱的棱长

条件分析：给定球外切三棱柱的棱长时，关键是要在水平面上构造圆的外接三角形.

例 14.31　（丙 1611/60）在封闭的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球，若 $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，$AA_1=3$，则 V 的最大值是（　）.

A．4π　　B．$\dfrac{9\pi}{2}$　　C．6π　　D．$\dfrac{32\pi}{3}$

解析：如图 14.36 所示，∵在封闭的直三棱柱内有一个球，∴球的大小受三棱柱的高度和底面三角形的限制．

∵ $AA_1=3$，∴受三棱柱“高”限制的最大球的半径为$\dfrac{3}{2}$．

∵ $AB\perp BC$，$AB=6$，$BC=8$，∴ $AC=10$．

显然，$\text{Rt}\triangle ABC$ 内切圆的半径 $r=\dfrac{6+8-10}{2}=2>\dfrac{3}{2}$．

因此，最大球的半径为$\dfrac{3}{2}$，从而其体积为：$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4\pi}{3}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=\dfrac{9}{2}\pi$，故选 B，不选 ACD．

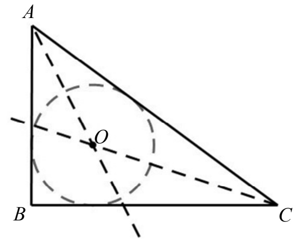


图 14.36

例 14.32（乙 1809/57）某圆柱的高为 2，底面周长为 16，其三视图如图 14.37 所示，圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A，圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B，则在此圆柱侧面上，从 M 到 N 的路径中，最短路径的长度为（　）．

A．$2\sqrt{17}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．3　　D．2

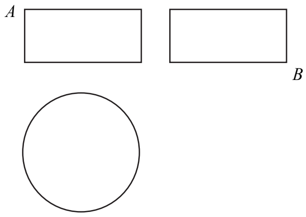


图 14.37

解析：本题需分两步进行，第一步：根据三视图还原圆柱体，并确定点 M，N，如图 14.38 所示．

第二步：在侧面展开图中确定从 M 到 N 的最短路径，如图 14.39 所示，此处需利用“平面内两点间直线距离最短”公理．

∵圆柱体的高为 2，底面周长为 16，

∴由勾股定理可得：$MN=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$．故选 B，不选 ACD．

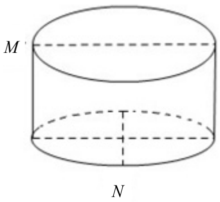


图 14.38

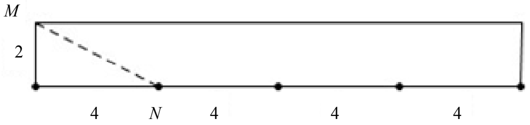


图 14.39

例 14.33（乙 1862）已知正方体的棱长为 1，每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等，则 α 截此正方体所得截面面积的最大值为（　）．

A．$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

分析：本题一共只有三句话，另加四个选项．

第一句：已知正方体的棱长为 1，据此我们可以绘制一个棱长为 1 的立方体 $ABCD-A'B'C'D'$．

第二句：每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等．观察立方体可见：每一个立方体都有 12 条棱，这 12 条棱可以分为 3 组，并且每组的 4 条棱都是相互平行的．（根据空间平行直线与同一平面所成的角相等来对 12 条棱进行分组．）

因此，这句话可以归纳为“相互垂直的三条棱与平面 α 所成的角都相等”．由于过立方体每个顶角的三条棱都是相互垂直的，因此连接顶角 A 的三个侧面的对角线所构成的平面与三条棱所成的角相等．（用具体平面代替抽象平面，便于具体分析．）

此平面截得立方体的截面为等腰三角形 $A'BD$；事实上，连接顶角 C' 的三个侧面的对角线所构成的等边三角形 $B'CD'$ 所在的平面也符合要求．

第三句话：求截面面积的最大值．应该猜想到：随着此截面的平行移动（保证所有棱与之所形成的角

都相等），截得的截面的面积可能发生变化．当截面平移向立方体顶角靠近时，所得截面（等边三角形）的面积在逐步减小．因此，截面只能向着远离顶角的方向平移时，截面的面积才有可能取得最大．由图可见，所求平面应该在上述两个等腰三角形所在的平面之间．因此，解决问题的关键是确定截面取得最值的位置：既可以从函数的角度进行定量分析，也可以从几何的角度用特殊值进行定性分析．

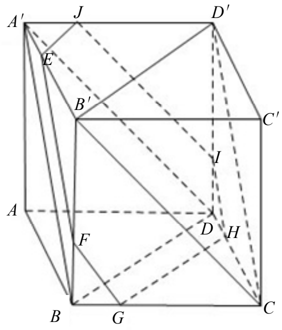


图 14.40

解析 1：如图 14.40 所示，设截面平移离开点 A' 的距离为 x，即 $A'E=A'J=x$，则 $EB'=JD'=1-x$；同理可得：$BF=BG=DH=DI=x$，$CG=CH=1-x$．

由勾股定理可得：$EJ=\sqrt{2}x$，$EF=\sqrt{2}(1-x)$．

由于待定平面与立方体平行相对的两个面的交线互相平行，因此六边形 $EFGHIJ$ 相对的两条边相互平行，长短不同，分别为 $\sqrt{2}x$ 和 $\sqrt{2}(1-x)$．

面面平行性质定理

由多边形内角和公式 $(n-2)\cdot 180°$ 可得：六边形的内角和为 $720°$．由对称性可知：六边形 $EFGHIJ$ 的 6 个内角都相等，因此每个内角都等于 $\frac{720°}{6}=120°$．据此，绘制出六边形 $EFGHIJ$ 的示意图如图 14.40 所示．

由于六边形 $EFGHIJ$ 的内角都是 $120°$，因此，把与任意一条边相邻的两条边反向延长都会构成等边三角形．如图 14.41 所示，将三条边长为 x 的边向外延长构造三个等边三角形，则六边形 $EFGHIJ$ 的面积等于等边三角形 KMN 的面积减去三个边长为 x 的等边三角形的面积．

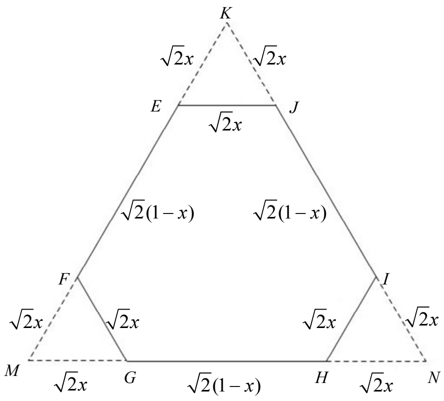


图 14.41

又 ∵ 等边 $\triangle KMN$ 的边长为：$\sqrt{2}(1-x)+2\sqrt{2}x=\sqrt{2}(1+x)$，∴ 六边形 $EFGHIJ$ 的面积为：

$$S=\frac{1}{2}\times 2(1+x)^2\sin 60°-3\times\frac{1}{2}\times 2x^2\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2=-\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

将 S 看成是关于 x 的开口向下的抛物线，因此，当 $x=-\frac{B}{2A}=\frac{1}{2}$ 时，$S_{\max}=C-\frac{B^2}{4A}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$．

故选 C，不选 ABD．

解析 2：建立如图 14.42 所示的空间直角坐标系，则正方体的 12 条棱可以分为 3 组，每组 4 条分别与单位向量 $\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{DD'}=(0,0,1)$ 平行．

设截面 $EFGHIJ$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则根据每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等可得：$\frac{\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DA}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DC}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\overrightarrow{DD'}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DD'}||\boldsymbol{n}|}$（$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$），即 $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$．

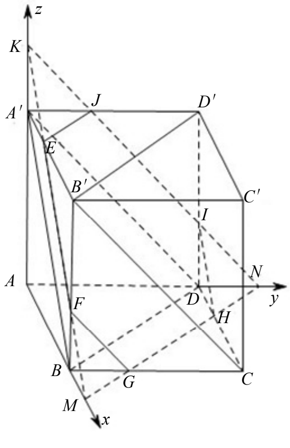


图 14.42

取 $x=y=z=1$ 满足上式，故截面 $EFGHIJ$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$．

设 $|BM|=t$（$t>0$），$|DM|=1+t$，则 ∵ $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，

∴ $|DC|=|DD'|=|DM|=1+t$，因此，$\triangle KMN$ 为等边三角形，且由勾股定理（或三角函数）可得边长为 $\sqrt{2}(1+t)$，且等边 $\triangle KMN$ 的面积为

$S_{\triangle KMN}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}(1+t)\right]^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)^2$．同理可得：等边$\triangle KEJ$的面积为$S_{\triangle KEJ}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}t\right)^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$．

由图可见：$S_{EFGHIJ}=S_{\triangle KMN}-3S_{\triangle KEJ}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}t^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-2t^2+2t+1\right)$，

当$t=-\frac{B}{2A}=-\frac{2}{2\times(-2)}=\frac{1}{2}$时，$\left(S_{EFGHIJ}\right)_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(C-\frac{B^2}{4A}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(1-\frac{2^2}{4\times(-2)}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$．

故选C，不选ABD．

解析3：由对称性可知：所求平面过AC'的中点，且与平面$A'BD$平行．

为确定AC'的中点，作切面$A'ACC'$如图14.43所示，则$AC=A'C'=\sqrt{2}$，且$AK=\frac{\sqrt{2}}{2}$．如图14.43所示，MN是所求截面与平面$A'ACC'$的交线，且点O是MN的中点，由三角形中位线可得：$A'M=\frac{1}{2}AK$．

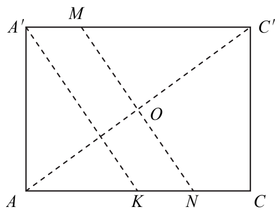


图 14.43

如图14.44所示，在$\mathrm{Rt}\triangle A'M_1M_2$中，$M_1M_2=2A'M=AK=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

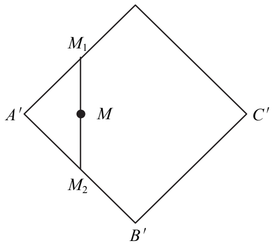


图 14.44

因此，所求截面是以$M_1M_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$为边长的正六边形，其面积为6个边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的等边三角形的面积，即$S=6\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}$．

第 15 题 空间点、线、面的位置关系背景

15

背景知识

空间两条直线平行公理：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

直线与平面平行判定定理：如果平面外一条直线与这个平面内的一条直线平行，那么这条直线与这个平面平行. 即：若$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，且$a/\!/b$，则$a/\!/\alpha$.

直线与平面平行性质定理：如果一条直线与一个平面平行，那么过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行. 即：若$a/\!/\alpha$，且$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b$，则$a/\!/b$.

直线与平面垂直判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线垂直，那么这条直线垂直于这个平面. 即：若$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\cap n\neq\varnothing$，且$l\perp m$，$l\perp n$，则$l\perp\alpha$.

直线与平面垂直性质定理：垂直于同一个平面的两条直线平行. 即：若$a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，则$a/\!/b$.

平面与平面平行判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行. 即：若$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\cap b\neq\varnothing$，且$a/\!/\beta$，$b/\!/\beta$，则$\alpha/\!/\beta$.

平面与平面平行性质定理 1：如果两个平面平行，那么其中一个平面内的任意一条直线都平行于另一个平面. 即：若$\alpha/\!/\beta$，且$a\subset\alpha$，则$a/\!/\beta$.

平面与平面平行性质定理 2：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线相互平行. 即：若$\alpha/\!/\beta$，且$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b$，则$a/\!/b$.

平面与平面垂直判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直. 即：若$l\perp\beta$，$l\subset\alpha$，则$\alpha\perp\beta$.

平面与平面垂直性质定理：如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面. 即：若$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=a$，且$l\subset\alpha$，$l\perp a$，则$l\perp\beta$.

问题 1 空间线线关系问题

问题分析：对于空间的线线关系问题，关键是要牢记异面直线之间的位置关系.

条件 1.1 给定空间直线与直线的位置关系

条件分析：通过对给定的空间直线间位置关系的分析，确定可能的位置，进而推测待定位置关系.

例 15.1 （粤 1409）若空间中四条两两不同的直线l_1，l_2，l_3，l_4，满足$l_1\perp l_2$，$l_2/\!/l_3$，$l_3\perp l_4$，则下列结论一定正确的是（ ）.

A. $l_1\perp l_4$　　B. $l_1/\!/l_4$

C. l_1与l_4既不垂直也不平行　　D. l_1与l_4的位置关系不确定

解析：如图 15.1 所示，设l_1为正方体底面外沿所在直线（下同）.

①若$l_1\perp l_2$，则l_2既可能与l_1在立方体的同一平面内，如图 15.1（a）所示，也可能是与l_1垂直的平面上的任一条直线，如图 15.1（b）所示；

②若$l_2 // l_3$，则l_3必然与l_2在同一个平面上（两条平行线确定一个平面），如图 15.1（a）和图 15.1（b）所示；

③若$l_3 \perp l_4$，则l_4既可能与l_3在同一个平面，也可能与l_3在不同的平面，如图 15.1（b）所示：当$l_{4\text{-}1}$与l_3在同一平面内时，$l_1 \perp l_{4\text{-}1}$；当$l_{4\text{-}2}$与l_3不在同一平面时，尽管$l_3 \perp l_{4\text{-}2}$，但是，l_1与$l_{4\text{-}2}$属异面直线，其关系不能唯一确定．故选 D，不选 ABC．

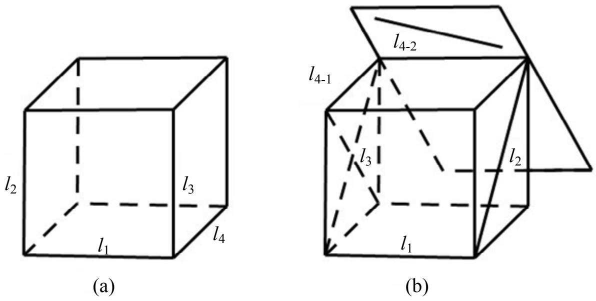


图 15.1

例 15.2 （粤 1457）若空间中四条两两不同的直线l_1，l_2，l_3，l_4，满足$l_1 \perp l_2$，$l_2 \perp l_3$，$l_3 \perp l_4$，则下列结论一定正确的是（　）．

A．$l_1 \perp l_4$　　B．$l_1 // l_4$

C．l_1与l_4既不垂直也不平行　　D．l_1，l_4的位置关系不确定

解析：如图 15.2 所示，设l_1为正方体底面外缘所在直线（下同）．

①若$l_1 \perp l_2$，则l_2既可能与l_1在立方体的同一平面，如图 15.2（a）所示，也可能与l_1不在立方体的同一平面内，如图 15.2（b）所示；

②若$l_2 \perp l_3$，则l_3既可能与l_2在同一个平面，也可能与l_2在不同的平面，如图 15.2（a）（b）所示；

③若$l_3 \perp l_4$，则l_4既可能与l_3在同一个平面内，也可能与l_3不在同一个平面内，因此，l_1与l_4的关系不能唯一确定．故选 D，不选 ABC．

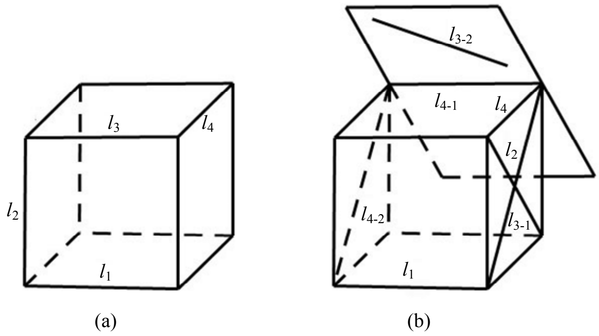


图 15.2

> **经验总结**：研究空间线线关系的问题，可以虚构一个立方体，全面综合考虑“同面”和“异面”两种状态下的线线位置关系．

例 15.3 （丙 1710）在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为棱CD的中点，则（　　）．

A．$A_1E \perp DC_1$　　B．$A_1E \perp BD$　　C．$A_1E \perp BC_1$　　D．$A_1E \perp AC$

解析：

A 选项：若$A_1E \perp DC_1$，那么$D_1E \perp DC_1$，很显然不成立；

B 选项：若$A_1E \perp Bx$，那么$BD \perp AE$，显然不成立；

C 选项：若$A_1E \perp BC_1$，那么$BC_1 \perp B_1C$，成立，反过来$BC_1 \perp B_1C$时，也能推出$BC_1 \perp A_1E$．

D 选项：若$A_1E \perp AC$，则$AE \perp AC$，显然不成立．

故选 C，不选 ABD．

问题 2 空间线线夹角问题

问题分析：对于空间异面直线所成夹角的问题，往往需要通过平移将异面直线的夹角转化为同一个平面内两条直线的夹角，并通过解三角形来求解．

条件 2.1　给定三棱柱及其边长

条件分析：给定三棱柱及其边长时，利用给定的条件构造三角形．

例 15.4 （甲 1760）已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ABC = 120^\circ$，$AB = 2$，$BC = CC_1 = 1$，则异面直线AB_1与BC_1所成角的余弦值为（　）．

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析：如图 15.3 所示，补成直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，因为 $DC_1 // AB_1$，所以 $\angle DC_1B$ 或其补角，即为异面直线 AB_1 与 BC_1 所求的角或其补角．在 $\triangle BCC_1$ 中，$\because CC_1 \perp BC$，且 $BC = CC_1 = 1$，$\therefore$ 由勾股定理可得：$BC_1 = \sqrt{2}$．同理，在 $\triangle DCC_1$ 中，$\because CC_1 \perp DC$，且 $DC = 2$，$CC_1 = 1$，$\therefore$ 由勾股定理可得：$DC_1 = \sqrt{5}$．

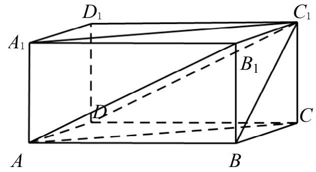


图 15.3

在 $\triangle ABD$ 中，$\because \angle ABC = 120^\circ$，$\therefore \angle DAB = 60^\circ$．由余弦定理可得：$BD = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2\times 2\times 1\times \cos 60^\circ} = \sqrt{3}$．因此，在 $\triangle DBC_1$ 中，由余弦定理可得：$\cos\angle DC_1B = \dfrac{DC_1{}^2 + BC_1{}^2 - BD^2}{2DC_1\cdot BC_1} = \dfrac{5+2-3}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$．事实上，$\because BD^2 + BC_1^2 = DC_1^2$，$\therefore \triangle DBC_1$ 为直角三角形，从而由余弦的定义可得：$\cos\angle DC_1B = \dfrac{BC_1}{DC_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$．故选 C，不选 ABD.

经验总结：求空间异面直线所成角的常用方法是平移法，平移法的基本思路是通过平移直线，将异面问题转化为共面的平面问题来解决，具体步骤如下：

①平移，平移异面直线中的一条或两条，在同一个平面内作出异面直线所成的角；

②认定，证明所作出的角就是所求异面直线所成的角；

③计算，求出该角的值，通常需要利用解三角形的方法计算；

④取舍，由于异面直线所成角的取值范围是 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，当所作的角为钝角时，应取它的补角作为异面直线所成的角.

例 15.5（乙 1611/61）平面 α 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A，$\alpha //$ 平面 CB_1D_1，$\alpha \cap$ 平面 $ABCD = m$，$\alpha \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = n$，则 m，n 所成角的正弦值为（　）.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

解析：如图 15.4 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的两端再各补作一个正方体，先作出平面 CB_1D_1，并在平面内延伸至 F 点，再过 A 点作 α 平面平行于平面 CB_1D_1，则 α 平面与上平面的交线为左边立方体上表面的对角线，与前侧面的交线是左边立方体的前表面的对角线，且与左端面的交线为对角线．因此，$\triangle AHE_1$ 是以正方体侧面对角线为边长的等边三角形，即 $\angle HAE_1 = 60^\circ$，所以正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．故选 A，不选 BCD.

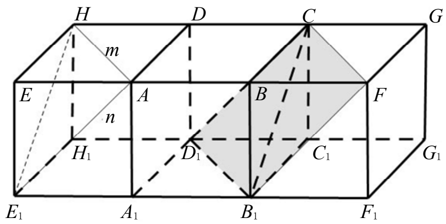


图 15.4

例 15.6（甲 1461）直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA = 90^\circ$，M，N 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，$BC = CA = CC_1$，则 BM 与 AN 所成角的余弦值为（　）.

A. $\dfrac{1}{10}$　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：$\because$ 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $\angle BCA = 90^\circ$，$\therefore$ 如图 15.5 所示，以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{CB}$ 为 y 轴正方向，$\overrightarrow{CC_1}$ 为 z 轴正方向，建立空间直角坐标系．$\because M$，N 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，$\therefore$ 设

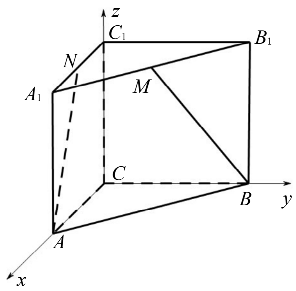


图 15.5

$BC=CA=CC_1=2$，则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$M(1,1,2)$，$N(1,0,2)$.

从而 $\overrightarrow{BM}=(1,-1,2)$， M 点坐标减去 B 点坐标

$\overrightarrow{AN}=(-1,0,2)$. N 点坐标减去 A 点坐标

因此，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{BM}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}=\dfrac{-1+0+4}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$. 故选 C，不选 ABD.

例 15.7 （甲 1859）在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=1$，$AA_1=\sqrt{3}$，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为（　）.

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：如图 15.6 所示，以点 D 为坐标原点，沿着长方体的棱建立的空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$B_1(1,1,\sqrt{3})$ $A(1,0,0)$，$D_1(0,0,\sqrt{3})$，从而 $\overrightarrow{DB_1}=(1,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,\sqrt{3})$.

由 $\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}=|\overrightarrow{AD_1}|\cdot|\overrightarrow{DB_1}|\cos\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{DB_1}\rangle$ 可得：

$$\cos\langle\overrightarrow{AD_1},\overrightarrow{DB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DB_1}}{|\overrightarrow{AD_1}|\cdot|\overrightarrow{DB_1}|}=\frac{-1\times1+0\times1+\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+1^2+3}\sqrt{(-1)^2+0^2+3}}=\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

故选 C，不选 ABD.

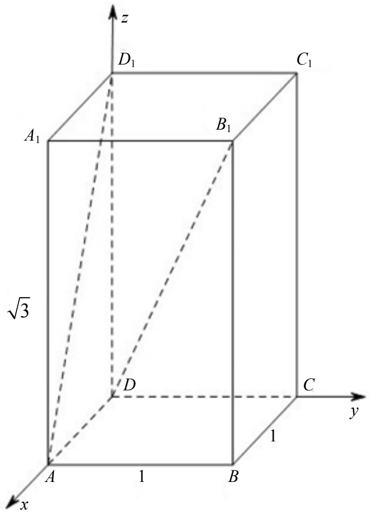


图 15.6

例 15.8 （甲 1809）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 CC_1 的中点，则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为（　）.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

解析：如图 15.7 所示，绘制棱长为 2 的正方体.

∵ E 为棱 CC_1 的中点，∴ $EC=1$.

为了求异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值，关键是要确定直线 AE 与哪条直线的夹角等于异面直线 AE 与 CD 所成的角.

一般的思路是在直线 AE 的两个端点 A 或 E 作线段 CD 的平行线.

① ∵ $AB\parallel CD$，∴ $\angle EAB$ 即为所求两异面直线的夹角.

∵在 Rt△EBC 中，$BC=2$，$EC=1$，

∴由勾股定理可得：$EB=\sqrt{BC^2+EC^2}=\sqrt{2^2+1^1}=\sqrt{5}$.

因此，在 Rt△AEB 中，由正切函数定义可得：$\tan\angle EAB=\dfrac{EB}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

② 取 DD' 的中点 F，连接 EF，则 $EF\parallel CD$，$\angle FEA$ 即为所求两异面直线的夹角.

故选 C，不选 ABD.

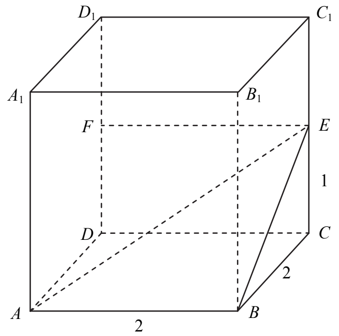


图 15.7

> **经验总结**：对于没有给定具体数值，而只给定边长关系的“直”棱柱或“直”圆柱，通过建立空间直角坐标系，并设置长度单位利用点的坐标进行向量计算也是一种很好的策略.

问题 3 线面关系问题

问题分析：对于空间线面关系的问题，主要是需要确定线与面的平行关系、垂直关系或相交关系.

证明线面平行的常用方法有两种：①利用线面平行判定定理（直接证明）：即设法在平面内找到一条与已知直线平行的直线，可利用几何体的性质，合理利用中位线定理、构造平行四边形、寻找比例式证明两直线平行. ②利用面面平行性质定理（间接证明）：即先证明直线所在平面与已知平面平行，然后利用线面平行的性质可得该直线与已知平面平行.

条件 3.1　给定空间立方体

条件分析：利用给定空间立方体的条件构造三角形.

例 15.9（乙 1706）如图 15.8 所示，在下列四个正方体中，A，B 为正方体的两个顶点，M，N，Q 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 AB 与平面 MNQ 不平行的是（　）.

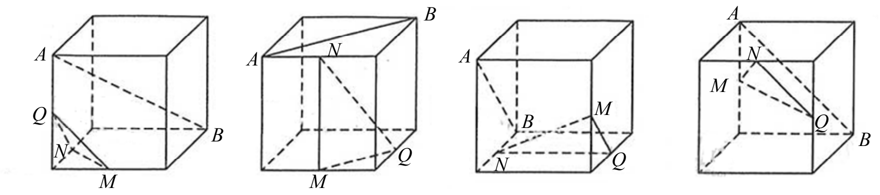


图 15.8

解析：对于确定"不"选项的问题需要逐题判断：　先易后难!

对于 B 选项，$\because AB /\!/ MQ$，$\therefore$ 直线 $AB /\!/$ 平面 MNQ；对于 C 选项，$\because AB /\!/ MQ$，$\therefore$ 直线 $AB /\!/$ 平面 MNQ；对于 D 选项，$\because AB /\!/ NQ$，$\therefore$ 直线 $AB /\!/$ 平面 MNQ. 因此排除 B，C，D，故选 A.

> **经验总结**：在 B，C，D 三个选项中，直线 AB 都是同一个平面内正方形的对角线，而在 A 选项中，直线 AB 是整个立方体的对角线. 因此，按照选择题的一般设计原则可选 A（三同一异选不同）.

问题 4　线面关系综合问题

问题分析：对于空间线面关系的判断问题，往往需要借助点线关系、线线关系、线面关系和面面关系的定义、公理、判定定理和性质定理判断.

条件 4.1　给定若干公理

条件分析：对给定的公理进行判断.

例 15.10（皖 1353）在下列命题中，不是公理的是（　）.

A．平行于同一个平面的两个平面相互平行

B．过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面

C．如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在此平面内

D．如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线

解析：由于需要确定"不是公理"的选项，因此首先要看四个选项是否有"假"命题，如果有，则该选项（"假"命题）肯定不是公理；如果四个选项都是"真"命题，那么就需要看哪个选项是需要并且可以证明的，那些无法证明，也无须证明的选项就是公理.

显然，A 选项是可以推导证明的，因而是定理；而 B，C，D 三个选项都是无须证明，并且是"真"命题，因而是公理. 故选 A，不选 BCD.

条件 4.2　给定线面若干关系

条件分析：根据给定的线面关系对相关选项进行综合判断，需要逐个排除.

例 15.11 （甲 1354）已知m，n为异面直线，$m\perp$平面α，$n\perp$平面β．直线l满足$l\perp m$，$l\perp n$，$l\not\subset\alpha$，$l\not\subset\beta$，则（　）.

A．$\alpha/\!/\beta$且$l/\!/\alpha$　　B．$\alpha\perp\beta$且$l\perp\beta$

C．α与β相交，且交线垂直于l　　D．α与β相交，且交线平行于l

解析 1：（**排除法**）A 选项：假设$\alpha/\!/\beta$，$\because m\perp$平面α，$\therefore m\perp$平面β.

又$\because n\perp$平面β，$\therefore m/\!/n$与“m，n为异面直线”矛盾.

B 选项：假设$l\perp\beta$，$\because n\perp$平面β，$\therefore l/\!/n$与题设“$l\perp n$”矛盾.

C，D 选项：$\because m\perp$平面α，且$l\perp m$，$\therefore l/\!/\alpha$；同理可得：$l/\!/\beta$.

又$\because \alpha\nparallel\beta$，$\therefore\alpha$与$\beta$相交，且交线平行于$l$，与“交线垂直于$l$”矛盾．故选 D，不选 ABC.

解析 2：$\because$已知m,n为异面直线，$\therefore$在空间过任意一点$P(P\notin m，P\notin n)$作$m'/\!/m$，$n'/\!/n$.

$\because l\perp m$，$l\perp n$，$\therefore l\perp m'$，$l\perp n'$．因此，l垂直于m'与n'确定的平面γ.

又$\because m\perp$平面α，$n\perp$平面β，$\therefore m'\perp$平面α，$n'\perp$平面β，即$\gamma\perp\alpha$且$\gamma\perp\beta$．因此，α与β相交.

又$\because\gamma\perp\alpha$，$\gamma\perp\beta$，

$\therefore\alpha$与β的交线垂直于γ.　　垂直于同一个平面的两个相交平面的交线也垂直于该平面

又$\because l$垂直于m'与n'确定的平面γ，

$\therefore l$平行于α与β的交线.　　垂直于同一个平面的两条直线平行

故选 D，不选 ABC.

例 15.12 （浙 1652）已知互相垂直的平面α，β交于直线l．若直线m，n满足$m/\!/\alpha$，$n\perp\beta$，则（　）.

A．$m/\!/l$　　B．$m/\!/n$　　C．$n\perp l$　　D．$m\perp n$

解析：$\because$题设：互相垂直的平面α，β交于直线l，$\therefore$平面$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$.

A 选项：$\because m/\!/\alpha$，$\therefore$直线m平行于过m的平面与平面α的交线，但不能得出：$m/\!/l$.

B 选项：$\because\alpha\perp\beta$，$n\perp\beta,\therefore n/\!/\alpha$或者$n\subset\alpha$．当$m/\!/\alpha$时，不能得出：$m/\!/n$.

C 选项：$\because n\perp\beta$，$\therefore n\perp l$.　　线面垂直性质定理

D 选项：$\because\alpha\perp\beta$，$m/\!/\alpha$，$\therefore m$与β各种关系都可能．若$m\perp\beta$，则$\because n\perp\beta$，$\therefore m\perp n$错误.

故选 C，不选 ABD.

例 15.13 （皖 1555）已知m，n是两条不同直线，α，β是两个不同平面，则下列命题正确的是（　）.

A．若α，β垂直于同一平面，则α与β平行

B．若m，n平行于同一平面，则m与n平行

C．若α，β不平行，则在α内不存在与β平行的直线

D．若m，n不平行，则m与n不可能垂直于同一平面

解析：（**排除法**）A 选项：$\because$题设α，β是两个不同平面，$\therefore$当α，β垂直于同一平面时，平面α与β的关系不能唯一确定.　　容易错把α，β当作直线而确定$\alpha/\!/\beta$

B 选项：$\because$题设m，n是两条不同直线，$\therefore$当m，n平行于同一平面时，直线m与n的关系不能唯一确定.　　容易错把m，n当作平面而确定$m/\!/n$

C 选项：若α，β不平行，设$\alpha\cap\beta=l$，且平面$\gamma/\!/\beta$，$\gamma\cap\alpha=k$，则$k/\!/\beta$．故命题错误.

D 选项：设$m\perp\gamma$，$n\perp\gamma$（设m，n垂直于同一个平面γ），则$m/\!/n$.　　线面垂直性质定理

D 选项实际上是“线面垂直性质定理”的逆否命题，因此是等效命题．即 D 选项正确.

故选 D，不选 ABC.

经验总结：利用逆否命题与原命题互为等价命题，在判断命题的真假时，可以通过判断其逆否命题的真假来确定原命题的真假.

逆否命题：先逆后否．所谓先逆就是将原命题的条件与结论互换位置；所谓后否就是将原命题的条件和结论双双否定．

例 15.14（粤 1506）若直线l_1和l_2是异面直线，l_1在平面α内，l_2在平面β内，l是平面α与平面β的交线，则下列命题正确的是（　）．

A．l至少与l_1，l_2中的一条相交　　B．l与l_1，l_2都相交

C．l至多与l_1，l_2中的一条相交　　D．l与l_1，l_2都不相交

解析：∵l_1与l_2具有相同的属性，∴四个选项中关注的"l与l_1，l_2"的关系，可以转化为"l_1或l_2与l"的关系．因此，不妨以关注"l_1与l"的关系为例分析．　转化问题，转换焦点

∵平面$\alpha\cap\beta=l$，且$l_1\subset\alpha$，$l_2\subset\beta$，∴$l\subset\alpha$，$l_1\subset\alpha$．在平面α内，l_1与l存在如下两种关系：

①若$l_1/\!/l$，则l_1与l共同确定平面α，

∵直线l_1和l_2是异面直线，∴直线l_2必定与l相交．　若$l_2/\!/l$，则$l_2/\!/l_1$，与题设l_1和l_2异面相矛盾

②若$l_1\cap l\neq\varnothing$（直线l_1与l相交），则$l_2/\!/l$或$l_2\cap l\neq\varnothing$（直线l_2与l相交）．

由此可见：直线l至少与l_1和l_2中的一条相交．　归纳推理

故选 A，不选 BCD．

例 15.15（浙 1504）设α，β是两个不同的平面，l，m是两条不同的直线，且$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，则（　）．

A．若$l\perp\beta$，则$\alpha\perp\beta$　　B．若$\alpha\perp\beta$，则$l\perp m$

C．若$l/\!/\beta$，则$\alpha/\!/\beta$　　D．若$\alpha/\!/\beta$，则$l/\!/m$

解析：（排除法）选项 A：∵$l\subset\alpha$，且$l\perp\beta$，∴$\alpha\perp\beta$．　面面垂直判定定理，故正确

选项 B：当$\alpha\perp\beta$时，直线l，m既可以垂直，也可以平行，也可以异面．

选项 C：当$l/\!/\beta$时，平面α，β既可以平行，也可以相交．

选项 D：当$\alpha/\!/\beta$时，直线l，m既可以平行，也可以异面．故选 A，不选 BCD．

例 15.16（辽 1404/54）已知m，n表示两条不同直线，α表示平面，下列说法正确的是（　）．

A．若$m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$，则$m/\!/n$　　B．若$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m\perp n$

C．若$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则$n/\!/\alpha$　　D．若$m/\!/\alpha$，$m\perp n$，则$n\perp\alpha$

解析：（排除法）A 选项：当$m/\!/\alpha$，$n/\!/\alpha$时，直线m，n既可以平行，也可以相交、异面，故错误．

B 选项：当$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$时，$m\perp n$．　线线垂直判定定理，故正确，高考做题时到此为止

C 选项：当$m\perp\alpha$，$m\perp n$时，直线$n/\!/\alpha$或$n\subset\alpha$．

D 选项：当$m/\!/\alpha$，$m\perp n$时，n，α可以是各种关系．

故选 B，不选 ACD．

例 15.17（浙 1406）设m，n是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，则（　）．

A．若$m\perp n$，$n/\!/\alpha$，则$m\perp\alpha$　　B．若$m/\!/\beta$，$\beta\perp\alpha$，则$m\perp\alpha$

C．若$m\perp\beta$，$n\perp\beta$，$n\perp\alpha$，则$m\perp\alpha$　　D．若$m\perp n$，$n\perp\beta$，$\beta\perp\alpha$，则$m\perp\alpha$

解析：（排除法）选项 A：当$m\perp n$，$n/\!/\alpha$时，m，α可以是各种关系，故选项 A 错误．

选项 B：当$m/\!/\beta$，$\beta\perp\alpha$时，$m/\!/\alpha$或$m\subset\alpha$，故选项 B 错误．

选项 C：当$m\perp\beta$，$n\perp\beta$，$n\perp\alpha$时，$m/\!/n$，且$n\perp\alpha$，从而$m\perp\alpha$，故选项 C 正确．　线面垂直性质定理

选项 D：当$m\perp n$，$n\perp\beta$，$\beta\perp\alpha$时，m，α可以是各种关系，故选项 D 错误．故选 C，不选 ABD．

例 15.18（粤 1356/06）设m，n是两条不同的直线，α，β是两个不同的平面，下列命题正确的是（　）．

A．若$\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则$m\perp n$　　B．若$\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则$m/\!/n$

C．若$m\perp n$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则$\alpha\perp\beta$　　D．若$m\perp\alpha$，$m/\!/n$，$n/\!/\beta$，则$\alpha\perp\beta$

解析：（排除法）选项 A：∵满足条件的两条直线m，n也可能相互平行或异面，∴选项 A 错误．

选项 B：∵满足条件的两条直线 m，n 也可能异面，∴选项 B 错误.

选项 C：∵满足条件的两个平面 α，β 也可能平行，∴选项 C 错误.

选项 D：∵满足条件的两个平面 α，β 只能垂直，不可能平行或斜交，∴选项 D 正确．故选 D，不选 ABC.

问题 5 不定项选择题

问题分析：对于不定项选择题，往往需要逐项进行排除，并且"牢记"一般情况下有多个选项正确.

条件 5.1 给定空间的两个平面和两条直线

条件分析：对给定空间的线面问题需要根据选项逐项进行讨论.

例 15.19 （甲 1664）α，β 是两个平面，m，n 是两条直线，有下列四个命题：

（1）如果 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n/\!/\beta$，那么 $\alpha\perp\beta$.

（2）如果 $m\perp\alpha$，$n/\!/\alpha$，那么 $m\perp n$.

（3）如果 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，那么 $m/\!/\beta$.

（4）如果 $m/\!/n$，$\alpha/\!/\beta$，那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.

其中正确的命题有________.（填写所有正确命题的编号）

解析：（排除法）命题（1）：∵如果 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，那么 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$；又∵ $n/\!/\beta$，∴有可能 $\alpha/\!/\beta$，故命题（1）错误.

命题（2）：∵如果 $m\perp\alpha$，$n/\!/\alpha$，那么 $m\perp n$．因此，命题（2）正确.

命题（3）：∵如果 $\alpha/\!/\beta$，那么 α 与 β 无交点；又∵如果 $m\subset\alpha$，那么 m 与 β 无交点．因此，$m/\!/\beta$．故命题（3）正确.

命题（4）：∵如果 $m/\!/n$，那么 m 与 α 所成的角和 n 与 α 所成的角相等；如果 $\alpha/\!/\beta$，那么 n 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等.

∴如果 $m/\!/n$，$\alpha/\!/\beta$，那么 m 与 α 所成的角和 n 与 β 所成的角相等．因此，命题（4）正确.

故正确的命题有（2）（3）（4）.

例 15.20 （丙 1766）a，b 为空间中两条互相垂直的直线，等腰直角 $\triangle ABC$ 的直角边 AC 所在直线与 a，b 都垂直，斜边 AB 以直线 AC 为旋转轴旋转，有下列结论：

①当直线 AB 与 a 成 $60°$ 角时，AB 与 b 成 $30°$ 角；

②当直线 AB 与 a 成 $60°$ 角时，AB 与 b 成 $60°$ 角；

③直线 AB 与 a 所成角的最小值为 $45°$；

④直线 AB 与 a 所成角的最大值为 $60°$.

其中正确的是________.（填写所有正确结论的编号）

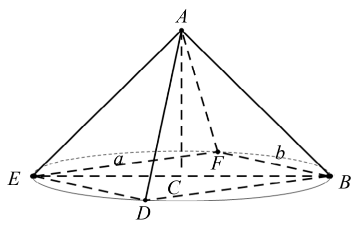


图 15.9

解析：如图 15.9 所示，由题意可知：AB 是以 AC 为轴，BC 为底面半径的圆锥的母线.

∵ $AC\perp a$，$AC\perp b$，且 $AC\perp$ 圆锥底面，∴在底面内可以过点 B，作 $BD/\!/a$，交底面圆 C 于点 D，如图连接 DE，则 $DE\perp BD$，从而 $DE/\!/b$，连接 AD，在等腰 $\triangle ABD$ 中，$AB=AD=\sqrt{2}$，当直线 AB 与 a 成 $60°$ 角时，$\angle ABD=60^\circ$，故 $BD=\sqrt{2}$．又∵在 $\mathrm{Rt}\triangle BDE$ 中，$BE=2$，∴ $DE=\sqrt{2}$.

过点 B 作 $BF/\!/DE$，交圆 C 于点 F，连接 AF，由圆的对称性可知 $BF=DE=\sqrt{2}$，即 $\triangle ABF$ 为等边三角形，从而 $\angle ABF=60^\circ$，即 AB 与 b 成 $60°$ 角，②正确，①错误；由图可知：③正确；很明显，可以满足平面 $ABC\perp$ 直线 a，即直线 AB 与 a 所成角的最大值为 $90°$，故④错误.

综上所述，正确的是②③.

第 16 题　立体几何背景

16

背景知识

空间向量的概念

（1）在空间中，既有大小又有方向的量叫做空间向量．

（2）模为 1 的向量叫做单位向量．

（3）模为 0 的向量叫做零向量．

（4）方向相同且模相等的向量叫做相等向量．

（5）如果表示空间向量的有向线段所在的直线相互平行或重合，则这些向量叫做共线向量或平行向量．

（6）平行于同一个平面的向量叫做共面向量．

空间向量的有关定理

（1）共线向量定理：对空间任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\right)$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；

（2）共面向量定理：如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 $\left(x,y\right)$，使得 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$；

（3）空间向量基本定理：如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在有序实数组 $\left\{x,y,z\right\}$，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$．其中，$\left\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\right\}$ 叫做空间的一个基底．

空间向量的坐标表示与运算

设 $\boldsymbol{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$．

（1）空间向量的坐标运算：① $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\left(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\right)$，② $\lambda\boldsymbol{a}=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\right)$，③ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

（2）共线（平行）与垂直的充要条件：① $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1$，$a_2=\lambda b_2$，$a_3=\lambda b_3\left(\lambda\in\mathbf{R}\right)$，② $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0\left(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\neq0\right)$．

（3）① $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，② $\cos\left\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$，③ $d_{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(a_2-a_1\right)^2+\left(b_2-b_1\right)^2+\left(c_2-c_1\right)^2}$．

问题 1　空间线面关系证明

问题分析：空间线面关系的证明问题，涉及线线关系、线面关系和面面关系的证明，证明中主要运用转化与化归的思想，转化常见类型有：（1）线线垂直的证明需转化为证明线面垂直；（2）线面垂直的证明需转化为证明线线垂直；（3）线面、面面平行的证明需转化为证明线线平行．转化的方法（方向）是先假设所证结论成立，通过构造辅助的线或面，探求能使结论成立的条件，直至发现符合题设的条件，进而确定转化方向和证明的突破口．这种证明问题的过程简称为“逆推顺写”，证明问题的方法概括为“先猜后证”．所谓“先猜”是要基于“假设”的分析“先猜”出来所证目标之一与另一目标中的哪些（需要构造的、隐含着的）目标存在垂直或平行的关系．

问题 1.1 线线相等证明

问题分析：证明“线线相等”的问题，往往需要根据所证的线段与线段是否在同一条直线上将所证问题进行转化：对于证明同一直线上的两条线段相等问题，往往可以通过证明中点（菱形对角线）来求证；对于证明不在同一直线（甚至不在同一平面内）的两条线段相等的问题，往往需要通过证明（同一平面的两条线段构成）等腰三角形或（不同平面的两条线段构成）两个全等三角形来求证.

例 16.1 （乙 1618-1）如图 16.1 所示，已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是一个直角三角形，$PA=6$．顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，D 在平面 PAB 内的正投影为点 E，连接 PE 并延长交 AB 于 G．证明：G 是 AB 的中点.

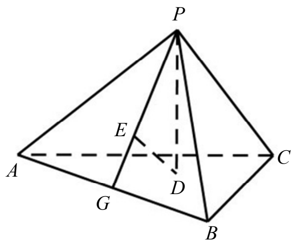


图 16.1

分析：假设“G 是 AB 的中点”，则由于正三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱 $PA=PB$，从而利用等腰三角形底边上的中线与高重合可得：$PG\perp AB$，即 $AB\perp PG$.

至此发现求证目标（方向）：证明 $AB\perp PG$ 所在平面.

证明：∵题设 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，

∴ $PD\perp$ 平面 ABC，进而 $PD\perp AB$；

又∵题设 D 在平面 PAB 内的正投影为点 E,

∴同理可证：$DE\perp AB$；由线面垂直判定定理可得：$AB\perp$ 平面PED，故 $AB\perp PG$． 线面垂直性质定理

又∵题设三棱锥 $P-ABC$ 是正三棱锥，∴ $PA=PB=PC$，故 $\triangle PAB$ 是等腰三角形.

又∵ $PG\perp AB$，∴ G 是 AB 的中点． 等腰三角形底边上的“高”与“中线”重合

例 16.2 （乙 1469-1）如图 16.2 所示三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，$AB\perp B_1C$．证明：$AC=AB_1$.

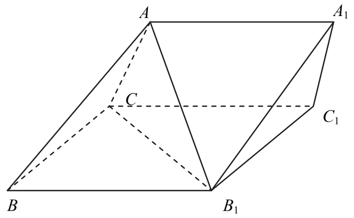


图 16.2

分析：假设 $AC=AB_1$，则 AC 与 AB_1 两条线段所在的 $\triangle ACB_1$ 必为等腰三角形．由于题中没有给有关角的条件，因此只能从等腰三角形底边的中线与高重合进行论证．由于题设图中的底面 BB_1C_1C 为菱形，因此想到菱形的对角线具有“垂直且平分”的性质，为此需要构造菱形的另一条对角线，至此发现求证的突破口.

证明：如图 16.3 所示，连接 BC_1，交 B_1C 于 O，连接 AO．

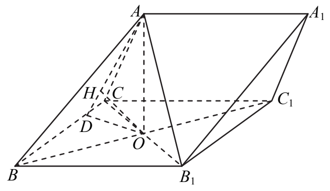


图 16.3

∵题设三棱柱的侧面 BB_1C_1C 为菱形，

∴ $B_1C\perp BC_1$，且 $B_1O=OC$． 菱形对角线互相垂直且平分

又∵题设 $AB\perp B_1C$，

∴ $B_1C\perp$ 平面 ABO， 线面垂直判定定理

从而 $B_1C\perp AO$． 线面垂直性质定理

∵在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle AOB_1$ 中，AO 为公共边，且 $B_1O=OC$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle AOC\cong\mathrm{Rt}\triangle AOB_1$． 平面几何：三角形全等判定定理，边角边

因此 $AC=AB_1$． 全等三角形性质定理

例 16.3（甲 1519-1/69-1）如图 16.4 所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=16$，$BC=10$，$AA_1=8$，点 E，F 分别在 A_1B_1，D_1C_1 上，$A_1E=D_1F=4$，过点 E，F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形．在图中画出这个正方形（不必说明画法和理由）.

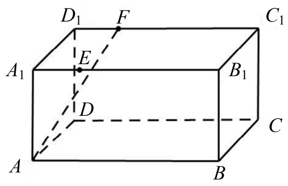


图 16.4

解析：如图 16.5 所示，过点 E 作 $EM\perp AB$，过点 F 作 $FN\perp DC$，则四边形 $EFNM$ 为长方形，且 $EF=10$，$EM=8$．利用勾股定理，取 $MG=6$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle EMG$ 中，$EG=\sqrt{8^2+6^2}=10$．

同理，取 $NH=6$，则 $FH=10$．连接 EG，GH，FH，则 $EF=FG=GH=FH=10$．从而，四边形 $EGHF$ 为正方形.

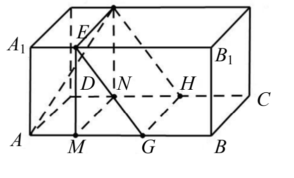


图 16.5

问题 1.2　线线垂直证明

问题分析：证明空间的（即不在同一个平面内的）“线线垂直”问题，往往需要通过证明其中一条直线垂直另一条直线所在的平面，然后再利用“线面垂直性质定理”进行证明.

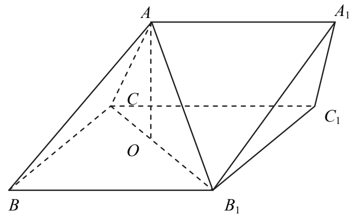


图 16.6

例 16.4（乙 1419-1）如图 16.6 所示，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，B_1C 的中点为 O，且 $AO\perp$ 平面 BB_1C_1C. 证明：$B_1C\perp AB$.

分析：假设“$B_1C\perp AB$”，则需 $B_1C\perp AB$ 所在平面.

∵题设 $AO\perp$ 平面 BB_1C_1C，

∴ $AO\perp B_1C$，即 $B_1C\perp AO$，故只需证明 $B_1C\perp BO$，连接 BC_1 即可.

证明：连接 BC_1 与 B_1C，如图 16.7 所示.

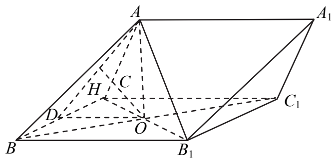


图 16.7

∵题设侧面 BB_1C_1C 为菱形，且 B_1C 的中点为 O，

∴ BC_1 与 B_1C 相交于点 O，且 $B_1C\perp BC_1$，　菱形对角线互相垂直平分

又∵题设 $AO\perp$ 平面 BB_1C_1C，∴ $B_1C\perp AO$.　线面垂直性质定理

因此，$B_1C\perp$ 平面 ABO，　线面垂直判定定理

又∵ $AB\subset$ 平面 ABO，∴ $B_1C\perp AB$.　线面垂直性质定理

例 16.5（甲 1619-1）如图 16.8 所示，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，点 E，F 分别在 AD，CD 上，$AE=CF$，EF 交 BD 于点 H，将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置. 证明：$AC\perp HD'$.

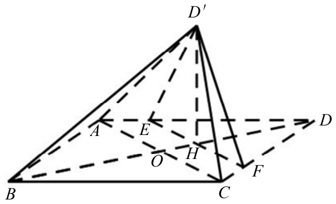


图 16.8

分析：欲证 $AC\perp HD'$，需证 $AC\perp HD$.

证明：∵菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，

∴ $AC\perp BD$，即 $AC\perp OD$.

又∵ $AE=CF$，∴ $ED=FD$，进而 $AC\parallel EF$.

因此，$EF\perp HD$，即 $AC\perp HD$，从而 $AC\perp HD'$.

例 16.6（乙 1319/68-1）如图 16.9 所示，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB$，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60^\circ$. 证明：$AB\perp A_1C$.

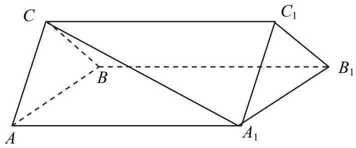


图 16.9

分析：∵所证目标 $AB\perp A_1C$ 中的两条直线不在同一个平面内，

∴必须作辅助线构造平面，目标是：线段垂直于另一条线段所在平面.

∵题设 $CA=CB$，∴ $\triangle CAB$ 为等腰三角形.

由于等腰三角形底边上的高与中线重合，因此，$AB\perp AB$ 边上的中线

证明：在 $\triangle CAB$ 中作 $CE\perp AB$，如图 16.10 所示，则 E 为 AB 的中点；

另一种作法：取 AB 中点为 E，则 $CE\perp AB$.

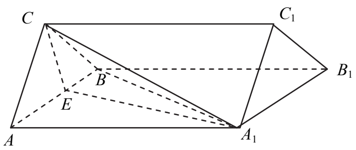


图 16.10

即 $AB\perp CE$，且欲证 $AB\perp A_1C$，则需证 $AB\perp\triangle CEA_1$ 所在平面，显然需要连接 EA_1 构造 $\triangle CEA_1$.

又∵ $AB=AA_1$，且 $\angle BAA_1=60^\circ$，∴连接 BA_1 后，$\triangle ABA_1$ 是等边三角形.

连接 EA_1，则 $AB\perp A_1E$. 至此证明了 $AB\perp CE$，$AB\perp A_1E$，

∴ $AB\perp\triangle A_1CE$ 所在平面，　线面垂直判定定理

从而，$AB\perp A_1C$.　线面垂直性质定理

例 16.7（丙 1719-1）如图 16.11 所示，四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是正三角形，$AD=CD$. 证明：$AC\perp BD$.

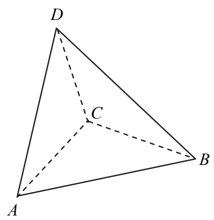


图 16.11

分析：∵所证 $AC\perp BD$ 中的两条线段不在同一个平面内，

∴目标是证明 $AC\perp BD$ 所在平面或 $BD\perp AC$ 所在平面.　线线垂直转为线面垂直

证明：∵题设 $AD=CD$，

∴想到等腰三角形的中线与高重合，且与底边垂直.

因此，取 AC 的中点 O，连接 DO，BO，如图 16.12 所示.

因为 $AD=CD$，所以 $AC\perp DO$.

又由于 $\triangle ABC$ 是正三角形，所以 $AC\perp BO$.

从而 $AC\perp$ 平面 DOB. 线面垂直判定定理

故 $AC\perp BD$. 线面垂直性质定理

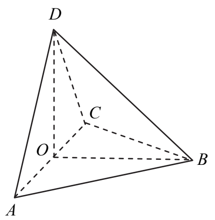


图 16.12

问题 1.3 线面平行证明

问题分析：证明“线面平行”的问题，根据线面平行判定定理可知：只需要证明直线与平面内的任一条直线平行即可.

例 16.8 （甲 1718-1）如图 16.13 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$.证明：直线 BC // 平面 PAD.

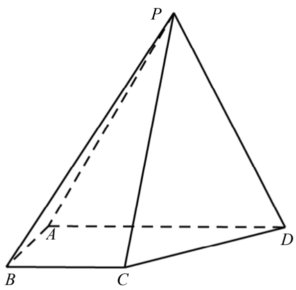


图 16.13

分析：欲证直线 BC // 平面 PAD，需证直线 BC // 平面 PAD 内的一条直线（线面平行转化为线线平行）.

$\because$ 由图可见：BC 不可能平行于 PA 和 PD，$\therefore$ 只能求证：BC // AD.

证明：在平面 $ABCD$ 内，$\because \angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore BC\perp AB$，$AD\perp AB$，从而 BC // AD.

平面公理：平面内垂直于同一条直线的两条直线平行

又 $\because BC\not\subset$ 平面PAD，$AD\subset$ 平面PAD，

$\therefore BC$ // 平面 PAD. 线面平行判定定理

例 16.9 （甲 1418-1/68-1）如图 16.14 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点. 证明：PB // 平面 AEC.

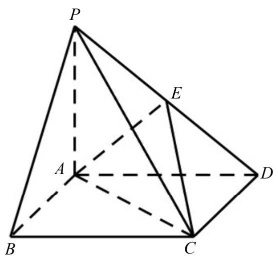


图 16.14

分析：欲证 PB // 平面 AEC，需要在平面 AEC 内“找到”或“构造”一条能够与 PB 平行的直线.

$\because$ 题设底面 $ABCD$ 是矩形，且图中已画一条对角线 AC，

$\therefore$ 连接对角线 BD 交 AC 于 F 点，则 F 为 BD 中点.

证明：如图 16.15 所示，连接 BD 交 AC 于点 F.

$\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore F$ 是 BD 的中点.

又 $\because$ 题设 E 为 PD 的中点，

$\therefore$ 连接 EF，则 EF 是 $\triangle DPB$ 的中位线，即 PB // EF.

又 $\because EF\subset\triangle AEC$，且 $PB\not\subset\triangle AEC$，

$\therefore PB$ // 平面 AEC.

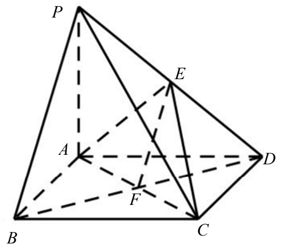


图 16.15

例 16.10 （甲 1318-1/68-1）如图 16.16 所示，直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 是 AB 的中点. 证明：BC_1 // 平面 A_1CD.

分析：欲证 BC_1 // 平面 A_1CD，先连接 BC_1，且需在平面 A_1CD 内构造一条直线来平行于 BC_1.

又 $\because$ 题设 D 是 AB 的中点，

$\therefore$ 连接 AC_1 构造 $\triangle ABC_1$ 的中位线平行于 BC_1.

证明：如图 16.17 所示，连接 AC_1 与 A_1C 交于点 F.

$\because$ 在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，ACC_1A_1 是矩形.

$\therefore$ 点 F 是 AC_1 的中点，平行四边形对角线相互平分

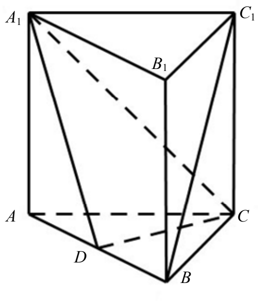


图 16.16

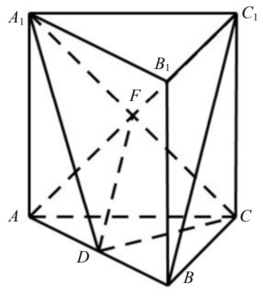


图 16.17

又 $\because$ 题设点 D 是 AB 的中点，且已证点 F 是 AC_1 的中点，$\therefore$ 连接 DF 可得：DF // BC_1.

又 $\because DF\subset$ 平面A_1CD，$BC_1\not\subset$ 平面A_1CD，

$\therefore BC_1$ // 平面 A_1CD. 线面平行判定定理

例 16.11（甲 1769-1）如图 16.18 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$，$AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，$E$ 是 PD 的中点．证明：直线 CE // 平面 PAB．

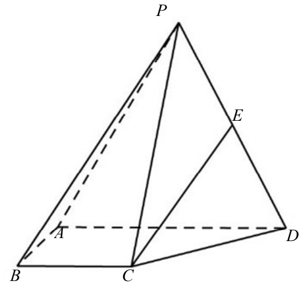


图 16.18

分析：欲证直线 CE // 平面 PAB，需证直线 CE // 平面 PAB 中的一条直线，显然，$CE \nparallel PA$，$CE \nparallel PB$，$CE \nparallel AB$．因此，需要构造一条直线与 CE 平行．

证明：受点 E 是 PD 中点启发，且 B，C 在同一条直线上，因此取 PA 的中点 F，且连接 BF，EF，如图 16.19 所示，由图可见：四边形 $BCEF$ 是平行四边形，下面进行证明．

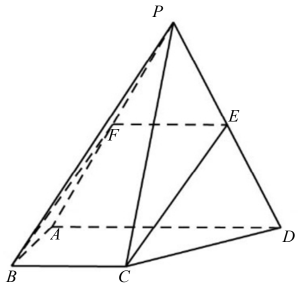


图 16.19

∵点 E，F 分别是 PD，PA 的中点，∴ FE // AD，且 $FE=\dfrac{1}{2}AD$．

又∵题设 $\angle DAB=\angle CBA=90^\circ$，∴ BC // AD．

又∵题设 $BC=\dfrac{1}{2}AD$，∴ FE // BC，且 $FE=BC=\dfrac{1}{2}AD$．

因此，四边形 $BCEF$ 是平行四边形．即有 CE // BF．

又∵ $BF\subset$ 平面 PAB，而 $CE\not\subset$ 平面 PAB，∴ CE // 平面 PAB．

例 16.12（丙 1619-1/69-1）如图 16.20 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，AD // BC，$AB=AD=AC=3$，$PA=BC=4$，M 为线段 AD 上一点，$AM=2MD$，N 为 PC 的中点．证明：MN // 平面 PAB．

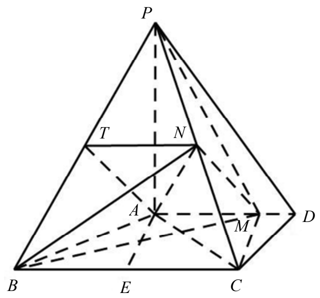


图 16.20

证明：取 PB 的中点 T，连接 AT，TN．

∵题设 N 为 PC 的中点，∴ TN // BC，且 $TN=\dfrac{1}{2}BC=2$．

∵题设 AD // BC，∴ AM // TN．

又∵ $AM=2MD$，∴ $AM=\dfrac{2}{3}AD=2$，即 $AM=TN$．

∵ AM // TN，且 $AM=TN$，∴四边形 $ATMN$ 为平行四边形，∴ $MN \parallel AT$．

于是 MN // AT，且 $MN=AT$，

又∵ $AT\subset$ 平面PAB，而 $MN\not\subset$ 平面PAB，∴ MN // 平面 PAB．

例 16.13（丙 1819-2）如图 16.21 所示，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点，且平面 $AMD\perp$ 平面 BMC．在线段 AM 上是否存在点 P，使得 MC // 平面 PBD？说明理由．　原题设连 MC，本书连接 MC 构造了平面 BMC

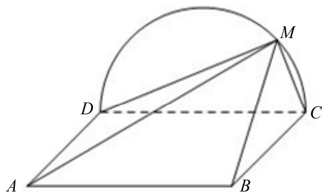


图 16.21

解析：设在 AM 上存在点 P，连接 PD，PB 构造平面 PDB，如图 16.22 所示．

设平面 PDB 与平面 MAC 交于 PO，则点 O 为底面正方形对角线 AC 与 BD 的交点．为此，连接 AC 交 BD 于点 O，并连接 PO．

∵欲使 MC // 平面 PBD，需使 MC // PO．

又∵点 O 为 AC 的中点，∴根据三角形中位线定理可知：只要点 P 为 AM 中点，即有 MC // PO　图中 P 点为任意点，而非 AM 中点

因此，当点 P 为 AM 的中点时，可使 MC // 平面 PBD．

线面平行判定定理

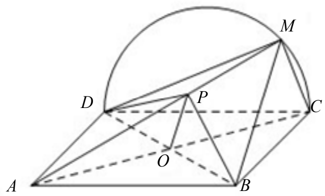


图 16.22

问题 1.4　线面垂直证明

问题分析：证明“线面垂直”的问题，根据线面垂直判定定理可知：只需要证明直线与平面内的两条相交直线垂直即可.

例 16.14（甲 1669-1）如图 16.23 所示，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，$AB=5$，$AC=6$，点 E，F 分别在 AD，CD 上，$AE=CF=\dfrac{5}{4}$，EF 交 BD 于点 H．将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置，$OD'=\sqrt{10}$．证明：$D'H\perp$ 平面 $ABCD$．

分析：欲证 $D'H\perp$ 平面 $ABCD$，需证 $D'H\perp$ 平面 $ABCD$ 内的两条相交直线．$\because$ 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相互垂直，$\therefore DH\perp AC$．又 $\because AE=CF=\dfrac{5}{4}$，$\therefore EF\,/\!/\,AC$，从而 $DH\perp EF$，即 $D'H\perp EF$．故只需证明 $D'H\perp BH$ 或 $D'H\perp OH$ 即可.

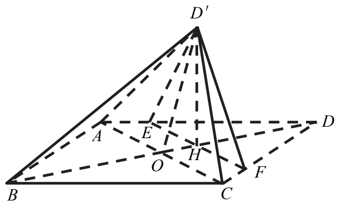


图 16.23

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，$\therefore AC\perp BD$，且 $AD=DC$．

在 $\triangle ADC$ 中，$\because AD=DC$，且题设 $AE=CF$，

$\therefore AC\,/\!/\,EF$，从而 $EF\perp BD$，即 $DH\perp EF$，$D'H\perp EF$；

又 $\because$ 题设 $AB=5$，$AC=6$，

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理可得：$BO=\sqrt{AB^2-\left(\dfrac{AC}{2}\right)^2}=\sqrt{25-9}=4$，即 $DO=BO=4$．

菱形对角线互相平分

又 $\because AC\,/\!/\,EF$，$\therefore \dfrac{OH}{OD}=\dfrac{AE}{AD}$，即 $OH=\dfrac{AE}{AD}\times OD=\dfrac{1}{4}\times 4=1$，即 $D'H=DH=OD-OH=3$，

又 $\because$ 在 $\triangle OHD'$ 中，题设 $OD'=\sqrt{10}$，且已求得：$D'H=3$，$OH=1$，满足 $OD'^2=OH^2+D'H^2$，

$\therefore \triangle OHD'$ 是直角三角形，即 $D'H\perp OH$．

综上所述，$\because D'H\perp EF$，$D'H\perp OH$，且 $EF\cap OH=H$，$\therefore D'H\perp$ 平面 $ABCD$．

例 16.15（甲 1819-1/70-1）如图 16.24 所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点．证明：$PO\perp$ 平面 ABC．

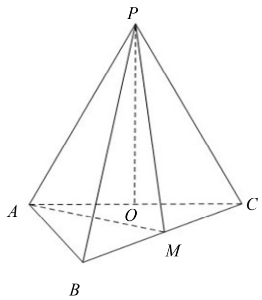


图 16.24

证明：(分析综合法)

欲证 $PO\perp$ 平面 ABC，需证 $PO\perp$ 平面 ABC 内两条相交直线.

$\because$ 题设 $PA=PC=AC=4$，且 O 为 AC 的中点，　等边三角形性质

$\therefore \triangle PAC$ 是等边三角形，$PO\perp AC$，　且 $PO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$．

至此，猜想 $PO\perp BO$，或者说需要 $PO\perp BO$．　合理猜想

因此，连接 BO．　构造新的数学对象 $\triangle POB$

又 $\because$ 题设：$AB=BC=2\sqrt{2}$，　合理猜想

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形，且 $OB\perp AC$．　等腰三角形性质

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$\because AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times 4=2$，题设 $AB=2\sqrt{2}$，$\therefore$ 由勾股定理可得：$OB=2$．

在 $\triangle PBO$ 中，$\because PB=4$，$PO=2\sqrt{3}$，$OB=2$，满足 $PB^2=PO^2+OB^2$，　计算证明直角三角形

$\therefore PO\perp BO$．　直角三角形性质

$\because PO\perp AC$，$PO\perp BO$，且 $AC\cap OB=O$，$\therefore PO\perp$ 平面 ABC．　线面垂直判定定理

问题 1.5　面面垂直证明

问题分析：证明“面面垂直”的问题，根据面面垂直判定定理可知：只需要证明一个平面内的一条直线与另一个平面垂直即可.

例 16.16（乙 1718-1/68-1）如图 16.25 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\ /\!/\ CD$，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$．证明：平面 $PAB\perp$ 平面 PAD．

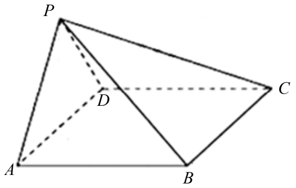


图 16.25

分析：欲证平面 $PAB\perp$ 平面 PAD，需证平面 PAB 内的一条直线 PA，PB 或 $AB\perp$ 平面 PAD，即面面垂直转化为线面垂直．

显然，PA，PB 不可能 $\perp$ 平面 PAD，因此只能求证 $AB\perp$ 平面 PAD．

然后，再证明 $AB\perp$ 平面 PAD 中的两条相交直线，即再次转化为证明线线垂直．

证明：由已知 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$，得 $AB\perp AP$，$CD\perp PD$．

由于 $AB\ /\!/\ CD$，故 $AB\perp PD$，从而 $AB\perp$ 平面 PAD．

又∵ $AB\subset$ 平面 PAB，∴平面 $PAB\perp$ 平面 PAD．

例 16.17（乙 1668-1）如图 16.26 所示，在以 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，面 $ABEF$ 为正方形，$\angle AFD=90^\circ$．证明：平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$．

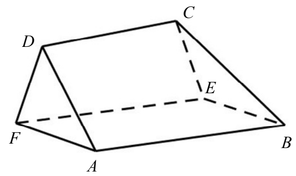


图 16.26

分析：欲证平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$，需证 AF 或 $BE\perp$ 平面 $EFDC$，进而需证 $AF\perp FD$，$AF\perp FE$．

证明：∵题设面 $ABEF$ 为正方形，∴ $AF\perp FE$．

又∵题设：$\angle AFD=90^\circ$，∴ $AF\perp FD$．

因此，由线面垂直判定定理可得：$AF\perp$ 平面$EFDC$．

又∵ $AF\subset$ 平面$ABEF$，∴由面面垂直判定定理可得：平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$．

例 16.18（乙 1518-1）如图 16.27 所示，四边形 $ABCD$ 为菱形，G 为 AC 与 BD 的交点，$BE\perp$ 平面 $ABCD$．证明：平面 $AEC\perp$ 平面 BED．

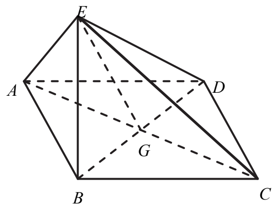


图 16.27

分析：欲证平面 $AEC\perp$ 平面 BED，需证平面 AEC 中的一条直线 $\perp$ 平面 BED（或反之）．

∵题设 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，

∴ $BE\perp AC$，即 $AC\perp BE$．

这样转化往往就能找到求证的目标：$AC\perp BE$ 所在的平面

又∵题设四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $AC\perp BD$，从而 $AC\perp$ 平面 BED．

证明：∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $AC\perp BD$．

又∵题设 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，

∴ $BE\perp AC$．　线面垂直性质定理

故 $AC\perp$ 平面 BED，　线面垂直判定定理

又∵ $AC\subset$ 平面 AEC，

∴平面 $AEC\perp$ 平面 BED．　面面垂直判定定理

例 16.19（乙 1568-1）如图 16.28 所示，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=120^\circ$，E，F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点，$BE\perp$ 平面 $ABCD$，$DF\perp$ 平面 $ABCD$，$BE=2DF$，$AE\perp EC$．证明：平面 $AEC\perp$ 平面 AFC．

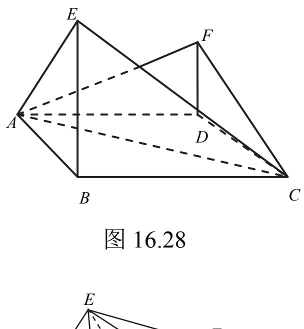


图 16.28

分析：欲证平面 $AEC\perp$ 平面 AFC，需证平面 AEC 中的一条直线 $\perp$ 平面 AFC（往往是从前一个平面中“找”或“构造”一条直线垂直后一个平面）．题设四边形 $ABCD$ 为菱形，想到利用菱形对角线相互垂直平分．

证明：连接 BD，设 $BD\cap AC=G$，连接 EG，FG，EF，如图 16.29 所示，在菱形 $ABCD$ 中，不妨设 $GB=1$．

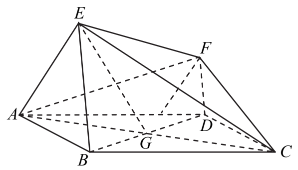


图 16.29

∵ $\angle ABC=120^\circ$，∴ $AG=GC=\sqrt{3}$．

∵题设 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=BC$．　菱形邻边相等

∴ $AE=EC$．　两直角三角形的两直角边相等，其斜边也相等

又∵ $AE\perp EC$，∴在 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 中，G 为斜边上的中点，

故有 $EG=AG=GC=\sqrt{3}$． 即将 G 点看成是 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 外接圆的圆心

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBG$ 中，$\because EG=\sqrt{3}$，题设 $BG=1$，$\therefore$ 由勾股定理可得：$BE=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，又$\because$ 题设 $BE=2DF$，$\therefore DF=\dfrac{1}{2}BE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle FDG$ 中，$\because DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且 $GD=BG=1$．$\therefore$ 由勾股定理可得：$GF=\sqrt{\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

在直角梯形 $BDFE$ 中，$\because EB-FD=\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $BD=BG+GD=1+1=2$，

$\therefore$ 由勾股定理可得： $EF=\sqrt{(EB-FD)^2+(BG+GD)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+4}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

又$\because$ 已求 $EG=\sqrt{3}$， $GF=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$， $EF=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\therefore EG^2+GF^2=3+\dfrac{6}{4}=\dfrac{18}{4}=EF^2$，即 EG，GF，EF 满足勾股定理逆定理，从而证明 $EG\perp GF$．

又$\because AC\cap FG=G$，且 $EG\perp GF$，$\therefore EG\perp$ 平面 AFC， 线面垂直判定定理

$\because EG\subset$ 平面 AEC，$\therefore$ 平面 $AEC\perp$ 平面 AFC． 面面垂直判定定理

例 16.20 （丙 1769-1）如图 16.30 所示，四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是正三角形，$\triangle ACD$ 是直角三角形，$\angle ABD=\angle CBD$，$AB=BD$．证明：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC．

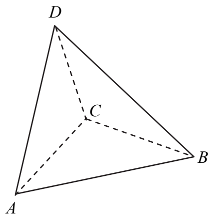


图 16.30

分析：欲证平面 $ACD\perp$ 平面 ABC，需证平面 ACD 中的一条直线 $\perp$ 平面 ABC．

证明：由题设可得，$\triangle ABD\cong\triangle CBD$，从而 $AD=DC$．

又$\because \triangle ACD$ 是直角三角形，$\therefore \angle ADC=90^\circ$．

如图 16.31 所示，取 AC 的中点 O，连接 DO，BO，则 $DO\perp AC$， $DO=AO$．

又由于 $\triangle ABC$ 是正三角形，故 $BO\perp AC$．所以 $\angle DOB$ 为二面角 $D-AC-B$ 的平面角.

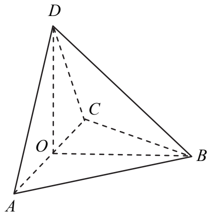


图 16.31

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中， $BO^2+AO^2=AB^2$．

又$\because AB=BD$，$\therefore BO^2+DO^2=BO^2+AO^2=AB^2=BD^2$．

故 $\angle DOB=90^\circ$．所以平面 $ACD\perp$ 平面 ABC．

例 16.21 （乙 1868-1）如图 16.32 所示，四边形 $ABCD$ 为正方形，E，F 分别为 AD，BC 的中点，以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起，使点 C 到达点 P 的位置，且 $PF\perp BF$．证明：平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$．

证明：$\because$ 题设：E，F 分别为正方形两条对边 AD，BC 的中点，

$\therefore EF\perp BC$ ①，即 $BF\perp EF$．

又$\because$ 题设：$PF\perp BF$ ②，即 $BF\perp PF$，且 $PF\cap EF=F$，$\therefore BF\perp$ 平面 PEF．

又$\because BF\subset$ 平面 $ABFE$，$\therefore$ 平面 $ABFE\perp$ 平面 PEF ③，即平面 $ABFD\perp$ 平面 PEF，从而命题得证.

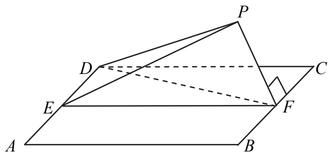


图 16.32

> **经验总结**：上例解析中的①②③处都做了“前后颠倒”处理，因此，我们可以从问题或条件转化的角度进行理解：把待证的结论“前后颠倒”后进行分析，探索所需要的条件；在分析的过程中不断颠倒已经到的结论，有助于问题的证明.

例 16.22（乙 1818-1）如图 16.33 所示，在平行四边形 $ABCM$ 中，$AB=AC=3$，$\angle ACM=90^\circ$，以 AC 为折痕将 $\triangle ACM$ 折起，使点 M 到达点 D 的位置，且 $AB\perp DA$．证明：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC．

证明：$\because$ 题设：在平行四边形 $ABCM$ 中，$\angle ACM=90^\circ$，

$\therefore CM\perp AC$．

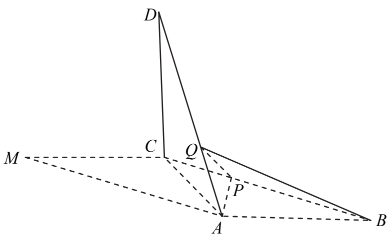


图 16.33

又∵ $AB \parallel CM$ ，　平行四边形对边平行

∴ $AB \perp AC$.

又∵题设 $AB \perp DA$，且 $AC \cap DA = A$，

∴ $AB \perp$ 平面 ACD .　线面垂直判定定理：直线垂直于平面内两条相交直线

又∵ $AB \subset$ 平面 ABC ，∴平面 $ABC \perp$ 平面 ACD .　面面垂直判定定理

例 16.23（丙 1819-1/69-1）如图 16.34 所示，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点．证明：平面 $AMD \perp$ 平面 BMC .　原题没连 MC ，本书连接 MC 构造了平面 BMC

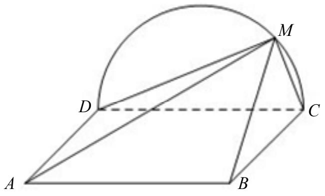


图 16.34

证明：题设：正方形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，且 $AD \perp DC$.

①从 $AD \perp$ 平面 CMD 出发，　线面垂直判定定理

从而 $AD \perp CM$.　线面垂直性质定理

又∵ M 是半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C， D 的点，∴ $CM \perp DM$，　平面几何：直径上的圆周角为直角

∵ $AD \perp CM$， $CM \perp DM$，且 $AD \cap DM = D$， ∴ $CM \perp$ 平面 AMD .　线面垂直判定定理

又∵ $CM \subset$ 平面 BMC ， ∴平面 $BMC \perp$ 平面 AMD .　面面垂直判定定理

或②从 $BC \perp$ 平面 CMD 出发，同理可证：平面 $AMD \perp$ 平面 BMC .

问题 2 几何体的尺寸计算

问题分析：几何体的尺寸计算问题主要涉及几何体的高（包括点面距离）、表面积和体积三种几何尺寸的计算问题.

问题 2.1　求几何体的高

问题分析：计算几何体的高（或点面距离）时，如果能直接计算，就直接求出来；如果不能直接计算，首先应该想到将“高”或“顶点”进行转化：平行转化、对称转化、比例转化等，或者利用等体积法先计算出几何体的体积，再间接计算出几何体的“高”.

例 16.24（乙 1419-2）如图 16.35 所示，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形， B_1C 的中点为 O， $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C ，且 $B_1C \perp AB$ ．若 $AC \perp AB_1$， $\angle CBB_1 = 60^\circ$， $BC = 1$，求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高.

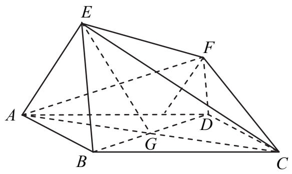


图 16.35

分析：欲求三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的“高”，首先要找到“高”在哪．显然本题不能直接看出来“高”在哪里，更无法直接进行计算．因此，首先应设法将“高”进行转化或者找到“高”的替代品或半成品．∵题设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 BB_1C_1C 为菱形，且 B_1C 的中点为 O，∴点 O 为侧面 BB_1C_1C 的中心，故点 O 到底面 ABC 的距离即为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的“半高”（高的一半）.

解析：连接 BC_1，与 B_1C 交于 O 点，作 $OD \perp BC$，垂足为 D，连接 AD，作 $OH \perp AD$，垂足为 H，如图 16.36 所示.

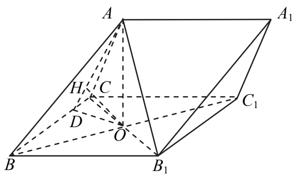


图 16.36

∵ $BC \perp AO$， $BC \perp OD$，

∴ $BC \perp$ 平面 AOD， $BC \perp OH$ ，　线面垂直性质定理

即 $OH \perp BC$.　经验：往往需要做这样的“颠倒”转换

又∵ $OH \perp AD$， ∴ $OH \perp$ 平面 ABC， 即 OH 为三棱锥 $O-ABC$ 的“高”.　线面垂直判定定理

利用对称性可得： OH 也等于三棱锥 $O-A_1B_1C_1$ 的“高”.

因此，所求三棱柱的“高”为 $2OH$.　明确目标：求 OH

∵ $\mathrm{Rt}\triangle AHO \backsim \mathrm{Rt}\triangle AOD$，　相似三角形判定定理：两直角三角形共用一个角，相当于三个角都相等

$\therefore \dfrac{OH}{AO}=\dfrac{OD}{AD}$，即 $OH=\dfrac{OD}{AD}AO$，　相似三角形性质定理：对应边成比例

$\because \angle CBB_1=60^\circ$，且侧面 BB_1C_1C 为菱形（$BC=BB_1$），

$\therefore \triangle CBB_1$ 为顶角为 60° 的等腰三角形，即等边三角形.

又$\because BC=1$，$\therefore OC=\dfrac{1}{2}B_1C=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}$，故在 $\mathrm{Rt}\triangle ODC$ 中，$OD=OC\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

又$\because$题设 $AC\perp AB_1$，$\therefore \triangle ACB_1$ 为直角三角形.

又 $\because$ B_1C 的中点为 O，$\therefore$ 点 A，B_1，C 在以点 O 为圆心，B_1C 为直径的半圆上，即 $OA=OC=OB_1=\dfrac{1}{2}B_1C=\dfrac{1}{2}$.

因此，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，由勾股定理可得：$AD=\sqrt{OD^2+AO^2}=\sqrt{\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，代入 $OH=\dfrac{OD}{AD}AO$ 可得：

$OH=\dfrac{OD}{AD}AO=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$. 故三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 $2\times OH=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

例 16.25（甲 1418-2）如图 16.37 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点. 且（已证）PB // 平面 AEC，设 $AP=1$，$AD=\sqrt{3}$，三棱锥 $P-ABD$ 的体积 $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，求 A 到平面 PBC 的距离.

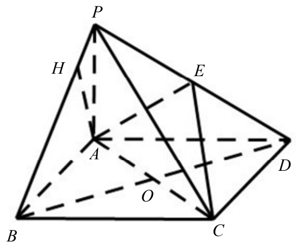


图 16.37

分析：欲求点 A 到平面 PBC 的距离，需关注三棱锥 $A-PBC$. $\because$题设 $V_{P-ABD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，且底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore V_{P-ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. 又$\because V_{P-ABC}=V_{A-PBC}$，$\therefore$只要求出 $S_{\triangle PBC}$ 即可求出点 A 到平面 PBC 的距离.

解析：$\because PA\perp$平面 $ABCD$，$\therefore PA$ 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高，

$\because$底面 $ABCD$ 为矩形，且题设 $AP=1$，$AD=\sqrt{3}$，$V_{P-ABD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$\therefore V_{P-ABD}=\dfrac{1}{2}V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{6}AB\cdot AD\cdot PA=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，　分割思想

解得：$AB=\dfrac{3}{2}$　方程思想

$\therefore$在 $\mathrm{Rt}\triangle PBA$ 中，由勾股定理可得：$PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{1+\dfrac{9}{4}}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

①直接求“高”.

$\because PA\perp$平面 $ABCD$，$\therefore PA\perp BC$，即 $BC\perp PA$.　线面垂直性质定理

又$\because$底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore BC\perp AB$，$BC\perp$平面 PAB，从而 $BC\perp AH$，即 $AH\perp BC$.

线面垂直判定定理

作 $AH\perp PB$ 交 PB 于 H，则 $AH\perp$平面 PBC，　线面垂直判定定理

即 AH 为三棱锥 $A-PBC$ 的“高”，亦即 A 到平面 PBC 的距离.　确定目标：求 AH

$\because \mathrm{Rt}\triangle AHB\backsim\mathrm{Rt}\triangle PAB$，　相似三角形判定定理：两直角三角形共用 $\angle ABH$，三个角相等

$\therefore \dfrac{AH}{AB}=\dfrac{PA}{PB}$，　共用角的对边与斜边之比相等

即 $AH=\dfrac{AB}{PB}\cdot PA=\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{13}}{2}}\times 1=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，所以点 A 到平面 PBC 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

②间接求“高”.

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PA \perp BC$， 线面垂直性质定理

即 $BC \perp PA$.

又$\because$底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore BC \perp AB$.

$\because BC \perp$ 平面 PAB， 线面垂直判定定理

$\therefore BC \perp PB$. 线面垂直性质定理

因此，在 Rt$\triangle PBC$ 中，$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}PB\cdot BC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{39}}{4}$.

从而，A 到平面 PBC 的距离为 $d=\dfrac{V_{A-PBC}}{\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{39}}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{39}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

经验总结：当给定几何体的体积求“高”时，往往可以先求出底面的面积，再利用体积和底面积间接地求出几何体的“高”.

例 16.26（甲 1819-2）如图 16.38 所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点，且 $PO\perp$ 平面 ABC. 若点 M 在棱 BC 上，且 $MC=2MB$，求点 C 到平面 POM 的距离.

解析：如图 16.38 所示，将已知和已求边长标注在图上，且已知：$PO\perp$ 平面 ABC.

设点 C 到平面 POM 的距离为 h，则 $V_{C-POM}=\frac{1}{3}S_{\triangle POM}\cdot h$，且 $S_{\triangle POM}=\frac{1}{2}PO\cdot OM$.

在 Rt$\triangle POC$ 中，$PO=4\cdot\sin 60°=2\sqrt{3}$.

在 $\triangle OMC$ 中，由余弦定理可得：

$OM^2=OC^2+MC^2-2OC\cdot MC\cdot\cos 45°$，

即 $OM^2=2^2+\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)^2-2\times 2\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{20}{9}$，

解得：$OM=\frac{2}{3}\sqrt{5}$.

又$\because V_{P-OMC}=\frac{1}{3}S_{\triangle OMC}\cdot PO$，

且 $S_{\triangle OMC}=\frac{1}{2}OC\cdot CM\sin 45°=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4}{3}$，

$\therefore$由 $V_{C-POM}=V_{P-OMC}$ 可得：$\frac{1}{3}S_{\triangle POM}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle OMC}\cdot PO$，

解得：$h=\dfrac{S_{\triangle OMC}}{S_{\triangle POM}}\cdot PO=\dfrac{S_{\triangle OMC}}{\frac{1}{2}PO\cdot OM}\cdot PO=\dfrac{2S_{\triangle OMC}}{OM}=\dfrac{2\times\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

即点 C 到平面 POM 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

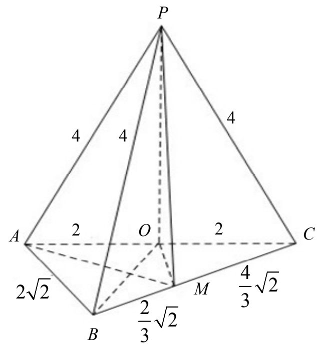


图 16.38

问题 2.2　求几何体的表面积

问题分析：计算几何体的表面积时，往往需要分类计算各类表面的面积，并最终求和. 所谓分类计算就是将形状相同的表面当作同类表面进行计算.

例 16.27 （乙 1718-2）如图 16.39 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$，且（已证）平面 $PAB\perp$ 平面 PAD．若 $PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90^\circ$，且四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$，求该四棱锥的侧面积．

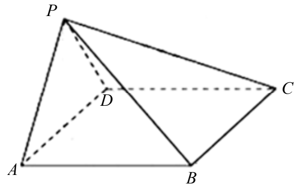


图 16.39

分析：∵四棱锥 $P-ABCD$ 的四个侧面为三角形，底面为四边形，

∴欲求四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积，必须确定相关图形的几何尺寸．

然而，读遍全题，从头到尾都没有任何“边长”信息（条件），而只有“四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$”一个条件．

因此猜想：所有侧面的各个“边长”都与四棱锥底面的某条边长或四棱锥的高有关．然后再利用体积为 $\dfrac{8}{3}$ 列方程求解某一边长．

解析：∵题设 $\angle BAP=\angle CDP=90^\circ$，∴ $AB\perp PA$，$DC\perp PD$．

又∵题设 $AB\parallel CD$，∴ $AB\perp PD$．

因此，$AB\perp$ 平面 PAD．　线面垂直判定定理

在平面 PAD 内作 $PE\perp AD$，垂足为 E，如图 16.40 所示，则 $AB\perp PE$．　线面垂直性质定理

因此，$PE\perp$ 平面 $ABCD$．　线面垂直判定定理

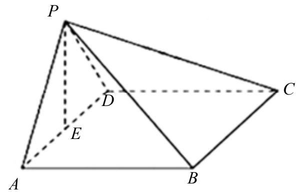


图 16.40

设 $AB=x$，则由题设 $PA=PD=AB=DC$ 可得：

$PA=PD=AB=DC=x$，又∵题设 $\angle APD=90^\circ$，

∴在等腰 Rt△APD 中，$AD=\sqrt{2}x$，$PE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$．

故四棱锥 $P-ABCD$ 体积 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}AB\cdot AD\cdot PE=\dfrac{1}{3}x\cdot\sqrt{2}x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=\dfrac{1}{3}x^3$．

由题设：四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{8}{3}$ 可得：$\dfrac{1}{3}x^3=\dfrac{8}{3}$，解得：$x=2$．　利用面积相等列方程

从而 $PA=PD=AB=x=2$，$AD=BC=\sqrt{2}x=2\sqrt{2}$．

又∵在等腰 Rt△PAB 中，斜边 $PB=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$，且同理可得：$PC=\sqrt{2}CD=2\sqrt{2}$．

∴可得四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积为：$\dfrac{1}{2}PA\cdot PD+\dfrac{1}{2}PA\cdot AB+\dfrac{1}{2}PD\cdot DC+\dfrac{1}{2}BC^2\sin60^\circ=6+2\sqrt{3}$．

例 16.28 （乙 1518-2）如图 16.41 所示，四边形 $ABCD$ 为菱形，G 为 AC 与 BD 的交点，$BE\perp$ 平面 $ABCD$，且（已证）平面 $AEC\perp$ 平面 BED．若 $\angle ABC=120°$，$AE\perp EC$，三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，求该三棱锥的侧面积．

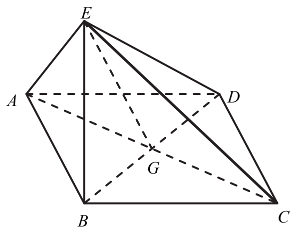


图 16.41

解析：设 $AB=x$，则在菱形 $ABCD$ 中，∵ $\angle ABC=120^\circ$，

∴ $\angle ABG=60^\circ$，且 $\angle AGB=90^\circ$，$GD=BG=AB\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}x$，

$GC=AG=AB\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$．

∵题设 $AE\perp EC$，∴在 Rt△AEC 中，将 G 视为 Rt△AEC 的外接圆圆心，则 $GE=GA=GC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$．

∵题设 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，∴ $EB\perp BG$．　线面垂直性质定理

在 Rt△EBG 中，由勾股定理可得：$EB=\sqrt{EG^2-BG^2}=\sqrt{\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$．

因此，$V_{E-ACD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AC\cdot GD\cdot EB=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{6}}{24}x^3$，

又∵题设 $V_{E-ACD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，∴ $\frac{\sqrt{6}}{24}x^3=\frac{\sqrt{6}}{3}$，解得：$x=2$．

即有 $AB=x=2$，$AG=GC=GE=\frac{\sqrt{3}}{2}x=\sqrt{3}$，$GD=BG=\frac{1}{2}x=1$，$EB=\frac{\sqrt{2}}{2}x=\sqrt{2}$．

∵ $BE\perp$ 平面 $ABCD$，∴ $AC\perp EB$，　线面垂直性质定理

又∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴ $AC\perp BD$，　菱形对角线相互垂直平分

$AC\perp$ 平面 EBD，从而 $AC\perp EG$，　线面垂直判定定理

$EA=EC=\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$．

在 Rt△EBD 中由勾股定理可得：$ED=\sqrt{EB^2+BD^2}=\sqrt{2+2^2}=\sqrt{6}$．

因此，三棱锥 $E-ACD$ 的三个侧面是底边分别为 $AC=2\sqrt{3}$，$CD=AB=2$ 和 $AD=BC=2$，腰长都为 $\sqrt{6}$ 的等腰三角形，其面积分别计算如下：

设等腰三角形的底边长为 D，腰长为 L，高为 h．

则由勾股定理可得：$h=\sqrt{L^2-\frac{D^2}{4}}$，其面积为：$S=\frac{1}{2}Dh=\frac{1}{2}D\sqrt{L^2-\frac{D^2}{4}}$．

因此，$S_{\triangle EAC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{6-3}=3$，$S_{\triangle ECD}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{6-1}=\sqrt{5}$，$S_{\triangle EAD}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{6-1}=\sqrt{5}$，故三棱锥 $E-ACD$ 的侧面积为 $3+2\sqrt{5}$．

经验总结：当给定几何体的体积求表面积时，往往需要利用体积列方程先求出几何体的一条边长．

问题 2.3　求几何体的体积

例 16.29　（乙 1618-2）如图 16.42 所示，已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是一个直角三角形，$PA=6$．顶点 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D，D 在平面 PAB 内的正投影为点 E，连接 PE 并延长交 AB 于 G．且（已证）G 是 AB 的中点．在图中作出点 E 在平面 PAC 内的正投影 F（说明作法及理由），并求四面体 $PDEF$ 的体积．

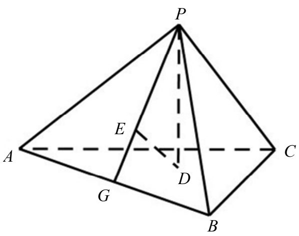


图 16.42

解析：在平面 PAB 内，过 E 作 PB 的平行线交 PA 于 F，如图 16.43 所示，F 即为点 E 在平面 PAC 内的正投影．理由说明如下：

∵题设正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是一个直角三角形，∴ $PB\perp PA$，且 $PB\perp PC$．

又∵所作 $EF\ /\!/\ PB$，∴ $EF\perp PA$，$EF\perp PC$．

故 $EF\perp$ 平面PAC，即点 F 为点 E 在平面 PAC 内的正投影．

为求四面体 $PDEF$ 的体积，首先要明确“发现”一条垂直底面的“高”．

∵题设 D 在平面 PAB 内的正投影为点 E，∴ $DE\perp$ 平面 PEF．

故四面体 $PDEF$ 可以看成是以 DE 为高，以△PEF 为底的直三棱锥，因此，$V_{D-PEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle PEF}\cdot DE$，其中△$PEF$ 是直角三角形．

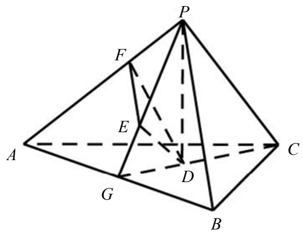


图 16.43

∵题设正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面是一个直角三角形，且 $PA=6$，∴ $AB=BC=AC=\sqrt{2}PA=6\sqrt{2}$．

又∵已证：G 是 AB 的中点，且△PAB 为等腰直角三角形，∴ $GP=GA=GB$，即 $PG=\frac{1}{2}AB=3\sqrt{2}$．

又∵△ABC 为等边三角形，∴ D 在 CG 上，且由“中线定理”可得：$\frac{CD}{CG}=\frac{2}{3}$，$\frac{GD}{CG}=\frac{1}{3}$．

又∵题设：$PC\perp$平面PAB，$DE\perp$平面PAB，∴$DE\,/\!/\,PC$，从而$\dfrac{PE}{PG}=\dfrac{CD}{CG}$，$\dfrac{ED}{PC}=\dfrac{GD}{GC}$.

即$PE=\dfrac{2}{3}PG=\dfrac{2}{3}\times3\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，$ED=\dfrac{1}{3}PC=\dfrac{1}{3}\times6=2$.

∵在等腰Rt△PAB中PG是中线，∴$\angle APG=45^\circ$，

又∵$EF\perp PA$，∴在Rt△PEF中，$\angle EFP=45^\circ$，即Rt△PEF为等腰直角三角形，故$EF=PF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}PE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times2\sqrt{2}=2$，$S_{\triangle PEF}=\dfrac{1}{2}PF\cdot EF=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$，$V_{D-PEF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle PEF}\cdot DE=\dfrac{1}{3}\times2\times2=\dfrac{4}{3}$.

例 16.30（乙 1319-2）如图 16.44 所示，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$CA=CB$，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60^\circ$，且（已证）$AB\perp A_1C$．若$AB=CB=2$，$A_1C=\sqrt{6}$，求三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积.

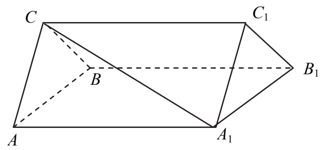


图 16.44

解析：∵题设$CA=CB$，且$AB=CB=2$，∴△ABC为等边三角形.

如图 16.45 所示，取AB的中点E，连接CE，EA_1，BA_1.

又∵$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60^\circ$，

∴△ABA_1是边长为 2 的等边三角形，故$CE=EA_1=\sqrt{3}$.

又∵$A_1C=\sqrt{6}$，$CE=EA_1=\sqrt{3}$，∴$A_1C^2=CE^2+EA_1^2$，

从而△CEA_1为直角三角形，即$EA_1\perp CE$.

∵$EC\cap AB=E$，∴$EA_1\perp$平面ABC，即A_1E为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的高.

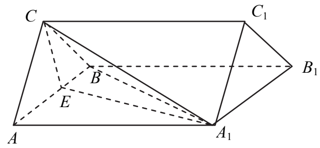


图 16.45

又∵三角形ABC的面积为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

∴三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为$V=S_{\triangle ABC}\cdot A_1E=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$.

例 16.31（甲 1718-2）如图 16.46 所示，四棱锥$P-ABCD$中，侧面PAD为等边三角形且垂直于底面$ABCD$，$AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，且（已证）直线$BC\,/\!/$平面$PAD$，若△$PCD$的面积为$2\sqrt{7}$，求四棱锥$P-ABCD$的体积.

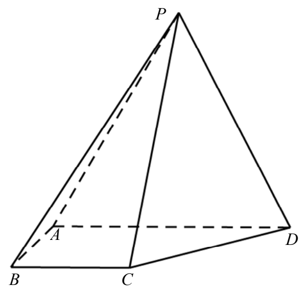


图 16.46

解析：∵题设侧面PAD为等边三角形，∴取AD中点M．连接PM，CM，如图 16.47 所示. 利用等腰三角形底边上的中线与高重合来获得垂线

∵题设$AB=BC=\dfrac{1}{2}AD$，且$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，

∴四边形$ABCM$为正方形，故$CM\perp AD$.

∵题设侧面PAD为等边三角形且垂直于底面，且平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$.

∴$PM\perp AD$，$PM\perp$底面$ABCD$.

又∵$CM\subset$底面$ABCD$，∴$PM\perp CM$.

又∵题设侧面PAD为等边三角形且垂直于底面$ABCD$，且点M是PA的中点，$PM\perp AD$，∴$PM\perp AD$.

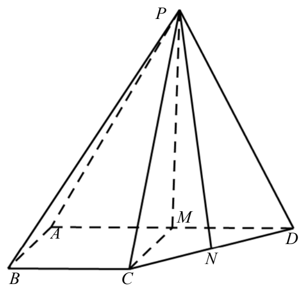


图 16.47

∵平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，且$PM\perp CM$，$PM\perp AD$.

∴$PM\perp$底面$ABCD$. 线面垂直判定定理

设$AB=BC=x$，则$CM=AM=MD=AB=x$，且$PA=PD=AD=2x$. △PAD为等边三角形

在Rt△CMD中，∵$CM=MD=x$，∴$CD=\sqrt{2}x$. 勾股定理

在Rt△PMD中，∵$PD=2x$，$MD=x$，∴$PM=\sqrt{3}x$. 勾股定理

取CD的中点N，连接PN，则$PN\perp CD$．所以，$PN=\dfrac{\sqrt{14}}{2}x$.

$\because$ 题设 $\triangle PCD$ 的面积为 $2\sqrt{7}$ ，$\therefore \frac{1}{2}\times\sqrt{2}x\times\frac{\sqrt{14}}{2}x=2\sqrt{7}$. 解得：$x=2$，$x=-2$. 舍去负值

于是 $AB=BC=2$，$AD=4$，$PM=2\sqrt{3}$. 所以，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{2\times(2+4)}{2}\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

经验总结：当给定等腰（等边）三角形时，往往取中点连线获得垂线.

例 16.32 （甲 1619-2）如图 16.48 所示，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，点 E、F 分别在 AD，CD 上，$AE=CF$，EF 交 BD 于点 H，将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置．且（已证）$AC\perp HD'$. 若 $AB=5$，$AC=6$，$AE=\frac{5}{4}$，$OD'=2\sqrt{2}$，求五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积.

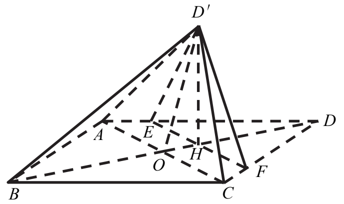


图 16.48

解析：$\because$ 题设 $OD'=2\sqrt{2}$，$\therefore$ 提示我们连接 OD' 构成 $\triangle D'OH$.

$\because$ 目标是求五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积，$\therefore$ 需要“找到”棱锥的“高”.

如图我们可以猜想 $D'H$ 或 $D'O$ 为“高”，但还必须加以证明. 先猜后证思想

$\because$ 已证 $EF\ /\!/\ AC$，$\therefore \frac{HD}{OD}=\frac{ED}{AD}$，从而，

$HD=\frac{ED}{AD}\cdot OD=\frac{AD-AE}{AD}\sqrt{AD^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\left(1-\frac{AE}{AB}\right)\sqrt{AB^2-3^2}=\left(1-\frac{5}{4\times5}\right)\sqrt{16}=3$，$HD'=HD=3$，且 $OH=OD-HD=\sqrt{5^2-3^2}-3=4-3=1$，

又 $\because$ 在 $\triangle D'OH$ 中，已求得：$OH=1$，$HD'=3$，且题设 $OD'=2\sqrt{2}$，

$\therefore OD'^2+OH^2=HD'^2$，即 $\triangle D'OH$ 为直角三角形，因此，$D'O\perp HD$，即 $D'O\perp BD$.

$\because$ 已证 $AC\perp HD'$，已知 $AC\perp BD$，且 $HD'\cap BD=H$，

$\therefore AC\perp$ 平面 OHD'，故 $AC\perp OD'$. 线面垂直性质

总之，$\because D'O\perp BD$，$AC\perp OD'$，且 $AC\cap BD=O$，$\therefore D'O\perp$ 平面 $ABCD$.

虽然不会五棱锥的体积计算公式，但是连接 OA，OB，OC，OF，OE 可将正棱锥分割为五个正三棱锥，

$\therefore V_{D'-ABCFE}=\frac{1}{3}S_{ABCFE}\cdot D'O=\frac{1}{3}\left(S_{ABCD}-S_{\triangle DEF}\right)\cdot D'O$，

又 $\because S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\times6\times8=24$，$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}EF\cdot HD=\frac{1}{2}\frac{HD}{OD}\cdot AC\cdot HD=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times6\times3=\frac{27}{4}$，

$\therefore V_{D'-ABCFE}=\frac{1}{3}\left(S_{ABCD}-S_{\triangle DEF}\right)\cdot D'O=\frac{1}{3}\times\left(24-\frac{27}{4}\right)\times2\sqrt{2}=\left(8-\frac{9}{4}\right)\times2\sqrt{2}=\frac{23\sqrt{2}}{2}$.

所以五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积为 $\frac{23\sqrt{2}}{2}$.

例 16.33 （甲 1519-2）如图 16.49 所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=16$，$BC=10$，$AA_1=8$，E，F 分别在 A_1B_1，D_1C_1 上，$A_1E=D_1F=4$，过点 E，F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形．其中，$EF=10$，$EM=8$，$MG=6$，$EG=10$. 求平面 α 把该长方体分成的两部分体积的比值.

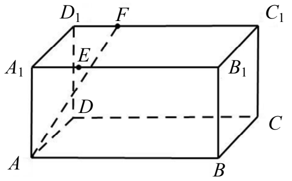


图 16.49

解析：如图 16.50 所示，平面 α 把长方体分割成以四边形 AA_1EG 和 EB_1BG 为底面，高为 $EF=10$ 的两个直四棱柱.

因此，两直四棱柱的体积比等于两四边形的面积比.

$\because EM=8$，$MG=6$，$\therefore S_{\triangle EMG}=\frac{1}{2}\times6\times8=24$，

又 $\because A_1E=4$，$AA_1=8$，$\therefore S_{AA_1EM}=4\times8=32$.

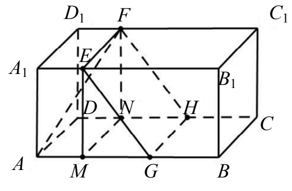


图 16.50

因此，$S_{AA_1EG}=S_{AA_1EM}+S_{\triangle EMG}=24+32=56$．

又∵ $S_{AA_1B_1B}=A_1A\cdot AB=8\times 16=128$，

∴ $S_{EB_1BG}=S_{AA_1B_1B}-S_{AA_1EG}=128-56=72$．

因此，$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{56}{72}=\dfrac{7}{9}$．即平面$\alpha$把该长方体分成的两部分体积的比值为$\dfrac{7}{9}$．

例 16.34 （丙 1619-2）四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$AD\ /\!/\ BC$，$AB=AD=AC=3$，$PA=BC=4$，M为线段AD上一点，$AM=2MD$，N为PC的中点，且（已证）$MN\ /\!/$平面PAB．求四面体$N-BCM$的体积．

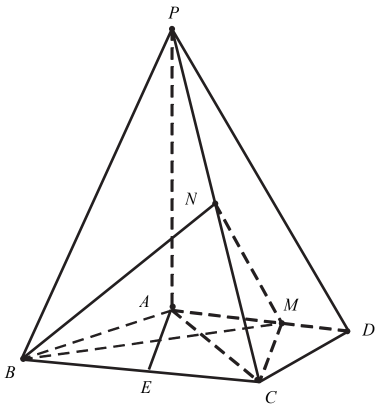


图 16.51

解析：∵题设$PA\perp$底面$ABCD$，且N为PC的中点，

∴ N到底面$ABCD$的距离为$\dfrac{1}{2}PA=\dfrac{1}{2}\times 4=2$．

又∵ $AD\ /\!/\ BC$，∴ $S_{\triangle BMC}=S_{\triangle BAC}$，

同底等高

又∵在$\triangle ABC$中，$AB=AC=3$，$BC=4$．

∴取BC的中点E，连接AE，如图 16.51 所示，

则$BE=EC=\dfrac{1}{2}BC=2$，且$AE\perp BC$．

在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$中，$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，

∴ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AE=\dfrac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$．

因此，$V_{N-BMC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BMC}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{5}\times 2=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$．

例 16.35 （甲 1318-2）直棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，D，E分别是AB，BB_1的中点，且（已证）$BC_1\ /\!/$平面A_1CD．设$AA_1=AC=CB=2$，$AB=2\sqrt{2}$，求三棱锥$C-A_1DE$的体积．

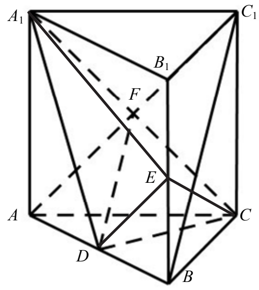


图 16.52

解析：连接BC_1和AC_1，且AC_1与A_1C交于F，连接DF，如图 16.52 所示．

∵ $ABC-A_1B_1C_1$是直棱柱，∴ $AA_1\perp CD$．

又∵题设$AC=CB=2$，且D是AB的中点，∴ $AB\perp CD$．

又∵ $AA_1\cap AB=A$，∴ $CD\perp$平面ABB_1A_1．

∵题设$AC=CB=2$，$AB=2\sqrt{2}$，∴ $\angle ACB=90^\circ$，且$CD=\sqrt{2}$．

又∵ $AA_1=AC=CB=2$，且D，E分别是AB，BB_1的中点．

∴ $A_1D=\sqrt{6}$，$DE=\sqrt{3}$，$A_1E=3$，且$CE=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$．

又∵满足$A_1D^2+DE^2=A_1E^2$，∴ $\angle A_1DE=90^\circ$．

∵ $S_{\triangle A_1DE}=\dfrac{1}{2}A_1D\cdot DE=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，∴ $V_{C-A_1DE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1DE}\cdot CD=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$．

例 16.36 （丙 1719-2）如图 16.53 所示，四面体$ABCD$中，$\triangle ABC$是正三角形，$AD=CD$．且（已证）$AC\perp BD$．已知$\triangle ACD$是直角三角形，$AB=BD$．若E为棱BD上与D不重合的点，且$AE\perp EC$，求四面体$ABCE$与四面体$ACDE$的体积比．

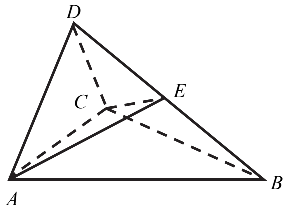


图 16.53

分析：欲求四面体$ABCE$与四面体$ACDE$的体积比，需关注这两个四面体的“底”与“高”．

思路 1：两个四面体都以$\triangle ACE$为“底”，需要分别计算B，D两点到“底”的距离；

思路 2：两个四面体都以A为顶点，需要分别计算$\triangle DCE$和$\triangle BCE$的面

积，关键是确定 $\dfrac{DE}{EB}$.

思路 3：∵ $V_{D-ACE}=V_{D-ABC}-V_{E-ABC}$ ，∴利用同底不等高来计算体积之比，关键要求 D，E 到底面 $\triangle ABC$ 的“高”.

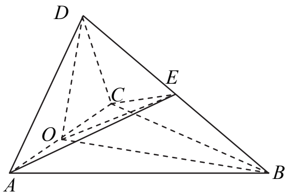


图 16.54

解析：∵题设 $\triangle ABC$ 是正三角形，且 $AD=CD$ ，

∴ $\triangle ADC$ 也是等腰三角形．为此，取两个三角形的公共边 AC 的中点 O ，连接 EO ，如图 16.54 所示.

∵题设 $\angle ADC=90^\circ$ ，∴在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$DO=AO=CO$.

∵（已证）$AC\perp BD$，且 $AC\perp OD$ ，∴ $AC\perp$ 平面 DOB ，从而，$AC\perp OB$ ，因此，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$BO^2+AO^2=AB^2$.

线面垂直判定定理

勾股定理

又∵ $AB=BD$ ，∴ $BO^2+DO^2=BO^2+AO^2=AB^2=BD^2$ ，

因此，$\angle DOB=90^\circ$ ，由题设可知 $\triangle AEC$ 为直角三角形，所以 $EO=\dfrac{1}{2}AC$.

又∵ $\triangle ABC$ 是正三角形，且 $AB=BD$ ，∴ $EO=\dfrac{1}{2}BD$ ．故 E 为 BD 的中点，从而 E 到平面 ABC 的距离为 D 到平面 ABC 的距离的 $\dfrac{1}{2}$ ，四面体 $ABCE$ 的体积为四面体 $ABCD$ 的体积的 $\dfrac{1}{2}$ ，即四面体 $ABCE$ 与四面体 $ACDE$ 的体积之比为 $1:1$.

例 16.37（甲 1468-2）如图 16.55 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$ ，E 为 PD 的中点，且（已证）PB // 平面 AEC ．设二面角 $D-AE-C$ 为 60° ，$AP=1$ ，$AD=\sqrt{3}$ ，求三棱锥 $E-ACD$ 的体积.

分析：为了求三棱锥 $E-ACD$ 的体积，需要求点 E 到底面 $ABCD$ 的距离和 $\triangle ACD$ 的面积.

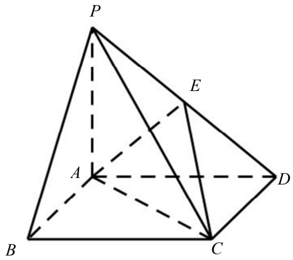


图 16.55

解析 1：∵ $PA\perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $AP=1$ ，

∴点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 1．又∵ E 为 PD 的中点，

∴点 E 到底面 $ABCD$ 的距离为 $\dfrac{1}{2}$.

∵在 $\mathrm{Rt}\triangle PAD$ 中，$AP=1$，$AD=\sqrt{3}$ ，

∴由勾股定理可得：$PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$.

因此，在 $\mathrm{Rt}\triangle PAD$ 中，$\angle EDA=\angle EAD=30^\circ$.

又∵题设二面角 $D-AE-C$ 为 60° ，

∴如图 16.56 所示，延长 AE，且过点 D 作 $DG\perp AG$.

连接 CG ，则 $\angle CGD=60^\circ$.

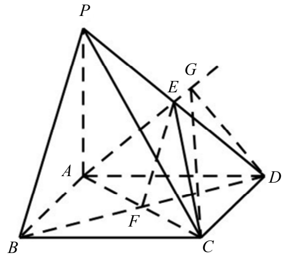


图 16.56

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADG$ 中，∵ $\angle EAD=30^\circ$ ，$AD=\sqrt{3}$ ，∴ $GD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又∵在 $\mathrm{Rt}\triangle CDG$ 中，$\angle CGD=60^\circ$ ，$GD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$PA\perp$ 平面 $ABCD$ ，且底面为矩形

∴ $CD=GD\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}$.

$$V_{E-ACD}=V_{C-AED}=\frac{1}{3}S_{\triangle AED}\cdot CD=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S_{\triangle PAD}\right)\cdot CD=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1\times\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

经验总结：当给定二面角时，往往需要在几何图形中作出二面角来进行计算.

解析 2：∵底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$ ，∴以 A 点为坐标原点，以 $\overrightarrow{AB}$ 方向为 x 轴正方向，

以 $|\overrightarrow{AP}|$ 为单位长，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，如图 16.57 所示．则 $D(0,\sqrt{3},0)$，$E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，$|\overrightarrow{AE}|=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$．

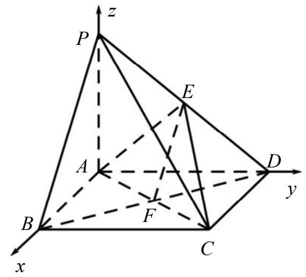


图 16.57

设 $|\overrightarrow{AB}|=m$，则 $B(m,0,0)$，$C(m,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AC}=(m,\sqrt{3},0)$．

设平面 AEC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}mx+\sqrt{3}y=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

可取 $\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{m},-1,\sqrt{3}\right)$．

又∵平面 DAE 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$，

∴由题设可得：$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{1}{2}$，即 $\sqrt{\frac{3}{3+4m^2}}=\frac{1}{2}$，解得：$m=\frac{3}{2}$．

∵ E 为 PD 的中点，且 $AP=1$，∴三棱锥 $E-ACD$ 的高为 $\frac{1}{2}$．

又∵底面 $ABCD$ 为矩形，且底面积为 $\sqrt{3}m=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴ $\triangle ACD$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$．因此，三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$．

经验总结：当给定二面角时，往往需要借助建立空间直角坐标系来进行计算.

例 16.38 （乙 1818-2）如图 16.58 所示，在平行四边形 $ABCM$ 中，$AB=AC=3$，$\angle ACM=90°$，以 AC 为折痕将△ACM 折起，使点 M 到达点 D 的位置，且平面 $ACD\perp$ 平面 ABC．Q 为线段 AD 上一点，P 为线段 BC 上一点，且 $BP=DQ=\frac{2}{3}DA$，求三棱锥 $Q-ABP$ 的体积.

解析：∵折叠前：$MC\perp CA$，　　题设 $\angle ACM=90°$

∴折叠后 ：$DC\perp CA$，

又∵平面 $ABC\perp$ 平面 ACD，且平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=AC$．

∴ $DC\perp$ 平面 ABC．

因此，DC 是三棱锥 $D-ABC$ 的高，且 $DC=CM=AB=3$．

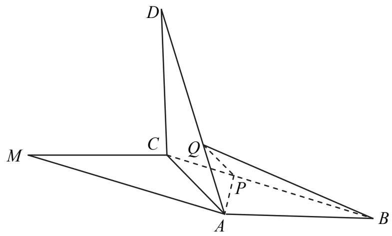


图 16.58

∵题设：$DQ=\frac{2}{3}DA$，∴在 Rt△DCA 中，$QA=\frac{1}{3}DA$．

由相似三角形可得：三棱锥 $Q-ABP$ 的高为 $\frac{1}{3}DC=1$．

又∵题设：$BP=\frac{2}{3}DA=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}BC$，∴ $S_{\triangle ABP}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$．　　同底为 AB，高为 $\frac{2}{3}$

∵折叠前：$MC\perp CA$，　　题设 $\angle ACM=90°$

∴ $AB\perp CA$．

在 Rt△ABC 中，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$，从而 $S_{\triangle ABP}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}=3$．

由三棱锥体积公式可得：$V_{Q-ABP}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABP}\cdot h=\frac{1}{3}\times3\times1=1$．

问题 3 空间角（正弦、余弦）的计算

问题分析：空间角的计算主要有两种方法：一是向量法，二是几何法.（1）向量法：设 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 分别为平面 α，β 的法向量，则空间角 θ 与 $\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle$ 互补或相等，故有 $|\cos\theta| = |\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>| = \dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}$. 求解时一定要注意结合实际图形判断所求角是锐角还是钝角.（2）几何法：先在图中正确地画出待求的空间角，然后在三角形中利用余弦定理进行求解.

问题 3.1 求空间角的余弦值

例 16.39（乙 1768-2）如图 16.59 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\ /\!/\ CD$，且 $\angle BAP=\angle CDP=90^{\circ}$. 且（已证）平面 $PAB\perp$ 平面 PAD. 若 $PA=PD=AB=DC$，$\angle APD=90^{\circ}$，求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.

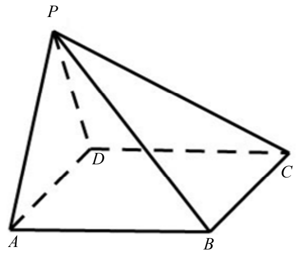


图 16.59

解析 1：（向量法）在平面 PAD 内作 $PF\perp AD$，垂足为 F. 由（已证）平面 $PAB\perp$ 平面 PAD 可知：$AB\perp$ 平面 PAD，故 $AB\perp PF$，可得 $PF\perp$ 平面 $ABCD$.

以 F 为坐标原点，$\overrightarrow{FA}$ 的方向为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{AB}|$ 为单位长，建立如图 16.60 所示的空间直角坐标系 $F-xyz$. 由平面 $PAB\perp$ 平面 PAD 及已知可得：

$A(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0)$，$P(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$B(\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$，$C(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,0)$.

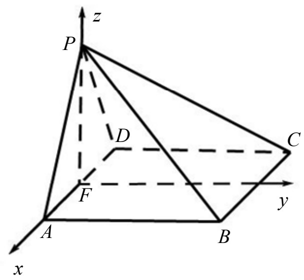


图 16.60

所以 $\overrightarrow{PC}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{PA}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$. 设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 PCB 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}}{2}x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\\ \sqrt{2}x=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{n}=(0,-1,-\sqrt{2})$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 PAB 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}z=0\\ y=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$，

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

解析 2：（几何法）∵题设 $PA=AB$，∴$\triangle PAB$ 为等腰三角形.

取 PB 的中点 E，连接 AE，则 $AE\perp PB$，如图 16.16 所示.

等腰三角形底边的中线与高重合

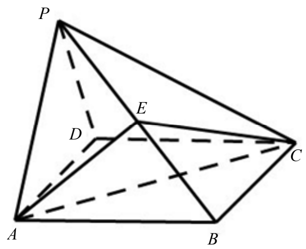


图 16.61

又∵（已证）平面 $PAB\perp$ 平面 PAD，

∴ $AB\perp$ 平面 PAD，故 $AB\perp PA$. 线面垂直性质定理

因此，$\triangle PAB$ 是等腰直角三角形，从而 $PB=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}PA$.

又∵题设 $\angle APD=90^{\circ}$，且 $PA=PD=AB=DC$，∴ $AD=\sqrt{2}PA$.

又∵题设 $AB\ /\!/\ CD$，∴ $CD\perp$ 平面 PAD. 线面垂直判定定理

从而在 $\mathrm{Rt}\triangle PDC$ 中，由勾股定理可得：$PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}PA$.

因此，在 $\triangle PBC$ 中，∵ $PB=\sqrt{2}PA$，$PC=\sqrt{2}PA$，$BC=AD=\sqrt{2}PA$，

∴ $\triangle PBC$ 是等边三角形，连接 CE，则 $CE\perp PB$. 等边三角形的中线与高重合

至此证明：$AE\perp PB$，$CE\perp PB$，连接 AC，则 $\angle AEC$ 即为所求.

为便于计算，设 $PA=PD=AB=DC=1$， 这是简化计算的一种重要方法

则 $AE=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}PA=\frac{\sqrt{2}}{2}$， 等腰直角三角形中线：$E$ 为圆心，PB 为圆的半径

$CE=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{2}PB=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}PA=\frac{\sqrt{6}}{2}$， 等边 $\triangle PBC$ 的高

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$， 勾股定理计算 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的斜边

在 $\triangle AEC$ 中，由余弦定理：$\cos\angle AEC=\frac{AE^2+EC^2-AC^2}{2AE\cdot EC}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

经验总结：用几何法计算二面角时，关键是要正确地“找到”二面角，并在图中画出来，然后才能利用余弦定理进行计算.

例 16.40 （乙 1668-2）如图 16.62 所示，在以 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，面 $ABEF$ 为正方形，$AF=2FD$，$\angle AFD=90^\circ$，已证：平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$，且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 60°．求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值.

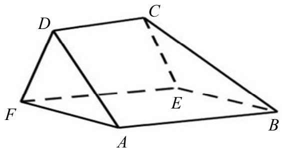


图 16.62

解析：在平面 $EFDC$ 内，过 D 作 $DO\perp FE$，垂足为 O.

$\because$ 已证：平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$，$DO\perp FE$，且 FE 为两平面交线，

$\therefore DO\perp$ 平面 $ABEF$.

以 O 为坐标原点，$\overline{OF}$ 的方向为 x 轴的正方向，$\left|\overline{OF}\right|$ 为单位长，建立如图 16.63 所示的空间直角坐标系 $O-xyz$．$\because$ 已证：平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$，$\therefore\angle DFE$ 为二面角 $D-AF-E$ 的平面角.

又 $\because$ 题设二面角 $D-AF-E$ 为 60°，$\therefore\angle DFE=60^\circ$.

又 $\because$ 已设 $\left|\overline{OF}\right|$ 为单位长度 1，$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle DFO$ 中，$|DF|=2$，$|DO|=\sqrt{3}$；又 $\because$ 题设：$AF=2FD$，$\therefore|AF|=2\times2=4$，因此可得：$A(1,4,0)$，$B(-3,4,0)$，$E(-3,0,0)$，$D(0,0,\sqrt{3})$，$F(1,0,0)$.

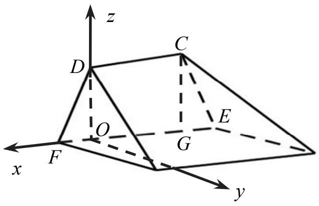


图 16.63

$\because$ 题设面 $ABEF$ 为正方形，$\therefore AB\,/\!/\,EF$，从而 $AB\,/\!/$ 平面 $EFDC$，

又 $\because$ 平面 $ABCD\cap$ 平面 $EFDC=CD$，$\therefore AB\,/\!/\,CD$，

又 $\because AB\,/\!/\,EF$，$\therefore CD\,/\!/\,EF$，即 C 点的 z 坐标等于 $|DO|=\sqrt{3}$.

又 $\because$ 已证平面 $ABEF\perp$ 平面 $EFDC$，$\therefore\angle CEF$ 为二面角 $C-BE-F$ 的平面角，即 $\angle CEF=60^\circ$，过 C 点作 $CG\perp FE$，G 为垂足.

则在 $\mathrm{Rt}\triangle CGE$ 中，$\because\angle CEF=60^\circ$，$|CG|=|DO|=\sqrt{3}$，

$\therefore|GE|=|CG|\cot60^\circ=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$，因此，$|OG|=|OE|-|GE|=3-1=2$．即 $C\left(-2,0,\sqrt{3}\right)$．所以，$\overrightarrow{EB}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{EC}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(-4,0,0)$，$\overrightarrow{AC}=\left(-3,-4,\sqrt{3}\right)$

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 BCE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\4y=0\end{cases}$，所以可以取 $\boldsymbol{n}=\left(3,0,-\sqrt{3}\right)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 $ABCD$ 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-3x-4y+\sqrt{3}z=0\\-4x=0\end{cases}$．所以可以取 $\boldsymbol{m}=\left(0,\sqrt{3},4\right)$．从而 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.

故二面角 $E-BC-A$ 的余弦值为 $-\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.

例 16.41 （乙 1568-2）如图 16.64 所示，四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=120^\circ$，E，F 是平面 $ABCD$ 同一侧的两点，$BE\perp$ 平面 $ABCD$，$DF\perp$ 平面 $ABCD$，$BE=2DF$，$AE\perp EC$，且（已证）平面 $AEC\perp$ 平面 AFC．求直线 AE 与直线 CF 所成角的余弦值.

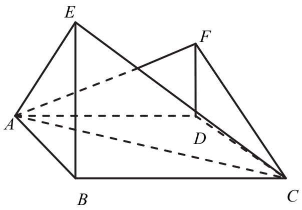


图 16.64

解析：如图 16.65 所示，连接 BD，设 $BD\cap AC=G$ ，连接 EG，FG，EF，在菱形 $ABCD$ 中，不妨设 $GB=1$.

$\because \angle ABC=120^\circ$，$\therefore AG=GC=\sqrt{3}$.

$\because$ 题设 $BE\perp$ 平面 $ABCD$，$AB=BC$. 菱形邻边相等

$\therefore AE=EC$，两直角三角形的两直角边相等，其斜边也相等

又 $\because AE\perp EC$，$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 中，G 为斜边上的中点，

故有 $EG=AG=GC=\sqrt{3}$. 即将 G 点看成是 $\mathrm{Rt}\triangle AEC$ 外接圆的圆心

在 $\mathrm{Rt}\triangle EBG$ 中，$\because EG=\sqrt{3}$，题设 $BG=1$，

$\therefore$ 由勾股定理可得：$BE=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，

又 $\because$ 题设 $BE=2DF$，$\therefore DF=\dfrac{1}{2}BE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

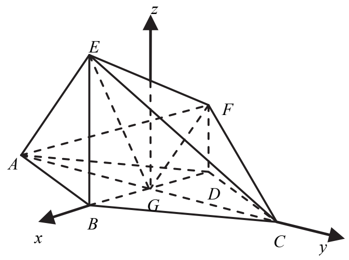


图 16.65

如图 16.65 所示，以 G 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}$ 的方向为 x 轴，y 轴正方向，以 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 为单位长度，建立空间直角坐标系 $G-xyz$，$\because$ 由（乙 1568-1）可得 $A\left(0,-\sqrt{3},0\right)$，$E\left(1,0,\sqrt{2}\right)$，$F\left(-1,0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$C\left(0,\sqrt{3},0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(1,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(-1,-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，故 $\cos\left\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CF}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CF}\right|}=\dfrac{\left(1,\sqrt{3},\sqrt{2}\right)\cdot\left(-1,-\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{1+3+2}\times\sqrt{1+3+\dfrac{1}{2}}}=$

$\dfrac{1\times(-1)+\sqrt{3}\times\left(-\sqrt{3}\right)+\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}\times\sqrt{\dfrac{9}{2}}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 AE 与 CF 所成的角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

例 16.42 （乙 1469-2）如图 16.66 所示的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，$AB\perp B_1C$，且（已证）$AC=AB_1$．若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60^\circ$，$AB=BC$，求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值.

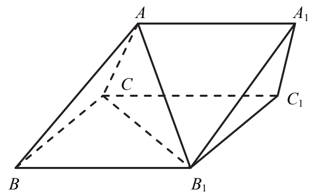


图 16.66

解析：连接 BC_1 交 B_1C 于 O，连接 AO .

$\because$ 题设 $AC\perp AB_1$，$\therefore \triangle CAB_1$ 为等腰直角三角形，所以 $AO=CO$.

又 $\because$ 题设 $AB=BC$，$\therefore \triangle BOA\cong\triangle BOC$.

故 $OA\perp OB$，从而 OA，OB，OB_1 两两互相垂直.

以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴正方向，$\left|\overrightarrow{OB}\right|$ 为单位长，建立如图 16.67 所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.

$\because$ 题设 $\angle CBB_1=60^\circ$，$\therefore \triangle CBB_1$ 为等边三角形.

又 $\because$ 题设 $AB=BC$，

$\therefore$ 可得：$A\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$B\left(1,0,0\right)$，$B_1\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，$C\left(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，

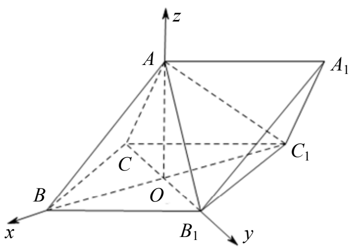


图 16.67

从而 $\overrightarrow{AB_1}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\left(1,0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}=\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 AA_1B_1 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\\ x-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{n}=\left(1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x-\frac{\sqrt{3}}{3}y=0\\ x-\frac{\sqrt{3}}{3}z=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{m}=\left(1,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$.

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\left(1,\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cdot\left(1,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)}{\sqrt{1+3+3}\times\sqrt{1+3+3}}=\frac{1}{7}$.

所以，二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值为 $\frac{1}{7}$.

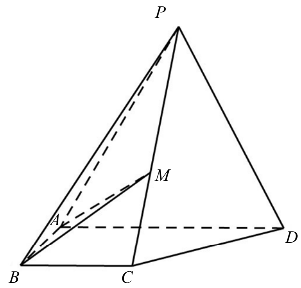


图 16.68

例 16.43 （甲 1769-2）如图 16.68 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，点 M 在棱 PC 上，且直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45°，求二面角 $M-AB-D$ 的余弦值.

解析：∵由题设 $\angle DAB=90^\circ$ 可得：$BA\perp AD$，

∴以点 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$ 的方向为 x 轴正方向，$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ 为单位长度.

建立如图 16.69 所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$P\left(0,1,\sqrt{3}\right)$，从而 $\overrightarrow{PC}=\left(1,0,-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

设点 $M(x,y,z)(0<x<1)$，则 $\overrightarrow{BM}=(x-1,y,z)$，$\overrightarrow{PM}=\left(x,y-1,z-\sqrt{3}\right)$.

又∵题设直线 BM 与底面 $ABCD$ 所成角为 45°，且底面 $ABCD$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，

∴由 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{BM},\boldsymbol{n}\right\rangle\right|=\sin45^\circ$ 可得：$\frac{|z|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

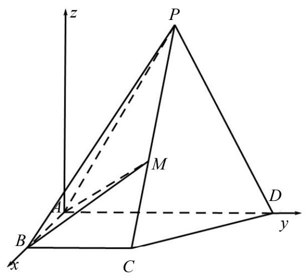


图 16.69

化简可得：$(x-1)^2+y^2-z^2=0$. ①

又∵点 M 在棱 PC 上，∴可设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，

则 $x=\lambda$，$y=1$，$z=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda$. ②

由①②解得：$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y=1\\ z=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}$，或 $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}>1\\ y=1\\ z=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{cases}$（舍去），

所以点 $M\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，从而 $\overrightarrow{AM}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 ABM 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\left(2-\sqrt{2}\right)x_0+2y_0+\sqrt{6}z_0=0\\ x_0=0\end{cases}$，所以可以取 $\boldsymbol{m}=\left(0,-\sqrt{6},2\right)$，于是 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$. 因此，二面角 $M-AB-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

例 16.44（丙 1769-2）如图 16.70 所示，四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABC$ 是正三角形，$\triangle ACD$ 是直角三角形，$\angle ABD=\angle CBD$，$AB=BD$．（已证）平面 $ACD\perp$ 平面 ABC，过 AC 的平面交 BD 于点 E，若平面 AEC 把四面体 $ABCD$ 分成体积相等的两部分，求二面角 $D-AE-C$ 的余弦值．

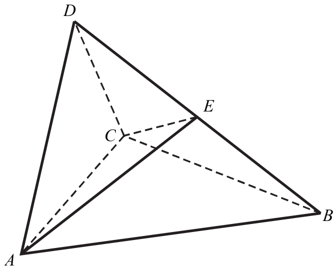


图 16.70

解析： 由题设及（已证）平面 $ACD\perp$ 平面 ABC 可知：OA，OB，OD 两两垂直，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$ 的方向为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{OA}|$ 为单位长度，建立如图 16.71 所示的空间直角坐标系 $O-xyz$．则 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,0,0)$，$D(0,0,1)$．

由题设知，四面体 $ABCE$ 的体积为四面体 $ABCD$ 的体积的 $\frac{1}{2}$，从而 E 到平面 ABC 的距离为 D 到平面 ABC 的距离的 $\frac{1}{2}$，即 E 为 DB 的中点，得 $E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$．

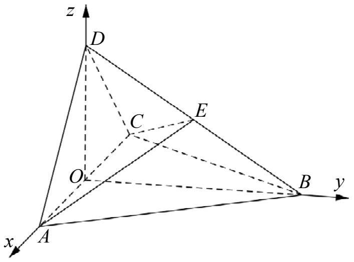


图 16.71

故 $\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$．

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 DAE 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}-x+z=0\\ -x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$．

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 AEC 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2x=0\\ -x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{m}=(0,-1,\sqrt{3})$．

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$，所以二面角 $D-AE-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$．

问题 3.2　求空间角的正弦值

例 16.45（乙 1368-2）如图 16.72 所示，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB$，$AB=AA_1$，$\angle BAA_1=60^\circ$．（已证）$AB\perp A_1C$，若平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B，$AB=CB$，求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值．

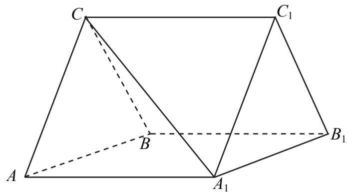


图 16.72

解析： ∵ 平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1B_1B，

∴ $OC\perp$ 平面 AA_1B_1B，进而 $OC\perp OA_1$，

∵ 已证 $AB\perp$ 平面 COA_1，∴ OA，OC 和 OA_1 两两相互垂直．故以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$ 方向为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{OA}|$ 为单位长度，建立如图 16.73 所示的空间直角坐标系 $O-xyz$．

∵ 设 $|\overrightarrow{OA}|$ 为单位长度，∴ $A(1,0,0)$，$A_1(0,\sqrt{3},0)$，$C(0,0,\sqrt{3})$，$B(-1,0,0)$．

为了求直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值，首先想到 $\overrightarrow{A_1C}=(0,-\sqrt{3},\sqrt{3})$，并且设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，最后利用两个向量的数量积中包含有两向量夹角的余弦进行求解．

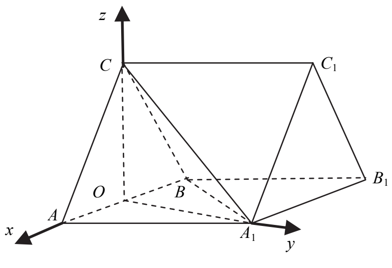


图 16.73

为此，必须先求出法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

$\because$ $\boldsymbol{n}\perp$ 平面 BB_1C_1C，$\therefore$ $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BC}$，且 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BB_1}$，即 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$.

又 $\because$ $\overrightarrow{BC}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{BB_1}=\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，

$\therefore$ $\begin{cases}x+\sqrt{3}z=0\\ -x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，两式相加可得：$y+z=0$，为便于计算可取 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3},1,-1\right)$，因此 $\cos\left\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1C}\right\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\overrightarrow{A_1C}\right|}=\dfrac{\left(\sqrt{3},1,-1\right)\cdot\left(0,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3+1+1}\times\sqrt{0+3+3}}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，所以直线 A_1C 与平面 BB_1C_1C 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

例 16.46 （甲 1669-2）如图 16.74 所示，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 O，$AB=5$，$AC=6$，点 E，F 分别在 AD，CD 上，$AE=CF=\dfrac{5}{4}$，EF 交 BD 于点 H．将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折到 $\triangle D'EF$ 的位置，$OD'=\sqrt{10}$．已证：$D'H\perp$ 平面 $ABCD$，且 $DO=BO=4$；$D'H=DH=3$．求二面角 $B-D'A-C$ 的正弦值.

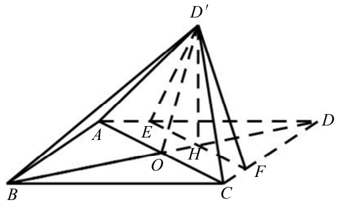


图 16.74

解析：$\because$ $D'H\perp$ 平面 $ABCD$，且 $EF\perp BD$，

$\therefore$ 可以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HF}$ 的方向为 x 轴正方向建立如图 16.75 所示的空间直角坐标系 $H-xyz$，则 $H(0,0,0)$，$A(-3,-1,0)$，$B(0,-5,0)$，$C(3,-1,0)$，$D(0,3,0)$，$D'(0,0,3)$.

$\because$ 目标是求二面角 $B-D'A-C$ 的正弦值，即求平面 ABD' 与平面 ACD' 二面角的正弦值.

$\therefore$ 必须先求出两个平面的法向量：

$\overrightarrow{AB}=(3,-4,0)$，$\overrightarrow{AC}=(6,0,0)$，$\overrightarrow{AD'}=(3,1,3)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 ABD' 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD'}=0\end{cases}$，

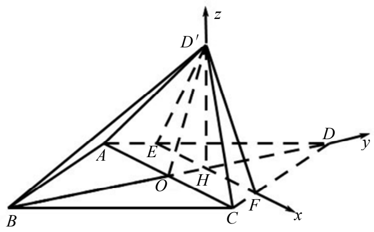


图 16.75

即 $\begin{cases}3x_1-4y_1=0\\ 3x_1+y_1+3z_1=0\end{cases}$，所以可取 $\boldsymbol{m}=(4,3,-5)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 ACD' 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD'}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}6x_2=0\\ 3x_2+y_2+3z_2=0\end{cases}$，所以可取 $\boldsymbol{n}=(0,-3,1)$.

因此，$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-14}{\sqrt{50}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{7\sqrt{5}}{25}$，$\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{2\sqrt{95}}{25}$.

所以二面角 $B-D'A-C$ 的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{95}}{25}$.

例 16.47（甲 1569-2）如图 16.76 所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=16$，$BC=10$，$AA_1=8$，点 E，F 分别在 A_1B_1，D_1C_1 上，$A_1E=D_1F=4$，过点 E，F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形，$EF=10$，$EM=8$，$MG=6$，$EG=10$，求直线 AF 与平面 α 所成的角的正弦值.

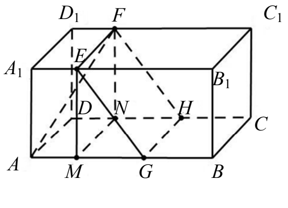


图 16.76

解析：如图 16.77 所示，过点 E 作 $EM\perp AB$，过点 F 作 $FN\perp DC$，则四边形 $EFNM$ 为长方形．连接 EG，GH，FH，则 $EF=FG=GH=FH=10$．即四边形 $EGHF$ 为正方形.

以 D 为坐标原点，以 $\overrightarrow{DA}$ 的方向为 x 轴的正方向建立如图 16.77 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$．则由题设可知：$A(10,0,0)$，$G(10,10,0)$，$E(10,4,8)$，$F(0,4,8)$．$\overrightarrow{FE}(10,0,0)$，$\overrightarrow{GE}(0,-6,8)$．

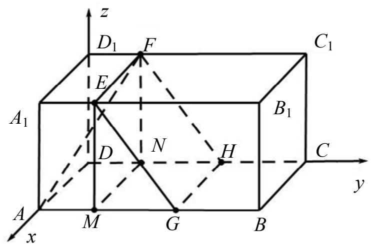


图 16.77

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 $EGHF$ 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GE}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}10x=0\\ -6y+8z=0\end{cases}$．

可取 $\boldsymbol{n}=(0,4,3)$，又∵ $\overrightarrow{AF}(-10,4,8)$，∴ $\left|\cos\left\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AF}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}\right|}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AF}\right|}=\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$．

即 AF 与平面 $EGHF$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}$．

例 16.48（丙 1669-2）如图 16.78 所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$AD\,/\!/\,BC$，$AB=AD=AC=3$，$PA=BC=4$，M 为线段 AD 上一点，$AM=2MD$，N 为 PC 的中点，且（已证）$MN\,/\!/$平面 PAB，求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值．

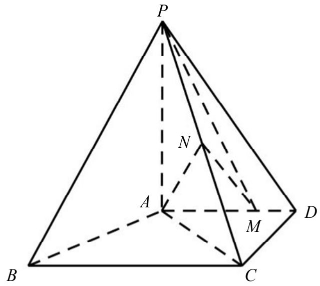


图 16.78

解析：∵题设 $AB=AD=AC=3$，

∴ 取 BC 的中点 E，连接 AE，则 $AE\perp BC$，且 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{5}$．又∵题设 $AD\,/\!/\,BC$，∴ $AE\perp AD$．

又∵题设：$PA\perp$底面 $ABCD$，∴ $PA\perp AD$．

以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AE}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立如图 16.79 所示的空间直角坐标系 $A-xyz$．则由题设及上述计算可得：$P(0,0,4)$，$M(0,2,0)$，$C(\sqrt{5},2,0)$，$N\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},1,2\right)$，$\overrightarrow{PM}=(0,2,-4)$，

$\overrightarrow{PN}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},1,-2\right)$，$\overrightarrow{AN}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},1,2\right)$．

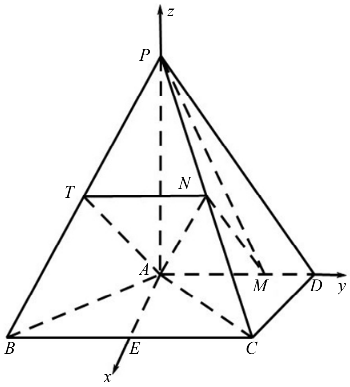


图 16.79

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 PMN 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PN}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}2y-4z=0\\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}x+y-2z=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$．

$$\because \cos\left\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AN}\right\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}}{|\boldsymbol{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AN}\right|}=\frac{0+2+2}{\sqrt{5}\times\frac{5}{2}}=\frac{8\sqrt{5}}{25}，\therefore \sin\left\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AN}\right\rangle=\sqrt{1-\left(\frac{8}{5\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{305}}{25}．$$

例 16.49（甲 1368-2）如图 16.80 所示，直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D，E 分别是 AB，BB_1 的中点，$AA_1=AC=CB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$，且（已证）$BC_1\,/\!/$平面 A_1CD，求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值．

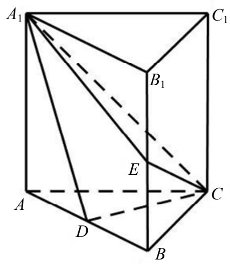


图 16.80

解析：∵题设 $AC=CB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$，

∴ $AC^2+BC^2=AB^2$，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形，且 $AC\perp BC$．

又∵三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直棱柱，∴ $C_1C\perp$平面ABC．

因此，以 C 为原点，以 $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CC_1}$ 为 x，y，z 轴正方向，以

$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{CC_1}\right|=2$ 为长度单位，建立如图 16.81 所示的空间坐标系 $C-xyz$．则 $C(0,0,0)$，$A_1(2,0,2)$，$D(1,1,0)$，$E(0,2,1)$，$\overrightarrow{CA_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{CD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{A_1E}=(-2,2,-1)$．

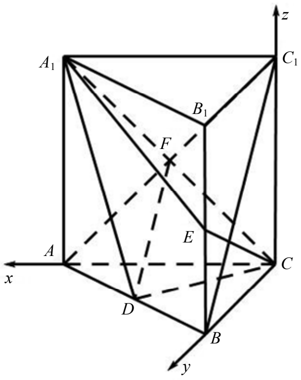


图 16.81

设平面 A_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$．则由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ 且 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0$ 可解得：$y=-x=z$．令 $x=1$ 可得：平面 A_1CD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$．

设平面 A_1CE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$．则由 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，且 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0$ 可解得：$x=2y=-z$．令 $y=1$ 可得：平面 A_1CE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,1,-2)$．则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即有 $\sin\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

因此，所求二面角 $D-A_1C-E$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

例 16.50（乙 1868-2）如图 16.82 所示，四边形 $ABCD$ 为正方形，E，F 分别为 AD，BC 的中点，以 DF 为折痕把 $\triangle DFC$ 折起，使点 C 到达点 P 的位置，且 $PF\perp BF$，平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$．求 DP 与平面 $ABFD$ 所成角的正弦值．

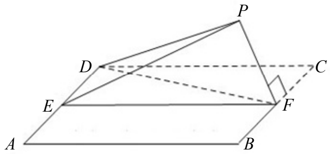


图 16.82

解析 1：$\because$ 平面 $PEF\perp$ 平面 $ABFD$，在 $\triangle PEF$ 内作 $PG\perp EF$，如图 16.83 所示，则 $PG\perp$ 平面 $ABFD$，连接 DG，$\angle PDG$ 即为 DP 与平面 $ABFD$ 所成的角．

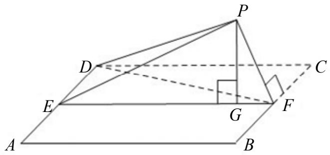


图 16.83

为方便计算，设正方形边长为 2，则 $PF=ED=1$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle PDG$ 中，欲求 $\angle PDG$，在已知 $DP=2$ 时，需求 $PG=?$．

由于 $PG\perp EF$，因此，猜测 $EP\perp PF$．

又 $\because$ 在 $\triangle PEF$ 中已知 $EF=2$，$PF=1$，

$\therefore$ 需要计算 PE 来证明 $\triangle PEF$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle PEF$．

$\because$ 题设：$PF\perp BC$，且 $EF\perp BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 PEF．

又 $\because AD\,/\!/\,BC$，$\therefore AD\perp$ 平面 PEF，从而 $AD\perp EP$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle PED$ 中，由勾股定理可得：$PE=\sqrt{PD^2-ED^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$．

又 $\because$ 在 $\triangle PEF$ 中，$PE=\sqrt{3}$，$PF=1$，$EF=2$，满足 $PE^2+PF^2=EF^2$，

$\therefore \triangle PEF$ 是直角三角形．

因此，$\mathrm{Rt}\triangle PEG\backsim\mathrm{Rt}\triangle PEF$．

三角形相似判断定理：两个直角三角形有一个公共锐角

从而 $\dfrac{PG}{PE}=\dfrac{PF}{EF}$，即 $PG=\dfrac{PF}{EF}\cdot PE=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle PGD$ 中，由正弦定义可得：$\sin\angle PDG=\dfrac{PG}{PD}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

解析 2：以点 D 为坐标原点建立如图 16.84 所示的空间直角坐标系，因此，关键在于确定点 P 的坐标．

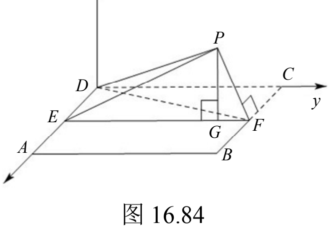


图 16.84

$\because$ 题设：$PF\perp BC$，且 $EF\perp BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 PEF．

又 $\because AD\,/\!/\,BC$，$\therefore AD\perp$ 平面 PEF，从而 $AD\perp EP$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle PED$ 中，由勾股定理可得：$PE=\sqrt{PD^2-ED^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$．

又 $\because$ 在 $\triangle PEF$ 中，$PE=\sqrt{3}$，$PF=1$，$EF=2$，

满足 $PE^2+PF^2=EF^2$，$\therefore \triangle PEF$ 是直角三角形．

因此，$\mathrm{Rt}\triangle PEG\backsim\mathrm{Rt}\triangle FEP$．

三角形相似判断定理：两个直角三角形有一个公共锐角

从而 $\dfrac{PG}{PE}=\dfrac{PF}{EF}$，即 $PG=\dfrac{PF}{EF}\cdot PE=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

同理可得：$EG=\dfrac{EP}{EF}\cdot PE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{3}{2}$，故点 $P\left(1,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，即 $\overrightarrow{DP}=\left(1,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又∵平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{GP}=\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$$\therefore \sin\angle PDG=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{PG}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{PG}\right|}{\left|\overrightarrow{DP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PG}\right|}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

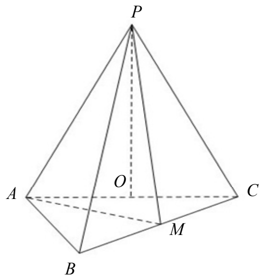


图 16.85

例 16.51（甲 1870-2）如图 16.85 所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=BC=2\sqrt{2}$，$PA=PB=PC=AC=4$，O 为 AC 的中点，且 $PO\perp$ 平面 ABC．若点 M 在棱 BC 上，且二面角 $M-PA-C$ 为 $30°$，求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.

解析：∵ $PO\perp$ 平面 ABC，∴ $PO\perp AC$，$BO\perp AC$.

可以 O 为坐标原点，以 $\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴的正方向，以 $\overrightarrow{OC}$ 的方向为 y 轴的正方向，建立如图 16.86 所示的空间直角坐标系 $O-xyz$．故 $O(0,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$.

又∵题设二面角 $M-PA-C$ 为 $30°$，

∴连接 MA 则平面 MPA 与平面 CPA 的夹角为 $30°$．　目的是构造平面 MPA

又∵要求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值，

∴需求 PC 与平面 PAM 的法向量所成角的余弦值．　线面夹角问题转化为线线夹角问题

∵已知：$P(0,0,2\sqrt{3})$，$C(0,2,0)$，

∴ $\overrightarrow{PC}=(0,2,-2\sqrt{3})$.　相同维度 C 点坐标减去 P 点坐标

因此，问题的关键在于确定平面 PAM 的法向量.

∵题设 M 在棱 BC 上，∴设点 $M(x_0,y_0,0)$，且过点 M 作 $MN\perp x$ 轴.

由 $\mathrm{Rt}\triangle MNB\backsim\mathrm{Rt}\triangle COB$ 可得：$\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{2-x_0}{2}$，即 $y_0=2-x_0$，即点 $M(x_0,2-x_0,0)$，因此 $\overrightarrow{AM}=(x_0,4-x_0,0)$，且 $\overrightarrow{AP}=(0,2,2\sqrt{3})$.　由 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 是等腰直角三角形可得

设平面 PAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则由 $\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 和 $\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 可得：$\begin{cases}0\cdot x+2y+2\sqrt{3}z=0\\x_0x+(4-x_0)y+0\cdot z=0\end{cases}$，为便于计算，可以取 $z=-\sqrt{3}x_0$，代入 $2y+2\sqrt{3}z=0$ 可得：$y=3x_0$.

将 $y=3x_0$，$z=\sqrt{3}x_0$ 代入 $x_0x+(4-x_0)y+0\cdot z=0$ 可得：$x=\dfrac{x_0-4}{x_0}y=3x_0-12$，即取 $\boldsymbol{n}=(3x_0-12,3x_0,-\sqrt{3}x_0)$.

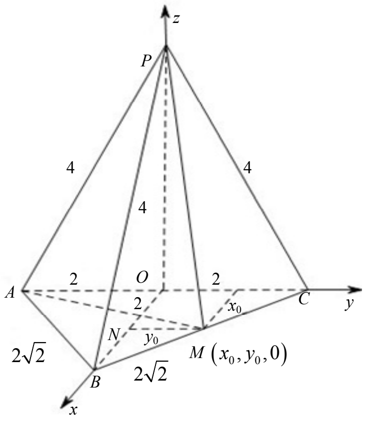


图 16.86

又∵平面 PAC 的法量为 $\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$.

$$\therefore \cos\left\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\right\rangle=\frac{2\times(3x_0-12)+0+0}{2\sqrt{(3x_0-12)^2+9x_0^2+3x_0^2}}=\frac{3x_0-12}{\sqrt{21x_0^2-72x_0+144}}.$$

又∵ $\cos\left\langle\overrightarrow{OB},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $\dfrac{3x_0-12}{\sqrt{21x_0^2-72x_0+144}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

两边平方可得：$4\cdot\left(3x_0-12\right)^2=3\cdot\left(21x_0^2-72x_0+144\right)$．化简可得：$12\left(x_0-4\right)^2=21x_0^2-72x_0+144$，即 $3x_0^2+8x_0-16=0$，可得：$x_0=\dfrac{-8\pm16}{6}$，解得：$x_0=\dfrac{-8-16}{6}=-4<0$（∵题设 $0<x_0<2$，∴舍去），或 $x_0=\dfrac{-8+16}{6}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$．

因此，$\boldsymbol{n}=\left(3x_0-12,3x_0,-\sqrt{3}x_0\right)=\left(-8,4,-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$．

又∵已知 $\overrightarrow{PC}=\left(0,2,-2\sqrt{3}\right)$，∴ $\cos\left\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

即 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

例 16.52（丙 1869-2）如图 16.87 所示，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，M 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 C，D 的点，平面 $AMD\perp$ 平面 BMC，当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时，求面 MAB 与面 MCD 所成二面角的正弦值．

本书连接了 MC

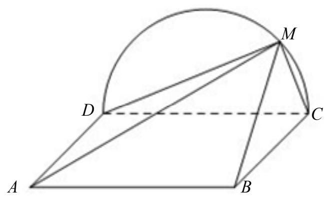


图 16.87

解析 1：如图 16.88 所示，连接 AC，构造三棱锥 $M-ABC$．由于三棱锥 $M-ABC$ 的底面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$ 是一定的，因此，只有当其高最大时，体积才能取得最大值．由图可见：当点 M 位于半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的顶点时，三棱锥的体积最大．

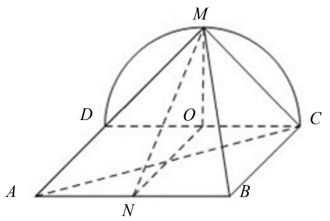


图 16.88

在 Rt△OMN 中，∵ $\left|OM\right|=1$，$\left|ON\right|=2$，

∴由勾股定理可得：$\left|MN\right|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$．

又∵ $\angle NMO$ 即为所求二面角，∴ $\sin\angle NMO=\dfrac{\left|ON\right|}{\left|MN\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

解析 2：如图 16.89 所示，以半圆的圆心为坐标原点建立空间直角坐标系．

∵题设 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，

∴ $A\left(2,-1,0\right)$，$B\left(2,1,0\right)$，$C\left(0,1,0\right)$，$D\left(0,-1,0\right)$，且当 $M\left(0,0,1\right)$ 时，三棱锥 $M-ABC$ 的体积最大．

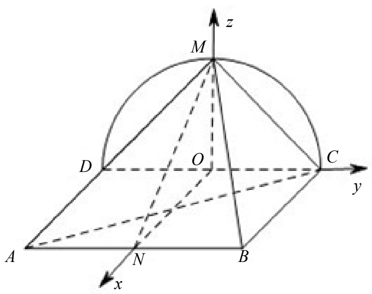


图 16.89

又∵ $\overrightarrow{MA}=\left(2,-1,-1\right)$，$\overrightarrow{MB}=\left(2,1,-1\right)$，且设平面 MAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}\left(x_1,y_1,z_1\right)$，则由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MA}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MB}=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}2x_1-y_1-z_1=0\\ 2x_1+y_1-z_1=0\end{cases}$，

可取 $\boldsymbol{m}=\left(1,0,2\right)$．

又∵ $\overrightarrow{MC}=\left(0,1,-1\right)$，$\overrightarrow{MD}=\left(0,-1,-1\right)$，且设平面 MCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}\left(x_2,y_2,z_2\right)$，则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MD}=0\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}0\cdot x_2+y_2-z_2=0\\ 0\cdot x_2-y_2-z_2=0\end{cases}$，

可取 $\boldsymbol{n}=\left(1,0,0\right)$．

∵ $\cos\left\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\right\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\boldsymbol{m}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=\dfrac{1\times1+0\times0+2\times0}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

∴ $\sin\left\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\right\rangle=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{20}}{5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

第 17 题　数列背景

17

背景知识

数列的相关概念

数列的定义：按照一定次序排列的一列数叫做数列，数列中的每一个数叫做数列的一项，各项依次叫做这个数列的第 1 项，第 2 项，……，第 n 项，数列通常用符号 $\{a_n\}$ 表示．

数列的分类：按数列的项数可以分为有穷数列和无穷数列；按数列各项的大小关系可以分为递增数列、递减数列、常（数）数列和摆动数列．

数列的表示：用函数的观点来看，数列可以看成是以正整数集合 $\mathbf{N}^*$（或其有限子集 $\{1,2,3,\cdots,n\}$）为定义域的不连续函数，数列与函数一样可以用解析法、图像法和列表法三种方式来表示．

数列的通项公式：如果数列的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子 $a_n=f(n)$ 来表示，那么这个式子叫做这个数列的通项公式．

数列的递推公式：如果已知数列 $\{a_n\}$ 的首项（或前几项），且任意一项 a_n 与它的前一项 $a_{n-1}(n\geqslant 2)$（或前几项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个式子叫做这个数列的递推公式．

数列的前 n 项和：设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 且 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$．

等差数列的相关概念

等差数列的定义：如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列．这个常数叫做等差数列的公差，公差通常用字母 d 表示，公差的表达式为 $d=a_n-a_{n-1}\left(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}^*\right)$．

等差数列的通项公式：如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，那么该数列的第 n 项（即通项公式）为 $a_n=a_1+(n-1)d$．如果将等差数列的第 m 项“视”为第 1 项，那么该等差数列的第 n 项为 $a_n=a_m+(n-m)d\left(m,\ n\in\mathbf{N}^*\right)$．

等差数列的中项：等差数列从第二项开始，任意一项都等于它前后两项的算术平均数．

等差数列的前 n 项和：$S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$．

等比数列的相关概念

等比数列的定义：如果一个（非零）数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个（非零）常数，那么这个数列就叫做等比数列．这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母 q 表示，公比的定义公式为 $q=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\left(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}^*\right)$．

等比数列的通项公式：如果等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q，那么该数列的第 n 项（即通项公式）为 $a_n=a_1q^{n-1}$．如果将等比数列的第 m 项“视”为第 1 项，那么第 n 项为 $a_n=a_mq^{n-m}\left(m,\ n\in\mathbf{N}^*\right)$．

等比（数列的）中项：等比数列从第二项开始，任意一项的平方都等于它前后两项的乘积；对于非负等比数列，任意一项都等于它前后两项的几何平均数．

等比数列的前 n 项和：$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 1)$

问题 1 求数列指定项

问题分析：对于求数列指定项问题，关键是要确定首项及公差或公比.

条件 1.1 给定公差（公比）及若干项之和

条件分析：当给定公差（公比）及若干项之和时，往往要利用数列的前n项和公式求出数列的首项.

例 17.1 （甲 1753）我国古代数学名著《算法统宗》中有如下问题："远望巍巍塔七层，红光点点倍加增，共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？"意思是：一座 7 层塔共挂了 381 盏灯，且相邻两层中的下一层灯数是上一层灯数的 2 倍，则塔的顶层共有灯（ ）.

A．1 盏　　B．3 盏　　C．5 盏　　D．9 盏

解析：设塔的顶层共有 x 盏灯，则各层的灯数构成一个首项为 x，公比为 2 的等比数列，结合等比数列的前 n 项和公式有：$\dfrac{x\left(1-2^7\right)}{1-2}=381$，解得：$x=3$，即塔的顶层共有灯 3 盏，故选 B，不选 ACD.

条件 1.2 给定数列某项及前若干项和

条件分析：当给定数列某项及前若干项之和时，往往利用数列的通项公式和前n项和公式列方程组求解.

例 17.2 （乙 1653）已知等差数列$\{a_n\}$的前 9 项和为 27，$a_{10}=8$，则$a_{100}=$（ ）.

A．100　　B．99　　C．98　　D．97

解析 1：设等差数列的首项为a_1，公差为d，则由"前 9 项和为 27"，并利用等差数列前n项和公式 $S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$ 可得：$9a_1+36d=27$.　①

由"$a_{10}=8$"，并利用等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 可得：$a_1+9d=8$.　②

联立①②两式可得：$\begin{cases}9a_1+36d=27\\ a_1+9d=8\end{cases}$.

①–4×②可得：$5a_1=-5$，解得：$a_1=-1$.

–9×②可得：$36d-81d=27-72$，解得：$d=1$.

最后由等差数列通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 可得：$a_{100}=-1+(100-1)\times1=98$，故选 C，不选 ABD.

解析 2：∵ $S_9=27$，$a_{10}=8$，∴ $S_{10}=S_9+a_{10}=27+8=35$，　利用前 n 项和的定义将条件转化

由等差数列前 n 项和公式 $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ 可得：$\frac{10}{2}\times(a_1+8)=35$，解得：$a_1=-1$.

再由等差数列通项公式或公差定义可得：$d=\dfrac{a_{10}-a_1}{10-1}=\dfrac{8+1}{9}=1$.

最后由等差数列通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 可得：$a_{100}=-1+(100-1)\times1=98$，故选 C，不选 ABD.

条件 1.3 给定公差（公比）及若干项和关系式

条件分析：当给定数列公差（公比）及若干项和关系式时，往往利用数列的若干项和关系式列方程求解.

例 17.3 （乙 1507）已知$\{a_n\}$是公差为 1 的等差数列，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，若$S_8=4S_4$，则$a_{10}=$（ ）.

A．$\dfrac{17}{2}$　　B．$\dfrac{19}{2}$　　C．10　　D．12

解析：∵题设公差 $d=1$，∴设等差数列的首项为a_1.

由等差数列前n项和公式：$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right]=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$ 可得：$S_4=4a_1+6$，

$S_8=8a_1+28$，代入题设 $S_8=4S_4$，可得：$8a_1+28=16a_1+24$，解得：$a_1=\frac{1}{2}$，因此，由等差数列通项公式可得：$a_{10}=a_1+9d=9\frac{1}{2}=\frac{19}{2}$．故选 B，不选 ACD．

例 17.4　（乙 1854）记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．若 $3S_3=S_2+S_4$，$a_1=2$，则 $a_5=$（　）．

A．-12　　B．-10　　C．10　　D．12

分析：∵题设等差数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1=2$ 求 $a_5=?$，∴只能利用 $3S_3=S_2+S_4$ 列方程求公差 d．

解析 1：（用公式计算）

∵ $3S_3=S_2+S_4$ 中只包含 S_n，∴联想到 S_n 与 d 的相关公式：$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$．

由 $3S_3=S_2+S_4$ 和上述公式可得：$3\left(3a_1+\frac{1}{2}\times3\times2\times d\right)=2a_1+d+4a_1+6d$，即 $9a_1+9d=6a_1+7d$，化简可得：$3a_1+2d=0$，将 $a_1=2$ 代入可得：$d=-3$，从而 $a_5=a_1+4d=2+4\times(-3)=-10$．故选 C，不选 ABD．

解析 2：（用定义计算）

∵题设 $3S_3=S_2+S_4$，且由前 n 项和定义可得：$S_2=S_3-a_3$，$S_4=S_3+a_4$，代入 $3S_3=S_2+S_4$ 可得：$S_3=a_4-a_3$．

再由公差定义可得：$S_3=d$，另由等差数列定义可得：$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=d$，化简可得：$3a_1+2d=0$，将 $a_1=2$ 代入可得：$d=-3$，从而 $a_5=a_1+4d=2+4\times(-3)=-10$．故选 C，不选 ABD．

条件 1.4　给定数列递推公式及某项

条件分析：当给定数列递推公式及某项时，往往需要寻找所求项与所给项之间的关系．

例 17.5　（甲 1416）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$，$a_8=2$，则 $a_1=$_________．

解析：∵已知 $a_8=2$，求 a_1．　　问题意识

∴需要将 $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$ 化为 $1-a_n=\frac{1}{a_{n+1}}$，即 $a_n=1-\frac{1}{a_{n+1}}$．　　转换条件

将 $a_8=2$ 代入可得：$a_7=\frac{1}{2}$．　　函数思想

同理可得：$a_6=-1$，$a_5=2$，$a_4=\frac{1}{2}$，$a_3=-1$，$a_2=2$，$a_1=\frac{1}{2}$．

事实上，当计算出 $a_5=2=a_8$ 时，应该能发现这是一个周期为 3 的数列．　　归纳思想

因此，$a_1=a_4=a_7=\frac{1}{2}$．　　周期性质应用

> **经验总结**：当给定数列递推公式及某项时，可以先利用递推公式求出数列连续的若干项，从中发现数列的特点或者经过（类似 $+m$ 或 $\times n$ 等）处理之后的规律，再进一步进行计算．事实上，有些“变形后的”等差或等比数列也是这样“发现”的，而并非是直接通过“变换”递推公式发现的，只是在解答题中，需要在“发现”之后才来书写递推公式的“变换”过程．

例 17.6　（乙 1817-1）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$，设 $b_n=\frac{a_n}{n}$．求 b_1，b_2，b_3．

解析：∵题设 $b_n=\frac{a_n}{n}$，且 $a_1=1$，∴ $b_1=1$，　　代数运算

又∵题设 $na_{n+1}=2(n+1)a_n$，即 $a_{n+1}=\frac{2(n+1)a_n}{n}$，

$\therefore$当$n=1$时，$a_2=\dfrac{2(1+1)a_1}{1}=4a_1=4$，$b_2=\dfrac{a_2}{2}=\dfrac{4}{2}=2$；

当$n=2$时，$a_3=\dfrac{2(2+1)a_2}{2}=3a_2=12$，$b_3=\dfrac{a_3}{3}=\dfrac{12}{3}=4$．

条件 1.5　给定等比数列前指定项和与前两项的关系式及某项

条件分析：当给定等比数列前指定项和与前两项的关系式及某项时，往往需要借助关系式利用公式列方程求出公比，再根据所给数列的指定项利用已经求得的公比求首项.

例 17.7（甲 1353）等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_3=a_2+10a_1$，$a_5=9$，则$a_1=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{9}$　　D. $-\dfrac{1}{9}$

解析 1：（公式法）$\because$题设$S_3=a_2+10a_1$，设公比为q（显然$q\neq1$），则$a_2=a_1q$，$\therefore S_3=(q+10)a_1$．

$\because$等比数列$\{a_n\}$的前n项和S_n的计算公式为$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，$\therefore S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}$．

因此有$\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}=(q+10)a_1$，即$\dfrac{(1-q^3)}{1-q}=(q+10)$．

又$\because 1-q^3=(1-q)(1+q+q^2)$，$\therefore$上式化为：$1+q+q^2=q+10$，解得$q=\pm3$．

由$a_5=9$并利用等比数列通项公式可得：$a_1q^4=9$，将$q=\pm3$代入可得：$a_1=\dfrac{1}{9}$，故选 C，不选 ABD.

解析 2：（定义法）$\because$由前n项和定义可得：$S_3=a_3+a_2+a_1$，并且题设$S_3=a_2+10a_1$，

$\therefore a_3+a_2+a_1=a_2+10a_1$，即$a_3=9a_1$．

又$\because a_3=a_1q^2$，$\therefore$代入上式可得：$q^2=9$，再代入$a_5=9$可得：$a_1=\dfrac{1}{9}$．或由$a_3=9a_1$可得：$a_3^2=81a_1^2$．

又$\because a_1$，a_3，a_5也构成等比数列，$\therefore a_3^2=a_1a_5$，因此，$81a_1^2=a_1a_5$，解得：$a_1=\dfrac{a_5}{81}=\dfrac{9}{81}=\dfrac{1}{9}$．

故选 C，不选 ABD.

条件 1.6　给定等比数列的两个两项和关系式

条件分析：当给定等比数列的两个两项和关系式时，往往需要根据所给的两个关系式利用公式列方程组进行求解.

例 17.8（丙 1764）设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=-1$，$a_1-a_3=-3$，则$a_4=$________.

解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则利用等比数列通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$可得：

$$\begin{cases}a_1+a_2=a_1(1+q)=-1\\a_1-a_3=a_1(1-q^2)=-3\end{cases}.$$

从题设的两个条件就应该想到列方程组

$\because 1+q\neq0$，即$q\neq-1$，

$\therefore$两式相除可得：$q=-2$，代入可得：$a_1=1$．故由等比数列通项公式可得：$a_4=a_1q^3=1\times(-2)^3=-8$．

条件 1.7　给定数列任意相邻两项关系式

条件分析：当给定数列任意相邻两项关系式时，需要先对关系式进行化简，找出数列的递推关系式.

例 17.9（丙 1617-1）各项都为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$．求$a_2$，$a_3$．

解析：$\because$题设$a_n^2-(2a_{n+1}-1)a_n-2a_{n+1}=0$，$\therefore a_n^2+a_n-2a_{n+1}(a_n+1)=0$，即$2a_{n+1}(a_n+1)=a_n(a_n+1)$．

$\because$ 题设 $a_n>0$，$\therefore (a_n+1)>0$，两边同除以 (a_n+1) 可得：$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$.

又 $\because$ 题设 $a_1=1$，$\therefore a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}$，$a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

例 17.10（甲 1509）已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{4}$，$a_3a_5=4(a_4-1)$，则 $a_2=$（　　）.

A．2　　B．1　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{8}$

解析：$\because$ 由等比中项公式可得：$a_3a_5=a_4^2$，且题设 $a_3a_5=4(a_4-1)$.

$\therefore a_4^2=4(a_4-1)$，解得：$a_4=2$.

又 $\because a_1=\frac{1}{4}$，$a_4=2$，$\therefore$ 由等比数列通项公式可得：$q^3=\frac{a_4}{a_1}=8$，解得：$q=2$.

再由等比数列通项公式可得：$a_2=a_1q=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$.

故选 C，不选 ABD.

条件 1.8　给定数列的函数解析式

条件分析：当给定数列的函数解析式时，需要利用解析式进行计算.

例 17.11（甲 1667-1）S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1$，$S_7=28$．记 $b_n=[\lg a_n]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如[0.9] = 0，[lg99]=1．求 b_1，b_{11}，b_{101}.

解析：$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1=1$，$S_7=28$.

$\therefore$ 由等差数列的前 n 项和公式 $S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$ 可得：$7a_1+\frac{1}{2}\times 7\times 6d=28$，解得：$d=1$.

因此，$a_n=a_1+(n-1)d=n$.

又 $\because b_n=[\lg a_n]$，$\therefore b_n=[\lg n]$，故 $b_n=\begin{cases}0, & 1\leqslant n\leqslant 9\\ 1, & 10\leqslant n\leqslant 99\\ 2, & 100\leqslant n\leqslant 999\\ 3, & 1000\leqslant n\leqslant 9999\\ \cdots & \end{cases}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

从而 $b_1=[\lg 1]=0$，$b_{11}=[\lg 11]=1$，$b_{101}=[\lg 101]=2$.

问题 2　求数列的前指定项和

问题分析：当需要求数列的前指定项和时，关键是要确定数列的类型和基本条件.

条件 2.1　给定等差数列连续间隔的三项和

条件分析：当给定等差数列连续间隔的三项和时，需要利用数列的性质进行计算.

例 17.12（甲 1505）设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1+a_3+a_5=3$，则 $S_5=$（　　）.

A．5　　B．7　　C．9　　D．11

解析 1：（公式法）$\because$ 题设 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 是等差数列，

$\therefore a_1$，a_3，a_5 也是等差数列.　　等差数列中间隔相等的各项也是等差数列

由等差中项公式可得：$a_1+a_5=2a_3$，代入 $a_1+a_3+a_5=3$ 可得：$3a_3=3$，解得：$a_3=1$，代回 $a_1+a_3+a_5=3$ 可得：$a_1+a_5=2$，由 $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ 可得：$S_5=\frac{5}{2}(a_1+a_5)=\frac{5}{2}\times 2=5$.

解析 2：（定义法）$\because a_1$，a_2，a_3，a_4，a_5是等差数列，

$\therefore$设$a_1=a_3-2d$，$a_2=a_3-d$，$a_4=a_3+d$，$a_5=a_3+2d$．

又$\because a_1+a_3+a_5=3$，$\therefore 3a_3=3$，解得：$a_3=1$，且$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3=5$．

等差数列前奇数项和等于项数乘以中间项

故选 A，不选 BCD．

> 等差数列性质：
>
> ①设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_m,a_{m+k},a_{m+2k},\cdots$也是等差数列，公差为$kd$．
>
> ②若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$．当$m+n=2p$时，$a_m+a_n=2a_p$．
>
> ③数列$S_m,(S_{2m}-S_m),(S_{3m}-S_{2m}),\cdots$也是等差数列．
>
> ④$S_{2n-1}=\dfrac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}=\dfrac{(2n-1)(a_1+a_1+(2n-2)d)}{2}=(2n-1)a_n$．

条件 2.2　给定等差数列首项及某三项成等比数列

条件分析：当给定等差数列的首项及某三项成等比数列时，关键是利用成等比数列的三项建立关于公差d的一元二次方程，然后通过解一元二次方程求得公差，并借助其他条件确定公差．

例 17.13　（丙 1759）等差数列$\{a_n\}$的首项为 1，公差不为 0．若a_2,a_3,a_6成等比数列，则$\{a_n\}$前 6 项的和为（　）．

A．-24　　B．-3　　C．3　　D．8

解析：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由a_2，a_3，a_6成等比数列可得：$a_3^2=a_2a_6$，即由等差数列通项公式可得：$(1+2d)^2=(1+d)(1+5d)$．化简可得：$d^2+2d=0$．

$\because d\neq 0$，$\therefore$解得：$d=-2$．因此，由等差数列的前n项和公式可得：$S_6=6a_1+\dfrac{6\times(6-1)}{2}d=6\times1+15\times(-2)=-24$．故选 A，不选 BCD．

例 17.14　（甲 1717-2）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，若$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=2$，$T_3=21$，求S_3．

解析：$\because$题设$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，$\therefore$设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为q．

$\because$题设：$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=2$，$\therefore$由等差数列和等比数列的通项公式可得：$a_2=a_1+d$，$b_2=b_1q$，代入$a_2+b_2=2$可得：$-1+d+q=2$，即$d+q=3$．　①

又$\because$题设$T_3=21$，$\therefore 1+q+q^2=21$，即$q^2+q-20=0$，解得：$q_1=-5$，$q_2=4$．

当$q_1=-5$时，代入①式可得：$d=8$，由等差数列前n项和公式$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$可得：$S_3=3\times(-1)+\dfrac{3\times2}{2}\times8=21$．

当$q_2=4$时，代入①式可得：$d=-1$，由等差数列前n项和公式$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$可得：$S_3=3\times(-1)+\dfrac{3\times2}{2}\times(-1)=-6$．

> **经验总结：**在解决等差、等比数列的混合运算问题时，有两种处理思路：一是，利用基本量，将多元问题简化为一元问题，虽有一定量的运算，但思路简洁，目标明确；二是，采用巧用性质、整体考虑、减少运算量的方法．

条件 2.3　给定数列的解析式

条件分析：当给定数列的解析式时，关键是要发现数列的规律.

例 17.15（甲 1617-2）已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}n$，设$b_n=[a_n]$，求数列$\{b_n\}$的前 10 项和，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数，如[0.9] =0，[2.6]=2.

解析 1：（直接计算）∵题设$b_n=[a_n]$，∴$b_n=\left[\frac{3}{5}+\frac{2}{5}n\right]$.

令$n=1$，2，3，…，10，分别计算出b_1，b_2，…，b_{10}，最后再求和，为此可列表 17.1.

表 17.1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}n$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{19}{5}$	$\frac{21}{5}$	$\frac{23}{5}$
b_n	1	1	1	2	2	3	3	3	4	4

即$b_n=\left[\frac{3}{5}+\frac{2}{5}n\right]=\begin{cases}1，1\leqslant n\leqslant 3\\2，4\leqslant n\leqslant 5\\3，6\leqslant n\leqslant 8\\4，9\leqslant n\leqslant 10\\\cdots\end{cases}$，$n\in\mathbf{N}^*$. 所以$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=3\times1+2\times2+3\times3+2\times4=24$.

解析 2：（间接计算）令$n=m+1$，则$b_n=\left[\frac{3}{5}+\frac{2}{5}n\right]=\left[1+\frac{2}{5}m\right]=1+\left[\frac{2}{5}m\right]$.

若令$b_m=\left[\frac{2}{5}m\right]$，则当$m=0$，1，2，…，9 时即为所求，且当$m$每增加 2.5 后$b_m$增加 1.

因此，当$0\leqslant m\leqslant2$时，$b_m=0$；当$3\leqslant m\leqslant4$时，$b_m=1$；当$5\leqslant m\leqslant7$时，$b_m=2$；当$8\leqslant m\leqslant9$时，$b_m=3$.

∴$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=10\times1+3\times0+2\times1+3\times2+2\times3=24$.

例 17.16（乙 1864）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和．若$S_n=2a_n+1$，则$S_6=$________.

解析：∵数列$\{a_n\}$是一个“未知数列”，∴首先必须确定数列的性质或通项公式.

又∵题设$S_n=2a_n+1$，∴从前n项和定义可得：$a_n=S_n-S_{n-1}$，　　用概念进行字符运算

即$a_n=(2a_n+1)-(2a_{n-1}-1)$，亦即：$a_n=2a_{n-1}$，从而$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$.　　用定义推理：等比数列

为了计算S_6，还需要知道a_1.　　由公式确定算理

再由$S_n=2a_n+1$可得：当$n=1$时，$S_1=2a_1+1$.　　条件运算：利用题设条件进行运算

由于$S_1=a_1$，因此$a_1=2a_1+1$，解得：$a_1=-1$.　　用概念进行字符运算

综上所述，数列$\{a_n\}$是首项为-1，公比为2 的等比数列．因此，由等比数列前n项和公式可得：$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{-1(1-2^6)}{1-2}=1-2^6=-63$.

例 17.17（甲 1667-2）已知数列$\{b_n\}$的表达式为$b_n=\begin{cases}0，1\leqslant n\leqslant 9\\1，10\leqslant n\leqslant 99\\2，100\leqslant n\leqslant 999\\3，1000\leqslant n\leqslant 9999\\\cdots\end{cases}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{b_n\}$的前1 000 项和.

解析：$\because b_n=\begin{cases}0，1\leqslant n\leqslant 9\\ 1，10\leqslant n\leqslant 99\\ 2，100\leqslant n\leqslant 999\\ 3，1000\leqslant n\leqslant 9999\\ \cdots\end{cases}$，$\therefore$数列$\{b_n\}$的前1 000项和为$9\times0+90\times1+900\times2+1\times3=1893$.

问题3 求数列的若干项和

问题分析：求数列的若干项和的关键是要确定数列的类型、首项，以及公差或公比.

条件3.1 给定等比数列首项及前三个奇数项的和

条件分析：当给定等比数列首项及前三个奇数项的和时，关键是利用给定的条件确定等比数列的公比.

例 17.18 （甲 1554）等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$a_1+a_3+a_5=21$，则$a_3+a_5+a_7=$（ ）.

A．21　　B．42　　C．63　　D．84

解析：$\because$题设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$，$\therefore$设公比为q，则由$a_1+a_3+a_5=21$可得：$a_1+a_1q^2+a_1q^4=21$，将$a_1=3$代入可得：$q^4+q^2-6=0$，解得：$q^2=2$.

所以$a_3+a_5+a_7=a_1q^2+a_1q^4+a_1q^6=a_1\left(q^2+q^4+q^6\right)=3\times(2+4+8)=42$；或$a_3+a_5+a_7=a_1q^2+a_3q^2+a_5q^2=\left(a_1+a_3+a_5\right)q^2=21\times2=42$，故选B，不选ACD.

问题4 求数列的项数

问题分析：求数列项数问题的关键是要确定数列的类型、首项，以及公差或公比.

条件4.1 给定数列首项、递推公式及前若干项和

条件分析：当给定数列的首项、递推公式及前若干项和时，关键是利用递推公式确定数列的类型或特征.

例 17.19 （乙 1513）在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，S_n为$\{a_n\}$的前n项和．若$S_n=126$，则$n=$__________.

解析：$\because$题设$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，$\therefore\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$．因此，数列$\{a_n\}$是以2为首项，公比为2的等比数列.

又$\because$题设$S_n=126$，$\therefore$由等比数列前n项和公式可得：$a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}=126$．即$2\times\dfrac{1-2^n}{1-2}=126$，亦即$2^{n+1}-2=126$，化简可得：$2^{n+1}=128=2^7$，解得：$n=6$.

例 17.20 （丙 1817-2/67-2）等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$q=\pm2$，S_n为$\{a_n\}$前n项和．若$S_m=63$，求m.

解析：由等比数列前n项和公式$S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$，及$a_1=1$，$S_m=63$可得：

当$q=2$时，$\dfrac{1-2^m}{1-2}=63$，即$2^m=64$，解得：$m=6$．当$q=-2$时，$\dfrac{1-(-2)^m}{1-(-2)}=63$，化简可得：$(-2)^m=-188$（无解）．综上所述，$m=6$.

条件 4.2 给定等差数列三个连续的前若干项和

条件分析：当给定等差数列的三个连续的前若干项和时，关键是利用递推公式确定数列的类型或特征.

例 17.21 （乙 1357）设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，则$m=$（ ）.

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

解析：$\because S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$\therefore a_m=S_m-S_{m-1}=2$.　根据前 n 项和与通项公式确定

又$\because S_m=0$，$S_{m+1}=3$，$\therefore a_{m+1}=S_{m+1}-S_m=3$，$d=a_{m+1}-a_m=3-2=1$.　利用等差数列公差的定义

又$\because S_m=0$，$\therefore \frac{m}{2}(a_1+a_m)=0$，解得：$a_1=-a_m=-2$.　利用等差数列前 n 项和公式

再由$a_m=2$，可得：$a_1+(m-1)d=2$.　利用等差数列的通项公式

即$-2+m-1=2$，解得：$m=5$.　列方程求解

故选 C，不选 ABD.

问题 5 求数列公差（公比）

问题分析：求数列的公差或公比的关键是要确定数列的类型及相邻的两项.

条件 5.1 给定数列连续两项和及前若干项和

条件分析：当给定数列连续两项和及前若干项和时，既可以根据这两个和运用相关公式列方程组求解，也可以根据这两项和的特征利用数列的性质来解决问题.

例 17.22 （乙 1754）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和．若$a_4+a_5=24$，$S_6=48$，则$\{a_n\}$的公差为（ ）.

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

解析 1：（利用基本条件列方程组）设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，则由$a_4+a_5=24$可得：$a_1+3d+a_1+4d=24$，即$2a_1+7d=24$.　①　基于等差数列通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$

再由$S_6=48$可得：$6a_1+\frac{6\times5}{2}d=48$，即$6a_1+15d=48$.　②

基于等差数列前 n 项和公式：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

3×①-②可得：$21d-15d=72-48$，即$6d=24$，解得：$d=4$．故选 C，不选 ACD.

解析 2：（利用数列性质列方程组）

由$S_6=48$可得：$\frac{6}{2}(a_1+a_6)=48$.　基于等差数列前 n 项和公式：$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

再利用等差数列性质可得：$a_1+a_6=a_2+a_5=a_3+a_4$，代入上式可得：$a_3+a_4=16$.

联立$\begin{cases}a_4+a_5=24\\a_3+a_4=16\end{cases}$，两式相减可得：$a_5-a_3=8$.

再利用等差数列公差的定义$a_5-a_3=2d$可得：$2d=8$，解得：$d=4$．故选 C，不选 ACD.

> **经验总结：**在解决等差数列或等比数列的“两个条件”问题时，有两种解题思路：一是，利用“两个条件”列基本量的二元一次方程组，虽有一定的运算量，但思路简洁，目标明确；二是，采用巧用数列性质、整体考虑所求目标、尽量减少运算量的方法.

条件 5.2 给定数列首项、通项与前 n 项和关系式

条件分析：当给定数列首项、通项与前 n 项和关系式时，可以从两者的关系式出发利用$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$

解决问题.

例 17.23 （乙 1467-1）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，其中λ为常数．证明：$a_{n+2}-a_n=\lambda$．

证明：$\because$ 题设$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，　①

$\therefore a_{n+1}a_{n+2}=\lambda S_{n+1}-1$．　②

②–①可得：$a_{n+1}\left(a_{n+2}-a_n\right)=\lambda\left(S_{n+1}-S_n\right)$．

又$\because S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$，　数列前$n$项和定义

$\therefore a_{n+1}\left(a_{n+2}-a_n\right)=\lambda a_{n+1}$．

又$\because a_n\neq 0$，$\therefore a_{n+1}\neq 0$，两边同除以a_{n+1}，可得：$a_{n+2}-a_n=\lambda$．

条件 5.3　给定“复合”数列各项

条件分析：当给定“复合”数列（即数列的诸多项又构成新的数列）时，关键在于弄清楚原始数列的哪几项构成怎样的数列，进而利用这个“新”的数列来解决问题.

例 17.24 （乙 1762）几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件．为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动．这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列 1，1，2，1，2，4，1，2，4，8，1，2，4，8，16，…，其中第一项是2^0，接下来的两项是2^0，2^1，再接下来的三项是2^0，2^1，2^2，以此类推．求满足如下条件的最小整数N：$N>100$且该数列的前N项和为 2 的整数幂．那么该款软件的激活码是（　）.

A．440　　B．330　　C．220　　D．110

解析：由题意可知：该数列可以看成是由若干组“数列”组成的数列，其中第一组有 1 项，第二组有 2 项，第三组有 3 项，以此类推，且第k组的各项依次为$2^0,2^1,2^2,\cdots,2^{k-1}$．

因此，前k组共有$1+2+\cdots+k=\dfrac{k\left(k+1\right)}{2}$项.

由于每一组都是以“1”为首项，“2”为公比的等比数列，因此，第k组的各项和为$S_k=a_1\dfrac{1-q^k}{1-q}=1\times\dfrac{1-2^k}{1-2}=2^k-1$，即$S_k+1=2^k$，因此$\left(S_k+1\right)$又构成了以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

所以$\sum\limits_{k=1}^{k}\left(S_k+1\right)=2\times\dfrac{\left(1-2^k\right)}{\left(1-2\right)}=2^{k+1}-2$，即$k+\sum\limits_{k=1}^{k}S_k=2^{k+1}-2$．

从而$\sum\limits_{k=1}^{k}S_k=2^{k+1}-k-2$，由题意，由$k$组数列的项数$\dfrac{k\left(k+1\right)}{2}>100$可得：$k\left(k+1\right)>200$．

$\because k>0$，$\therefore$解得：$k\geqslant 14$．令$S\left(k\right)=\sum\limits_{k=1}^{k}S_k=2^{k+1}-\left(k+2\right)$，则为了确保$S\left(k\right)=\sum\limits_{k=1}^{k}S_k=2^{k+1}-\left(k+2\right)$是 2 的整数幂，$k+2$必须是第$k+1$组等比数列 1，2，…，$2^k$的（前$t-1$项）部分和，设$k+2=1+2+\cdots+2^{t-1}=2^t-1$，所以$k=2^t-3\geqslant 14$，则$t\geqslant 5$，此时$k=2^5-3=29$．

所以对应满足条件的最小整数$N=\dfrac{29\times 30}{2}+5=440$，故选 A，不选 BCD.

> **经验总结**：本题非常巧妙地将数列融入实际问题之中，首先要明确题目所表达的准确含义，以及所给定数列的具体特征，进而判断出组成该数列的数列通项与前n项和．另外，构成新数列的前n项和又构成了一个新的数列，这类似于函数的函数（复合函数）构成了“复合”函数.

问题 6　求数列的通项公式

问题分析：求数列的通项公式问题实际上是求数列的取值 a_n 与项数 n 的函数关系式.

条件 6.1　给定等差（等比）数列的两个前指定项和

条件分析：当给定等差（等比）数列的两个前指定项和时，可以利用等差（等比）数列的前 n 项和公式列两个关于首项和公差（公比）的二元一次方程，通过解这个二元一次方程组来求解首项和公差（公比），最终确定等差（等比）数列的通项公式.

例 17.25（乙 1717-1）记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_2=2$，$S_3=-6$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析：∵题设 $S_2=2$，$S_3=-6$，

从题设条件出发思考解题思路

∴需要利用两个条件列方程组解决问题.

方程思想：借用前 n 项和公式列方程

设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q（$q\neq1$），

设数列的两个关键"量"作为方程组的变量

则由等比数列的前 n 项和公式 $S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ 可得：$\begin{cases}\dfrac{a_1\left(1-q^2\right)}{1-q}=2\\ \dfrac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}=-6\end{cases}$，即 $\begin{cases}a_1(1+q)=2\\ a_1\left(1+q+q^2\right)=-6\end{cases}$，

上式化简用到了公式：$1-q^3=(1-q)\left(1+q+q^2\right)$

事实上，根据等比数列的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 可得：$a_2=a_1q$，$a_3=a_1q^2$.

再利用前 n 项和的定义可得：$a_1+a_2=2$，$a_1+a_2+a_3=-6$，亦可直接得到：$\begin{cases}a_1(1+q)=2\\ a_1\left(1+q+q^2\right)=-6\end{cases}$，

两式相比消去 a_1 可得：$\dfrac{1+q}{1+q+q^2}=-\dfrac{1}{3}$，化简可得：$3+3q=-1-q-q^2$，即 $q^2+4q+4=0$，解得：$q=-2$.

代入 $a_1(1+q)=2$ 可得：$a_1=-2$.

因此，由等比数列通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$ 可得：$a_n=-2\times(-2)^{n-1}=(-2)^n=(-1)^n2^n$.

例 17.26（乙 1317-1）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_3=0$，$S_5=-5$. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由等差数列通项公式及前 n 项和公式可得：$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，

将 $S_3=0$，$S_5=-5$ 代入上式可得：$\begin{cases}3a_1+3d=0\\ 5a_1+10d=-5\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=1\\ d=-1\end{cases}$.

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n=a_1+(n-1)d=2-n$.

例 17.27（甲 1817-1/67-1）记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=-7$，$S_3=-15$. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

分析：∵题设等差数列 $\{a_n\}$ 的 $a_1=-7$，$S_3=-15$，∴想到利用等差数列前 n 项和公式.

解析 1：①由等差数列前 n 项和公式 $S_n=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d$ 列关于公差 d 的方程.

当 $n=3$ 时，$3a_1+\dfrac{1}{2}\times3\times(3-1)d=-15$. 将 $a_1=-7$ 代入，并化简可得：$3d=6$，解得：$d=2$.

解析 2：由等差数列前 n 项和公式 $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)}{2}n$ 先求出 a_3，再由通项公式求公差 d.

当 $n=3$ 时，$\dfrac{(a_1+a_3)}{2}\times3=-15$. 将 $a_1=-7$ 代入，解得：$a_3=-3$.

等差数列通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，将 $n=3$，$a_1=-7$，$a_3=-3$ 代入，求得：$d=2$. 或由公差的定义可得：$d=\dfrac{a_3-a_1}{2}=\dfrac{-3+7}{2}=2$.

根据从 a_1 到 a_3 之间存在两个公差直接计算

因此，等差数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=-7+(n-1)\times 2=2n-9$.

通项公式

条件 6.2 给定等差数列的公差及与另一数列的关系式

条件分析：当给定等差数列的公差及与另一数列的关系式时，关键是利用所求数列与另一数列的关系式确定数列的首项.

例 17.28 （乙 1617-1）已知$\{a_n\}$是公差为 3 的等差数列，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$．求$\{a_n\}$的通项公式.

解析：∵已知$\{a_n\}$是公差为 3 的等差数列，

∴欲求$\{a_n\}$的通项公式，只要知道a_1即可.

目标要明确

∵题设$b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$，

从题设条件出发

∴将$n=1$代入$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$，可得：$a_1b_2+b_2=b_1$.

取$n=1$目标是为了产生a_1

再将$b_1=1$，$b_2=\frac{1}{3}$ 代入上式可得：$\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3}=1$，

观察可见：此式中b_1，b_2均已知

建立一元一次方程

解得：$a_1=2$，故$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=a_1+(n-1)d=2+3(n-1)=3n-1$.

条件 6.3 给定数列的前 n 项和与通项的关系式

条件分析：当给定数列的前n项和与通项的关系式时，关键是要利用$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geqslant 2)$，来确定数列通项的递推公式，从而确定数列的类型.

例 17.29 （乙 1364）若数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=$ ______.

解析：∵ $S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，∴当$n=1$时，$a_1=\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}$，解得：$a_1=1$.

又∵ $a_n=S_n-S_{n-1}$，∴ $\frac{2}{3}(a_n-a_{n-1})=a_n$，即$a_n=-2a_{n-1}$，亦即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=-2$.

因此，数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为-2的等比数列．所以，$a_n=(-2)^{n-1}$.

例 17.30 （乙 1567-1）S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_n>0$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解析：∵题设$a_n^2+2a_n=4S_n+3$. ①

从题设条件出发

∴ $n\geqslant 2$时：$a_{n-1}^2+2a_{n-1}=4S_{n-1}+3$. ②

目的是出现S_{n-1}

①–②，并利用$S_n-S_{n-1}=a_n\ (n>1)$可得：$a_n^2-a_{n-1}^2+2(a_n-a_{n-1})=4a_n$，即$a_n^2-a_{n-1}^2=2(a_n+a_{n-1})$，利用平方差公式可得：$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1})$.

∵题设$a_n>0$，∴ $a_{n-1}>0$，$a_n+a_{n-1}>0$，从而$a_n-a_{n-1}=2\ (n>1)$.

又∵题设$a_n^2+2a_n=4S_n+3$，∴当$n=1$时，$S_1=a_1$，即$a_1^2+2a_1=4a_1+3$，亦即$a_1^2-2a_1-3=0$，解得：$a_1=3$或$a_1=-1$（∵题设$a_n>0$，故舍去）.

因此，数列$\{a_n\}$是首项为3，公差为 2 的等差数列，故通项公式为$a_n=3+(n-1)\times 2=2n+1$.

例 17.31 （丙 1667-1）已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=1+\lambda a_n$，其中$\lambda\neq 0$，$\lambda\neq 1$．证明$\{a_n\}$是等比数列，并求其通项公式.

证明：$\because S_n = 1+\lambda a_n$，　　①

$\therefore n\geqslant 2$ 时：$S_{n-1} = 1+\lambda a_{n-1}$．　　②

①–②可得：$S_n - S_{n-1} = \lambda\left(a_n - a_{n-1}\right)$．

又$\because S_n - S_{n-1} = a_n$，$\therefore a_n = \lambda\left(a_n - a_{n-1}\right)$，即 $\lambda a_{n-1} = (\lambda-1)a_n$，亦即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}(n\geqslant 2)$．

从而，当 $n\geqslant 1$ 时，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，因此，数列 $\{a_n\}$ 是以 $q=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$ 为公比的等比数列.

由等比数列通项公式：$a_n = a_1 q^{n-1}$ 可得：$a_n = \dfrac{1}{1-\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$．

经验总结：当题设条件出现参数（字母）时，如果所求证的问题与参数（字母）无关，只需将参数（字母）当作常数看待，将所求证的结果用该参数（字母）表示即可.

条件 6.4　给定等差数列的两项是一元二次方程的两个根

条件分析：当给定等差数列的两项是一元二次方程的两个根时，可先解一元二次方程求出此两项.

例 17.32　（乙 1417-1）已知 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列，a_2，a_4 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根．求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析：$\because \{a_n\}$ 是递增的等差数列，$\therefore a_4 > a_2$．

又$\because$方程 $x^2-5x+6=0$ 的两根分别为 2 和 3，并且题设数列 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列，

$\therefore a_2 = 2$，$a_4 = 3$．　　$a_2 < a_4$ 为递增的条件

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则根据等差数列的定义可得：$a_4 - a_2 = 2d$，解得：$d=\dfrac{a_4-a_2}{2}=\dfrac{3-2}{2}=\dfrac{1}{2}$，

又 $\because$ $a_2 = a_1 + d$，$\therefore$ $a_1 = a_2 - d = 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：$a_n = a_1 + (n-1)d = \dfrac{3}{2}+(n-1)\times\dfrac{1}{2} = 1+\dfrac{1}{2}n$．

条件 6.5　给定两个数列的首项及两个数列的某两项之和

条件分析：当给定两个数列的首项及两个数列的某两项之和时，可以利用两个数列的这两项之和建立对应公差（公比）的二元一次方程组，从而求出两个数列的公差（公比），最终确定所求数列的通项公式.

例 17.33（甲 1717-1）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-1$，等比数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1=1$，若 $a_2+b_2=2$，$a_3+b_3=5$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解析：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $a_n = -1+(n-1)d$，$b_n = q^{n-1}$．

由题设 $a_2+b_2=2$ 可得：$-1+d+q=2$，即 $d+q=3$．　　①

由题设 $a_3+b_3=5$ 可得：$-1+2d+q^2=5$，即 $2d+q^2=6$．　　②

①–①×2 可得：$q^2-2q=0$，解得：$q_1=2$，$q_2=0$（舍去），将 $q_1=2$ 代入①式可得：$d=1$．

因此，等比数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为：$b_n = 2^{n-1}$．

条件 6.6　给定同一个数列的两个两项和

条件分析：当给定同一个数列的两个两项和时，可以利用这两个两项和列出关于首项和公差（公比）的二元方程组，从而求出两个数列的首项和公差（公比），最终确定所求数列的通项公式.

例 17.34　（甲 1617-1）等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_4=4$，$a_5+a_7=6$．求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析 1：设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，则由通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$可得：$a_3=a_1+2d$，$a_4=a_1+3d$，$a_5=a_1+4d$，$a_7=a_1+6d$，代入题设条件：$a_3+a_4=4$，$a_5+a_7=6$可得：$\begin{cases}2a_1+5d=4\\2a_1+10d=6\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=1\\d=\dfrac{2}{5}\end{cases}$.

故所求数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}n$.

解析 2：$\because$数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_5+a_7=6$，$\therefore$由等差中项公式可得：$a_6=\dfrac{a_5+a_7}{2}=3$，$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=4+6+3=13$.

又$\because a_4+a_6=2a_5$，$a_3+a_7=2a_5$，$\therefore$代入上式可得：$5a_5=13$，解得：$a_5=\dfrac{13}{5}$.

因此，$d=a_6-a_5=3-\dfrac{13}{5}=\dfrac{2}{5}$，再利用$a_n=a_1+(n-1)d$可解得：$a_1=a_n-(n-1)d$.

将$a_5=\dfrac{13}{5}$或$a_6=3$及$d=\dfrac{2}{5}$代入$a_1=a_n-(n-1)d$可得：$a_1=1$.

故所求数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}n$.

条件 6.7 给定同一个数列的首项和递推公式

条件分析：当给定同一个数列的首项和递推公式时，关键是通过对递推公式进行适当的变形来确定数列的类型，进而求出“数列”的公差或公比.

例 17.35 （甲 1467-1）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1$. 证明：$\left\{a_n+\dfrac{1}{2}\right\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式.

证明 1：$\because a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$. $\therefore a_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3a_n+1+\dfrac{1}{2}=3a_n+\dfrac{3}{2}=3\left(a_n+\dfrac{1}{2}\right)$.

设$A_n=a_n+\dfrac{1}{2}$，则$A_{n+1}=3A_n$，故数列$\{A_n\}$是公比为 3 的等比数列，且首项$A_1=a_1+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，故$A_n=\dfrac{3}{2}\times3^{n-1}=\dfrac{3^n}{2}$，从而$a_n=A_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3^n-1}{2}$.

证明 2：$\because$题设$a_{n+1}=3a_n+1$呈线性递推关系，$\therefore$设$A_n=a_n+m(m\in\mathbf{R})$，则$A_{n+1}=a_{n+1}+m$，代入递推关系式可得：$A_{n+1}-m=3(A_n-m)+1$，即$A_{n+1}=3A_n-2m+1$.

为了构造等比数列$\{A_n\}$，令$-2m+1=0$可得：$m=\dfrac{1}{2}$，则$A_{m+1}=3A_m$，即$\dfrac{A_{n+1}}{A_n}=3$. 此时$A_n=a_n+m=a_n+\dfrac{1}{2}$，$A_1=a_1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，即数列$\{A_n\}$是以$\dfrac{3}{2}$为首项，公比为 3 的等比数列，且数列$\{A_n\}$的通项公式为$A_n=A_1q^{n-1}=\dfrac{3}{2}\times3^{n-1}=\dfrac{3^n}{2}$，即$a_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3^n}{2}$，解得：$a_n=\dfrac{3^n}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3^n-1}{2}$.

> **经验总结**：当遇到数列$\{a_n\}$的通项呈线性递推关系时，不妨设$A_{n+1}=a_{n+1}+m$，利用待定系数法确定参数 m，构造关于“$a_{n+1}+m$”的等比数列$\{a_n+m\}$. 证明 2 目的明确，易于推广.

例 17.36 （丙 1617-2）已知各项都为正数的数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$，求$\{a_n\}$的通项公式.

解析：$\because$已知$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$，即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore$数列$\{a_n\}$是首项为 1，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列.

因此，由等比数列的通项公式 $a_n = a_1q^{n-1}$ 可得：$a_n = 1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} = 2^{1-n}$.

例 17.37 （乙 1817-2）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$na_{n+1} = 2(n+1)a_n$，设 $b_n = \frac{a_n}{n}$，判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列并说明理由，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析：∵题设 $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$，∴ $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2\frac{a_n}{n}$，　将包含 n 与 $n+1$ 的"元素"分列两边

即 $b_{n+1} = 2b_n$，亦即 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$，因此，数列 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1 = 1$，公比 $q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ 的等比数列.

故通项为 $b_n = b_1q^{n-1} = 2^{n-1}$. 结合题设 $b_n = \frac{a_n}{n}$ 可得：$\frac{a_n}{n} = 2^{n-1}$，因此，$a_n = n\cdot 2^{n-1}$.

例 17.38 （丙 1817-1/67-1）等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 1$，$a_5 = 4a_3$. 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析：∵题设：等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1 = 1$，$a_5 = 4a_3$.

∴由 $a_5 = 4a_3$ 可得：

① $a_1q^4 = 4a_1q^2$，解得：$q = \pm 2$.　利用等比数列通项公式

或② $a_3q^2 = 4a_3$，解得：$q = \pm 2$.　利用等比数列定义，将 a_5 看成 $a_3\cdot q\cdot q$

又∵等比数列的通项公式为 $a_n = a_1q^{n-1}$，∴ $a_n = 1\cdot(\pm 2)^{n-1}$. 即 $a_n = 2^{n-1}$ 或 $a_n = (-2)^{n-1}$.

条件 6.8　给定等差数列的首项及与另外两项成等比

条件分析：当给定等差数列的首项及与另外两项成等比数列时，关键是利用成等比数列的三项求出公差.

例 17.39 （甲 1317-1）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零，$a_1 = 25$，且 a_1，a_{11}，a_{13} 成等比数列，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d\,(d\neq 0)$，则∵ a_1，a_{11}，a_{13} 成等比数列，∴ $a_{11}^2 = a_1a_{13}$.

由等差数列通项公式可得：$(a_1+10d)^2 = a_1(a_1+12d)$，化简可得：$(2a_1+25d)d = 0$.

∵题设 $d\neq 0$，∴ $2a_1+25d = 0$，将题设 $a_1 = 25$ 代入可得：$d = -2$.

故 $a_n = a_1+(n-1)d = 25+(n-1)\times(-2) = 27-2n$.

条件 6.9　给定数列的前 n 项的加权和表达式

条件分析：当给定数列的前 n 项的加权和表达式时，关键是利用这个表达式构造通项之差方程.

例 17.40 （丙 1717-1）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n = 2n$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析：∵题设 $a_1+3a_2+\cdots+(2n-1)a_n = 2n$.　①

∴当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1+3a_2+\cdots+(2n-3)a_{n-1} = 2(n-1)$.　②

两式相减（①–②）可得：$(2n-1)a_n = 2$，解得：$a_n = \frac{2}{2n-1}(n\geqslant 2)$.

又∵由题设可得：$a_1 = 2$，经检验 a_1 也满足 $a_n = \frac{2}{2n-1}$.　这一点容易被忽略而失分

∴数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{2}{2n-1}$.　归纳推理

问题 7　求数列的前 n 项和 S_n

问题分析：求数列的前 n 项和问题，关键是要确定数列的类型、首项和公差（公比）.

条件 7.1 给定等差数列的公差及某三项成等比数列

条件分析：当给定等差数列的公差及某三项成等比数列时，关键是利用成等比数列的三项建立关于首项的一元二次方程.

例 17.41 （甲 1405）等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，若a_2，a_4，a_8成等比数列，则$\{a_n\}$的前n项和$S_n=$（ ）.

A. $n(n+1)$　　B. $n(n-1)$　　C. $\dfrac{n(n+1)}{2}$　　D. $\dfrac{n(n-1)}{2}$

解析：题设等差数列$\{a_n\}$的公差$d=2$，则$a_4=a_2+2d$，$a_8=a_2+6d$.

又∵a_2，a_4，a_8成等比数列，∴由等比中项公式可得：$(a_2+2d)^2=a_2(a_2+6d)$.

化简可得：$2da_2=4d^2$，将$d=2$代入可得：$a_2=4$，从而$a_1=2$.

∴$a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)2=2n$，$S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)=\dfrac{n}{2}(2+2n)=n(n+1)$. 故选 A，不选 BCD.

条件 7.2 给定等差数列的某项及前指定项和

条件分析：当给定等差数列的某项及前指定项和时，关键是利用这两个条件建立关于首项和公差的二元一次方程组.

例 17.42 （甲 1765）等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$____________.

解析：设等差数列的首项为a_1，公差为d，由题意利用等差数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$和前n项和公式$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$可得：$\begin{cases}a_1+2d=3\\4a_1+\dfrac{4\times3}{2}d=10\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=1\\d=1\end{cases}$. 代入等差数列前$n$项和公式$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$可得$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，即有$\dfrac{1}{S_k}=\dfrac{2}{k(k+1)}=2\times\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$.

因此，$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=2\times\left[\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=2\times\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{2n}{n+1}$.

> **经验总结：**当遇到两个连续“数”的倒数求和时，可以采用裂项相消法求和，但要注意正、负项相消时消去了哪些项，保留了哪些项，切不可漏写未被消去的项，未被消去的项一般都有“首尾（项）对称”的特点，即“前后对称”.

条件 7.3 给定数列的首项及通项与前 *n* 项和递推公式

条件分析：当给定数列的首项及通项与前n项和递推公式时，关键是利用递推关系式构造前n项和变形后的新数列.

例 17.43 （甲 1566）设S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，且$a_1=-1$，$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，则$S_n=$________.

解析：∵题设$a_{n+1}=S_nS_{n+1}$，且对任意数列有$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，∴$S_{n+1}-S_n=S_nS_{n+1}$，两边同除以S_nS_{n+1}可得：$\dfrac{1}{S_{n+1}}-\dfrac{1}{S_n}=-1$.

又∵$a_1=-1$，∴$S_1=-1$，$\dfrac{1}{S_1}=-1$. 即数列$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$是首项为–1，公差为–1 的等差数列.

因此，由等差数列通项公式$A_n=A_1+(n-1)d$可得：$\dfrac{1}{S_n}=-1+(n-1)\times(-1)=-n$. 解得：$S_n=-\dfrac{1}{n}$.

条件 7.4　给定等比数列的通项公式

条件分析：当给定等比数列的通项公式时，关键是利用通项公式确定首项和公比.

例 17.44（乙 1717-2）记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_n=(-1)^n 2^n$，求 S_n，并判断 S_{n+1}，S_n，S_{n+2} 是否成等差数列.

解析：$\because$ 题设 $a_n=(-1)^n 2^n$，$\therefore a_1=-2$，$q=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$.

由等比数列的前 n 项和公式 $S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ 可得：$S_n=\dfrac{-2\left[1-(-2)^n\right]}{3}=-\dfrac{2}{3}+(-1)^n\times\dfrac{2^{n+1}}{3}$.

$\because S_{n+1}+S_{n+2}=-\dfrac{2}{3}+(-1)^{n+1}\times\dfrac{2^{n+2}}{3}-\dfrac{2}{3}+(-1)^{n+2}\times\dfrac{2^{n+3}}{3}=2\times\left[-\dfrac{2}{3}+(-1)^n\times\dfrac{2^{n+1}\times(-1+2)}{3}\right]$，

$\therefore S_{n+1}+S_{n+2}=2S_n$，故 S_{n+1}，S_n，S_{n+2} 构成等差数列.

例 17.45（乙 1617-2）已知 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=3n-1$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$，$b_2=\dfrac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$. 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

解析：$\because$ 题设 $b_1=1$，$b_2=\dfrac{1}{3}$，$a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$，$\therefore$ 为了求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，首先需要判别数列 $\{b_n\}$ 是等差数列？还是等比数列？若都不是则需另辟蹊径.

由 $a_nb_{n+1}+b_{n+1}=nb_n$ 可得：$(a_n+1)b_{n+1}=nb_n$，将题设 $a_n=3n-1$ 代入可得：$3nb_{n+1}=nb_n$，即 $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{1}{3}$，由此可见：数列 $\{b_n\}$ 是首项 $b_1=1$，公比 $q=\dfrac{1}{3}$ 的等比数列.

因此，由等比数列前 n 项和公式可得：$S_n=b_1\dfrac{1-q^n}{1-q}=1\times\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\left(1-3^{-n}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2\times 3^{n-1}}$.

例 17.46（甲 1817-2/67-2）等差数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=2n-9$，前 n 项和记为 S_n，求 S_n，并求 S_n 的最小值.

解析：$\because$ 题设 $a_n=2n-9$，$\therefore a_1=-7$，且公差 $d=a_{n+1}-a_n=2$，

$S_n=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d=-7n+n(n-1)=n^2-8n$，　①

或 $S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)=\dfrac{n}{2}(-7+2n-9)=n(n-8)=(n-4)^2-16$.　②

观察①式：将 S_n 看成是开口向上的抛物线：　由式子想象图形

当 $n=-\dfrac{B}{2A}=-\dfrac{-8}{2}=4$ 时，$(S_n)_{\min}=C-\dfrac{B^2}{4A}=0-\dfrac{64}{4}=-16$.

观察②式：从有理数运算的角度来看：　由式子想象运算法则

当 $(n-4)^2=0$ 时，$(S_n)_{\min}=0-16=-16$.

条件 7.5　给定等差数列的相邻两项乘积作分母

条件分析：当给定等差数列的相邻两项乘积作分母时，关键是利用裂项相消法计算.

例 17.47（乙 1567-2）S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_n=2n+1$，$a_n^2+2a_n=4S_n+3$，设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

解析：$\because$ 题设 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，且 $a_n=2n+1$，$\therefore b_n=\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$.

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4n+6}.$$

例 17.48 （乙 1317-2）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=2-n$，求数列 $\left\{\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$ 的前 n 项和.

解析：（典型的裂项相消法）令数列 $\{A_n\}=\left\{\dfrac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$，则 $A_n=\dfrac{1}{(3-2n)(1-2n)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}\right)$，

$\because A_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{-1}-\dfrac{1}{1}\right)$，$A_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)$，$A_3=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$，……，$A_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n-1}\right)$，

$$\therefore A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2n}-\frac{1-2n}{1-2n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-1+2n}{1-2n}\right)=\frac{n}{1-2n}.$$

例 17.49 （丙 1717-2）设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{2}{2n-1}$，求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和.

解析：$\because \dfrac{a_n}{2n+1}=\dfrac{2}{(2n+1)(2n-1)}=2\times\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)\div 2=\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}$.

把分子常数前移使分子为“1”，将其余部分转化为分母因式的倒数差，再除以差值“2”

$\therefore$ 数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2n+1}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=1-\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{2n}{2n+1}$.

> **经验总结**：裂项相消法是指将数列的通项分解成两个式子的代数“差”的形式，然后通过累加来抵消中间若干项的求和方法. 裂项相消法适用于形如 $\left\{\dfrac{c}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的数列，其中 $\{a_n\}$ 是各项均不为零的等差数列，c 为常数. 裂项相消法常见的有相邻两项的裂项求和和相隔多项的裂项求和，如 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+k)}=\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+k}\right)\div(k-1)=\dfrac{1}{k-1}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+k}\right)$.

条件 7.6　给定等差数列与等比数列的乘积

条件分析：当给定等差数列与等比数列的乘积时，关键是利用错位相减法.

例 17.50 （乙 1417-2）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_n=1+\dfrac{1}{2}n$，求数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和.

解析：设数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，且由 $a_n=1+\dfrac{1}{2}n$ 可得：$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$，

则 $S_n=\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}+\dfrac{5}{2^4}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^n}+\dfrac{n+2}{2^{n+1}}$，　①

且 $\dfrac{S_n}{2}=\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}+\dfrac{5}{2^5}+\cdots+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}+\dfrac{n+2}{2^{n+2}}$.　②

①–②可得：$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{3}{2^2}+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)-\dfrac{n+2}{2^{n+2}}$，其中，$\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$ 可以看成是以 $\dfrac{1}{2^3}$ 为首项，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列前 $(n+1)-2=n-1$ 项和.

由等比数列前 n 项和公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 可得：$\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)=\dfrac{\frac{1}{2^3}\left(1-2^{-(n-1)}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$，

故$\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\frac{n+2}{2^{n+2}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n+2}{2^{n+2}}$，化简可得：$S_n=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$.

经验总结：当遇到数列的通项是等差数列与等比数列的乘积时，可以采用错位相减法.

条件 7.7 给定等差数列的通项公式求新的等差数列

条件分析：当给定等差数列的通项公式求新的等差数列时，关键是利用通项公式构造新的数列.

例 17.51 （甲 1317-2）已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式：$a_n=27-2n$，求$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}$.

解析：∵等差数列$\{a_n\}$的通项公式：$a_n=27-2n$，∴公差$d=-2$，$a_1=25$.

因此a_1，a_4，a_7,⋯，a_{3n-2}构成$a_1=25$，公差$d'=3d=-6$的等差数列.

①由等差数列前n项和公式$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$可得：

$S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=25n+\frac{1}{2}n(n-1)\times(-6)=-3n^2+28n$，即$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}=-3n^2+28n$.

②由等差数列前n项和公式可得：$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_{3n-2})$.

其中，$a_{3n-2}=a_1+(3n-2-1)d=25+(3n-3)\times(-2)=31-6n$，即$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_{3n-2})=\frac{n}{2}(25+31-6n)=-3n^2+28n$.

例 17.52 （甲 1467-1）已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{3^n-1}{2}$，证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

证明：∵$a_n=\frac{3^n-1}{2}$，∴$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$.

目标不等式的左边是数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和

设$B_n=\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$，则$B_1=\frac{1}{a_1}=1$. 当$n>1$时，$B_n=\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$且$3^n>1>0$.

∵$3^n>1$，∴$3^n+2\times3^n>1+2\times3^n$，$2\times3^n<3\times3^n-1$，即$2\times3^n<3^{n+1}-1$，亦即$2\times3^{n-1}<3^n-1$.

因此，$\frac{2}{3^n-1}<\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{3^n}$. 设$C_n=\frac{3}{3^n}$，则$\{C_n\}$是首项为 1，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，且其前$n$项和$T_n$为：

$$T_n=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{3}{2}.$$ 所以，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

经验总结：为了比较B_n的大小，可以猜想：①$B_n<\frac{3}{3^n-1}$，②$B_n<\frac{2}{3^{n-1}}$，③$B_n<\frac{1}{3^{n-1}}$.

问题 8 求数列通项公式或前 n 项和公式中的参数

条件 8.1 给定数列通项的含参公式和前 n 项和的含参关系式

条件分析：当给定数列通项的含参公式和前n项和的含参关系式时，既可以从含参通项公式出发去确定含参的首项和公差（公比）；也可以从两者的关系式出发，经过化简并利用其他条件解决问题.

例 17.53 （丙 1667-2）已知等比数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$，前$n$项和为$S_n$，其中$\lambda\neq0$. 若

$S_5=\dfrac{31}{32}$，求λ.

解析 1：∵题设等比数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\dfrac{1}{1-\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$，　　从题设的一个条件出发

∴类比等比数列通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$可得：$a_1=\dfrac{1}{1-\lambda}$，$q=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.　　类比思想：用待定系数法确定首项和公比

由等比数列前n项和公式$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$及题设$S_5=\dfrac{31}{32}$可得：$\dfrac{1}{1-\lambda}\times\dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^5}{1-\dfrac{\lambda}{\lambda-1}}=\dfrac{31}{32}$，

基于条件列方程

化简可得：$1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^5=\dfrac{31}{32}$，即：$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^5=\dfrac{1}{32}$.　　转化为指数方程并求解

解得：$\dfrac{\lambda}{\lambda-1}=\dfrac{1}{2}$，$\lambda=-1$.　　转化为一元一次方程

解析 2：∵题设$a_n=\dfrac{1}{1-\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$，　　从题设的两个条件出发

∴$S_n=1+\lambda\dfrac{1}{1-\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{n-1}$，　　将$a_n$代入$S_n$表达式，消去$a_n$

由题设$S_5=\dfrac{31}{32}$可得：$\dfrac{31}{32}=1+\lambda\dfrac{1}{1-\lambda}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^4$，　　方程思想：基于题设条件列方程

化简可得：$\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^5=\dfrac{1}{32}$，　　转化为指数方程并求解

解得：$\dfrac{\lambda}{\lambda-1}=\dfrac{1}{2}$，$\lambda=-1$.　　转化为一元一次方程

经验总结：比较解析 1 与解析 2 可见，题设“等比”数列明确了解题思路，降低了难度.

例 17.54 （乙 1467-2）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_n\neq0$，$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$，且$a_{n+2}-a_n=\lambda$，其中λ为常数．问是否存在λ，使得$\{a_n\}$为等差数列？并说明理由.

解析：∵题设$a_1=1$，且$S_1=a_1$，∴由题设$a_na_{n+1}=\lambda S_n-1$可得：$a_1a_2=\lambda a_1-1$，解得：$a_2=\lambda-1$.
又由$a_{n+2}-a_n=\lambda$可得：$a_3=a_1+\lambda$.

设$\{a_n\}$为等差数列，即a_1，a_2，a_3成等差数列，则$a_1+a_3=2a_2$.

将$a_1=1$，$a_2=\lambda-1$，$a_3=a_1+\lambda$代入上式可解得：$\lambda=4$.

由此可见：存在$\lambda=4$，有可能使得$\{a_n\}$为等差数列.

以上通过特殊值（数列的前三项）探究出数列成等差的必要条件是$\lambda=4$

以下再证明当$\lambda=4$时，$\{a_n\}$为等差数列．即$\lambda=4$是数列为等差数列的充分条件

∵由题设：$a_{n+2}-a_n=\lambda$可得：$a_{n+2}-a_n=4$，且$a_1=1$，$a_2=\lambda-1=4-1=3$，

∴数列$\{a_n\}$的奇数项构成首项为 1，公差为 4 的等差数列$\{a_{2m-1}\}(m=1,2,\cdots)$，

且$a_{2m-1}=1+(m-1)\times4=4m-3$．令$n=2m-1$，则$m=\dfrac{n+1}{2}$，$a_n=2n-1(n=2m-1)$.

数列$\{a_n\}$的偶数项构成首项为 3，公差为 4 的等差数列$\{a_{2m}\}(m=1,2,\cdots)$，且$a_{2m}=3+(m-1)\times4=4m-1$，令$n=2m$，则$m=\dfrac{n}{2}$，$a_n=2n-1(n=2m)$.

综上所述，$a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_{n+1}-a_n=2$.

因此，存在 $\lambda=4$，使得 $\{a_n\}$ 构成首项为 1，公差为 2 的等差数列.

问题 9 求数列 S_n 与 a_n 的关系式

问题分析： 求数列 S_n 与 a_n 的关系式问题关键是要利用两者的公共因素（公差或公比）建立联系.

条件 9.1　给定数列的首项及公差（公比）

条件分析： 当给定数列的首项及公差（公比）时，需要从通项与前 n 项和和首项与公差（公比）中发现两者的关系.

例 17.55 （乙 1306）设首项为 1，公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则（　）.

A．$S_n=2a_n-1$　　B．$S_n=3a_n-2$　　C．$S_n=4-3a_n$　　D．$S_n=3-2a_n$

解析 1： ∵四个选项都是 S_n 与 a_n 的关系式，∴想到先用等比数列通项公式和前 n 项和公式.

∵ $a_1=1$，$q=\frac{2}{3}$，∴ $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，$S_n=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=3-3\left(\frac{2}{3}\right)^n=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=3-2a_n$，故选 D，不选 ABC.

解析 2： ∵ $a_1=1$，$q=\frac{2}{3}$，∴ $a_2=\frac{2}{3}$，$S_2=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$.

将 $a_2=\frac{2}{3}$ 分别代入四个选项进行计算可得：A：$S_2=\frac{1}{3}$；B：$S_2=0$；C：$S_2=2$；D：$S_2=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$.

显然，只有选项 D 计算结果正确．故选 D，不选 ABC.

问题 10 求数列有关要素的最值

问题分析： 求数列有关要素最值的关键是需要确定所求“要素”与项数 n 的函数关系，将最值问题转化为函数求最值问题.

条件 10.1　给定等比数列两个两项和

条件分析： 当给定等比数列两个两项和时，可以列两个关于首项和公比的方程，通过解方程组来确定等比数列的首项和公比，从而最终确定“前 n 项积”与项数 n 的函数解析式.

例 17.56 （乙 1665）设等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，则 $a_1a_2\ldots a_n$ 的最大值为__________.

解析： 设等比数列的公比为 q，则 $a_3=a_1q^2$，$a_4=a_2q^2$.

∵ $a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=5$，

∴ $a_1\left(1+q^2\right)=10$，　　①

$a_2\left(1+q^2\right)=5$，　　②

$\frac{②}{①}$ 可得：$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$，即 $q=\frac{1}{2}$，代入①式解得：$a_1=8$，$a_1a_2\cdots a_n=a_1^nq^{0+1+2+3+\cdots+n-1}=a_1^nq^{\frac{n}{2}(0+n-1)}=2^{3n}\times2^{-\frac{n}{2}(n-1)}=2^{-\frac{1}{2}n^2+\frac{7}{2}n}$.

令 $y=-\frac{1}{2}n^2+\frac{7}{2}n$，则当 $n=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{2}=3.5$ 时，取 $n=3$ 或 $n=4$，$y_{\max}=6$，故 $a_1a_2\cdots a_n$ 的最大值为 $2^6=64$.

条件 10.2　给定等差数列的两个前指定项和

条件分析：当给定等差数列的两个前指定项和时，可以列两个关于首项和公差的方程，通过解方程组来确定等差数列的首项和公差，从而最终确定“前 n 项和”与项数 n 乘积的函数解析式.

例 17.57（甲 1366）等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_{10}=0$，$S_{15}=25$，则 nS_n 的最小值为______.

解析：$\because S_{10}=0$，$S_{15}=25$，$\therefore$ 由等差数列前 n 项和公式可得：

$\begin{cases}10a_1+\frac{10\times9}{2}d=0\\15a_1+\frac{15\times14}{2}d=25\end{cases}$，解得：$a_1=-3$，$d=\frac{2}{3}$，所以 $S_n=-3n+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{2}{3}$，即 $nS_n=\frac{n^3-10n^2}{3}$.

令 $f(x)=\frac{x^3-10x^2}{3}$，则 $f'(x)=x^2-\frac{20}{3}x=x\left(x-\frac{20}{3}\right)$.

从纯二次函数角度来看，当 $n<0$ 时，$f'(n)>0$；当 $0<n<\frac{20}{3}$ 时，$f'(n)<0$；当 $n>\frac{20}{3}$ 时，$f'(n)>0$.

因此，$f(n)=\frac{n^3-10n^2}{3}$ 在 $n=\frac{20}{3}\approx7$ 时取得最小.

$\because f(6)=-48$，$f(7)=-49$，$\therefore$ 当 $n=7$ 时，nS_n 的最小值为 -49.

第 18 题　三角形背景

18

背景知识

	正弦定理	余弦定理	三角形面积公式
基本内容	已知两边及其中一边对角解三角形； 已知两角和任一边解三角形； 利用三角形内角和为 180° 解三角形； $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$， 式中，$R$ 是$\triangle ABC$ 外接圆半径	已知两边及其夹角求对边： $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$	$S=\frac{1}{2}ah$ $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ $S=\frac{1}{2}ac\sin B$ $S=\frac{1}{2}bc\sin A$
变形形式	①$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ ② $a=2R\sin A$；$b=2R\sin B$；$c=2R\sin C$ ③ $\sin A=\frac{a}{2R}$；$\sin B=\frac{b}{2R}$；$\sin C=\frac{c}{2R}$ ④ $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$	已知三边求角： $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$	$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$ $S=\frac{abc}{4R}$（R 为$\triangle ABC$ 外接圆半径） $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$（r 为内切圆半径） $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$， 式中，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$

问题 1　求三角形的角

问题分析：求三角形角的问题，既可用正弦定理，也可用余弦定理，关键是看试题所给条件有哪些.

条件 1.1　给定三角形的两条边长及一条边所对的角

条件分析：当给定三角形的两条边长及一条边所对的角时，最佳解题思路是利用正弦定理.

例 18.1（丙 1715）$\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，已知 $\angle C=60^\circ$，$b=\sqrt{6}$，$c=3$，则 $\angle A=$ ________.

解析：由于本题条件是给定了 b，c 两条边长及 c 边所对的 $\angle C$，因此，可以根据正弦定理先求出 b 边所对的 $\angle B$，然后再利用三角形内角和为 180° 求出 $\angle A$.

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 可得：$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　正弦定理

又∵ $b=\sqrt{6}<c=3$，∴ $\angle B=45^\circ<60^\circ$，　三角形规律：大边对大角

则 $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$.　三角形内角和为 180°

条件 1.2　给定三角形的两条边长及三个角的正弦函数关系式

条件分析：当给定三角形的两条边长及三个角的正弦函数关系式时，典型的解题思路是先利用三角函数关系式求出所给两边的一个对角，再利用正弦定理求解.

例 18.2（乙 1711）$\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c．已知 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，$a=2$，$c=\sqrt{2}$，则 $\angle C=$（　）.

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

解析：$\because$ 题设 $\sin B+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，且 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$．　三角形内角和为 180°

$\therefore \sin(A+C)+\sin A(\sin C-\cos C)=0$，　$\because$ 题给边长 a，c，$\therefore$ 将 $\angle B$ 用 $\angle A+\angle C$ 换掉

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A\sin C-\sin A\cos C=0$，　两角和正弦公式

亦即 $\sin C(\sin A+\cos A)=0$.

$\because \sin C\neq 0$，$\therefore \sin A+\cos A=0$，　借助因式分解获得新的方程

两边同乘以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 可得：$\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=0$，　三角函数的辅助角公式

解得：$\angle A=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\angle A=-\frac{\pi}{4}$（舍去）　解三角函数方程

$\because$ 题设：$a=2$，$c=\sqrt{2}$，且已求得：$\angle A=\frac{3\pi}{4}>\frac{\pi}{2}$，

$\therefore$ 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 可得：$\sin C=\frac{c}{a}\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

$\because c<a$，$\therefore \angle C<\angle A$，因此，$\angle C=\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$.　小边对小角

故选 B，不选 ACD.

> **经验总结**：如果所给式子（条件）中含有角的余弦时，要考虑用余弦定理；如果所给式子（条件）中含有角的正弦时，则要考虑用正弦定理；如果以上特征都不明显，则要考虑综合应用两个定理.

条件 1.3　给定三角形的三个角的余弦与三条边的乘积关系式

条件分析：当给定三角形三个角的余弦与三条边的乘积关系式时，理论上可以有两种解题思路：一是利用正弦定理把三条边“换成”对应角的正弦；二是利用余弦定理把三个余弦“换成”相关边的表达式. 最终使条件表达式“变成”纯“角”或纯“边”的关系式.

例 18.3（甲 1716）$\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，则 $\angle B=$ ________.

解析：$\because$ 题设：$2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，$\therefore$ 由正弦定理（$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$）可得：$2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，即 $2\sin B\cos B=\sin(A+C)$.　将边化为角

再利用 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$ 可得：$2\cos B=1$，解得：$\angle B=\frac{\pi}{3}$.

> **经验总结**：如果所给的条件是三条边与三个角的余弦混合表达式时，最佳的方法是利用正弦定理将三条边化成对应角的正弦，获得关于三个角的正弦、余弦表达式，再利用三角形内角和定理及两角和的正弦公式进行计算.

例 18.4（乙 1667-1）$\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$．求 $\angle C$．

解析 1：$\because$ 题设 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$，$\therefore$ 利用正弦定理可得：$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，并代入上式可得：$2\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$，利用和角公式可得：$2\cos C\sin(A+B)=\sin C$，再利用三角形内角和为 π 可得：$2\cos C\sin(\pi-C)=\sin C$，解得：$\cos C=\dfrac{1}{2}$，所以 $\angle C=\dfrac{\pi}{3}$．　舍负

解析 2：$\because$ 题设 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$，

$\therefore$ 根据余弦定理可得：$2\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}(a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc})=c$，

$\because$ 左式 $=2\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c})=2\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\times\dfrac{2c^2}{2c}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{ab}c$，

$\therefore$ 代入上式可得：$a^2+b^2-c^2=ab$．

再由余弦定理可得：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$．所以 $\angle C=\dfrac{\pi}{3}$．　舍负

例 18.5（甲 1367-1）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=b\cos C+c\sin B$．求 $\angle B$．

解析：$\because$ 题设：$a=b\cos C+c\sin B$，　从题设条件出发

$\therefore$ 由正弦定理可得：$\sin A=\sin B\cos C+\sin C\sin B$，　①

又 $\because$ $\angle A=\pi-(\angle B+\angle C)$，　利用三角形内角和变形

$\therefore$ 由三角公式可得：$\sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，　②

由①②两式可得：$\sin C\sin B=\cos B\sin C$，　方程思想

$\because$ $\sin C\neq 0$，$\therefore$ $\sin B=\cos B$．又 $\because$ $0<\angle B<\pi$，$\therefore$ 由 $\sin B=\cos B$ 可得：$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$．

条件 1.4　给定三角形一个角及其一条邻边上的高与邻边的关系

条件分析：当给定三角形的一个角及其一条邻边上的高与邻边的关系时，往往需要借助于三角函数或者勾股定理求出另外两条边与所给高的关系，最后再利用正弦定理或余弦定理求解．

例 18.6（丙 1609）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$，则 $\sin A=$（　）．

A. $\dfrac{3}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

解析：如图 18.1 所示，AD 为 BC 边上的高．$\because$ $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore$ $AD=BD$．

$\because$ BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$，$\therefore$ $BC=3AD$，即 $DC=2AD$．

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 中，$AC=\sqrt{AD^2+4AD^2}=\sqrt{5}AD$，$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得：$\dfrac{\sin A}{BC}=\dfrac{\sin B}{AC}$，即 $\sin A=\dfrac{BC}{AC}\sin B=\dfrac{3AD}{\sqrt{5}AD}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$．故选 D，不选 ABC．

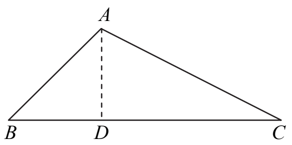


图 18.1

例 18.7（丙 1658）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，BC 边上的高等于 $\dfrac{1}{3}BC$，则 $\cos A=$（　）．

A. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

解析：如图 18.2 所示，AD 为 BC 边上的高．$\because$ $\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore$ $AD=BD$．

∵ BC 边上的高等于$\frac{1}{3}BC$，∴ $BC=3AD$，即 $DC=2AD$．

∵在 Rt△ABD 中，$AB=\sqrt{2}AD$，在 Rt△ADC 中，$AC=\sqrt{5}AD$，

∴在△ABC 中，由余弦定理可得：

$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{2AD^2+5AD^2-9AD^2}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}AD^2}=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，故选 C，不选 ABD．

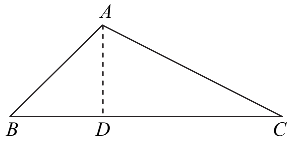


图 18.2

例 18.8 （乙 1517-1）已知 a，b，c 分别为△ABC 内角∠A，∠B，∠C 的对边，$\sin^2 B=2\sin A\sin C$．若 $a=b$，求 $\cos B$．

解析：∵题设 $\sin^2 B=2\sin A\sin C$，∴由正弦定理可得：$b^2=2ac$．　　“角”化“边”

又∵ $a=b$，∴ $b=2c$，$a=2c$．在已知三边关系的条件下，由余弦定理可得：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{4}$．

条件 1.5　给定三角形一个角与其半角的三角函数关系式

条件分析：当给定三角形一个角与其半角的三角函数关系式时，往往需要反用余弦的二倍角公式，将题设条件中的半角化为全角，然后再综合利用三角形内角和定理及同角三角函数的平方和公式进行求解．

例 18.9 （甲 1767-1）△ABC 的内角∠A，∠B，∠C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$．求 $\cos B$．

解析：由题设 $\sin(A+C)=8\sin^2\frac{B}{2}$ 及∠A+∠B+∠$C=\pi$ 可得：$\sin B=8\sin^2\frac{B}{2}$．　①

由倍角公式 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ 可得：$\cos B=1-2\sin^2\frac{B}{2}$．　②

由①②两式消去 $\sin^2\frac{B}{2}$ 可得：$\sin B=4(1-\cos B)$，对上式两边平方，并利用 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$ 可得：$1-\cos^2 B=16(1-2\cos B+\cos^2 B)$，化简可得：$17\cos^2 B-32\cos B+15=0$．

解关于 $\cos B$ 的一元二次方程可得：$\cos B=\frac{15}{17}$ 或 $\cos B=1$（$B\neq 0$，$B\neq\pi$，舍去）．因此，求得 $\cos B=\frac{15}{17}$．

条件 1.6　给定三角形的面积为一条边及其对角的正弦表达式

条件分析：当给定三角形的面积为一条边及其对角的正弦表达式时，往往需要利用三角形的面积公式和已知条件列方程建立恒等关系式，然后再利用正弦定理或余弦定理进行求解．

例 18.10 （乙 1767-1）△ABC 的内角∠A，∠B，∠C 的对边分别为 a，b，c，已知△ABC 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$．求 $\sin B\sin C$．

解析：∵题设△ABC 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$，　　从条件出发

∴由三角形的面积公式可得：$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{a^2}{3\sin A}$，　　方程思想

即 $\frac{1}{2}c\sin B=\frac{a}{3\sin A}$．　　面积公式采用 $\frac{1}{2}ac\sin B$ 或 $\frac{1}{2}ab\sin C$，目的是出现所给边长 a

再由正弦定理（将“边”化成“角”）可得：$\frac{1}{2}\sin C\sin B=\frac{\sin A}{3\sin A}$，解得：$\sin B\sin C=\frac{2}{3}$．

事实上，采用 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{a^2}{3\sin A}$ 可得：$\frac{1}{2}b\sin C=\frac{a}{3\sin A}$，同理可得：$\sin B\sin C=\frac{2}{3}$．

如果采用$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2}{3\sin A}$可得：$\frac{1}{2}bc=\frac{a^2}{3\sin^2 A}$，同理可得：$\sin B\sin C=\frac{2}{3}$，但计算过程复杂.

例 18.11（丙 1811/59）$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则$\angle C=$（ ）.

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

解析：∵题设$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，∴由分子 $a^2+b^2-c^2$ 想到余弦定理：$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，即$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}ab\cos C$.

由此再次想到$\triangle ABC$ 的面积公式为$\frac{1}{2}ab\sin C$.　∵上式中有$\frac{1}{2}ab$，∴这里用$\frac{1}{2}ab\sin C$

利用题设面积表达式与三角形面积公式相等可得：$\cos C=\sin C$，解得：$\angle C=\frac{\pi}{4}$. 故选 C，不选 ABD.

条件 1.7　给定两个三角形的相关边和角的条件

条件分析：当给定两个三角形的相关边角条件时，可以确定所求目标所在的三角形为“主”三角形，其他三角形为“次”三角形，分析问题的思路往往是在“主”三角形中利用正弦定理或余弦定理来解决问题，但是在“主”三角形中运用相关定理时往往会缺少某些条件，而这些条件又往往需要在“次”三角形中利用三角函数或勾股定理，甚至是正弦定理或余弦定理来补充的. 解题的思路恰恰是先从“次”三角形入手，再到“主”三角形来解决问题.

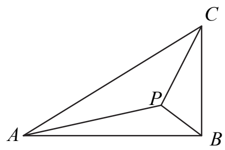


图 18.3

例 18.12（乙 1367-2）如图 18.3 所示，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，P 为$\triangle ABC$ 内一点，$\angle BPC=90^\circ$. 若$\angle APB=150^\circ$，求 $\tan\angle PBA$.

解析：设$\angle PBA=\theta$，　根据所求直接设问

则$\angle CBP=90^\circ-\theta$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BPC$ 中，$PB=BC\cos\left(90^\circ-\theta\right)=1\times\sin\theta$.

在$\triangle APB$ 中，∵$\angle APB=150^\circ$，$\angle PBA=\theta$，∴$\angle PAB=30^\circ-\theta$.　利用三角形内角为180°

由正弦定理可得：$\frac{AB}{\sin 150^\circ}=\frac{PB}{\sin\left(30^\circ-\theta\right)}$，即$\frac{\sqrt{3}}{\sin 150^\circ}=\frac{\sin\theta}{\sin\left(30^\circ-\theta\right)}$，化简可得：$\sqrt{3}\cos\theta=4\sin\theta$.

解得：$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$，即$\tan\angle PBA=\frac{\sqrt{3}}{4}$.　在$\triangle APB$ 中利用正弦定理建立关于θ 的三角函数方程并求解

例 18.13（甲 1517-1/67-1）$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分$\angle BAC$，$\triangle ABD$ 的面积是$\triangle ADC$ 面积的 2 倍. 求$\frac{\sin B}{\sin C}$.

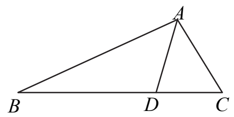


图 18.4

解析：如图 18.4 所示，∵ AD 平分$\angle BAC$，∴$\angle BAD=\angle DAC$.

又∵题设$\triangle ABD$ 的面积是$\triangle ADC$ 面积的 2 倍，

∴想到需要利用三角形面积公式，且以被平分的两个相等角为邻边.

又∵ $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD$，$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle DAC$，

∴$\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD=2\times\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle DAC$，利用$\angle BAD=\angle DAC$ 可得：$AB=2AC$.

在$\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得：$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$.　在目标$\angle B$，$\angle C$ 所在的$\triangle ABC$ 中解决问题

例 18.14（甲 1517-2）$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 BAC，$\triangle ABD$ 是$\triangle ADC$ 面积的 2 倍，且$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$. 若$\angle BAC=60^\circ$，求$\angle B$.

解析：如图 18.5 所示，$\because \angle C=180^\circ-(\angle BAC+\angle B)$，且 $\angle BAC=60^\circ$.

$\therefore \sin C=\sin(\angle BAC+\angle B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\dfrac{1}{2}\sin B$.

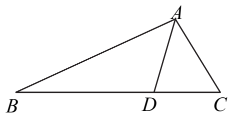


图 18.5

又 $\because \dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$，即 $2\sin B=\sin C$，$\therefore$代入上式可得：$\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\angle B=30^\circ$.

例 18.15 （乙 1867-1）在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90°$，$\angle A=45°$，$AB=2$，$BD=5$．求 $\cos\angle ADB$.

解析：按题意绘制图形，如图 18.6 所示. 直观想象，图形绘制

$\because \angle ADC=90°$，且（乙 1867-2）中设 $DC=2\sqrt{2}$，$\therefore$以 DC 为水平线绘图.

在 $\triangle ABD$ 中，$\because \angle A=45°$，$AB=2$，$BD=5$，$\therefore$由正弦定理可得：$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{BD}{\sin\angle A}$.

即 $\sin\angle ADB=\dfrac{AB}{BD}\sin\angle A=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$，从而 $\cos\angle ADB=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{23}}{5}$.

$\because |AB|<|BD|$，$\therefore \angle ABD<\angle A=45°$，故 $\cos\angle ADB$ 取正值，而舍负

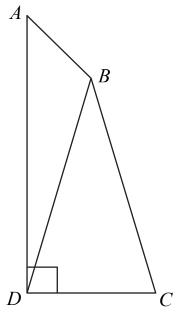


图 18.6

问题 2 求三角形的边

问题分析：求三角形边的问题，既可用正弦定理，也可用余弦定理，关键是看试题所给条件有哪些.

条件 2.1　给定三角形的两条边及一条边所对角的余弦

条件分析：当给定三角形的两条边长及一条边所对角的余弦时，最佳解题思路是使用余弦定理.

例 18.16 （乙 1604）$\triangle ABC$ 的内角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别是 a, b, c．已知 $a=\sqrt{5}, c=2, \cos A=\dfrac{2}{3}$，则 $b=$（　　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

解析 1：$\because$已知 $\cos A=\dfrac{2}{3}$，$\therefore$想到利用余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 可得：$\dfrac{2}{3}=\dfrac{b^2+4-5}{4b}$，化简可得：$3b^2-8b-3=0$，解得：$b=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times3\times(-3)}}{2\times3}=\dfrac{8\pm10}{6}=3$（舍负）. 故选 D，不选 ABC.

解析 2：$\because$已知 $\cos A=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \angle A<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

又$\because a=\sqrt{5}, c=2$，$\therefore$由正弦定理可得：$\sin C=\dfrac{c}{a}\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2}{3}$.

①$\because \sin C=\cos A=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \angle A+\angle C=\dfrac{\pi}{2}$，从而 $\angle B=\dfrac{\pi}{2}$. 因此，由勾股定理可得：$b=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{5+4}=3$.

②为了求 b，必须先求 $\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$.

$\because \sin C=\cos A=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \cos C=\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，代入上式可得：$\sin B=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{\sqrt{5}}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{9}{9}=1$.

因此，由正弦定理可得：$b=\dfrac{\sin B}{\sin A}a=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\times\sqrt{5}=3$ 或 $b=\dfrac{\sin B}{\sin C}c=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\times 2=3$．故选 D，不选 ABC.

经验总结：对于给定了 $\cos A=\dfrac{2}{3}$ 的条件，采用余弦定理比正弦定理要简单得多，尽管解析 2 中①迅速发现了“直角三角形”，解析 2 中②利用三角形内角和定理、两角和的正弦计算公式和同角三角函数的平方和公式解决了问题，但是，毫无疑问解析 2 远比解析 1 复杂得多.

例 18.17（乙 1867-2）在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90°$，$BD=5$，且 $\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$．若 $DC=2\sqrt{2}$，求 BC．

解析：在 $\triangle BDC$ 中，$\because BD=5$，$DC=2\sqrt{2}$，$\therefore$ 根据余弦定理，为求 BC 需要先确定 $\cos\angle BDC$．

$\because \sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$，且题设 $\angle ADC=90°$，$\therefore \cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\dfrac{\sqrt{2}}{5}$．因此，由余弦定理可得：

$BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\cos\angle BDC=5^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\times 5\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{5}=25+8-8=25$，解得：$BC=5$．

例 18.18（甲 1807/56）在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$BC=1$，$AC=5$，则 $AB=$（　）.

A．$4\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{30}$　　C．$\sqrt{29}$　　D．$2\sqrt{5}$

解析：$\because \cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\therefore$ 由余弦函数倍角公式可得：$\cos C=2\cos^2\dfrac{C}{2}-1$，　条件意识，数学想象

即 $\cos C=2\times\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\dfrac{3}{5}$．

由余弦定理可得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，　问题意识，余弦定理

即 $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cos C$．　边角转换

因此，$AB^2=1^2+5^2-2\times1\times5\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=32$．　代数运算

解得：$AC=4\sqrt{2}$．故选 A，不选 BCD.　开方运算

条件 2.2　给定三角形的两边及一边对角和二倍角的三角函数方程

条件分析：当给定三角形的两边及一边对角和二倍角的三角函数方程时，首先应该利用二倍角公式将方程转化为同角三角函数方程并求解.

例 18.19（丙 1767-1）$\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=0$，$a=2\sqrt{7}$，$b=2$．求 c．

解析：由已知可得：$\tan A=-\sqrt{3}$，所以 $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$．在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得：

$28=4+c^2-4c\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}$，即 $c^2+2c-24=0$．解得：$c=4$，$c=-6$（舍去）.

例 18.20（乙 1310）已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，$23\cos^2 A+\cos 2A=0$，$a=7$，$c=6$，则 $b=$（　）.

A．10　　B．9　　C．8　　D．5

解析：$\because 23\cos^2 A+\cos 2A=0$，$\therefore$ 利用二倍角公式 $\cos 2A=2\cos^2 A-1$ 可得：$25\cos^2 A-1=0$．

利用题设条件列三角函数方程

解得：$\cos A=\pm\dfrac{1}{5}$．　方程的解应该有正负

又∵题设△ABC 为锐角三角形，∴ $\cos A=\dfrac{1}{5}$． 利用题设条件舍负

又∵题设 $a=7$，$c=6$ 及已知 $\cos A=\dfrac{1}{5}$， 目标是求 b

∴代入余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 可得：$49=b^2+36-12\times\dfrac{1}{5}b$． 利用余弦定理列关于 b 的一元二次方程

解得：$b=5$．

经验总结：当遇到 $b\cos C+c\cos B$ 条件时，运用射影定理 $b\cos C+c\cos B=a$ 会使问题更容易解决.

条件 2.3 给定三角形的两边及三角形面积

条件分析：当给定三角形的两边及三角形面积时，首先应该利用三角形面积公式求出两边夹角的正弦，再解三角函数方程求出角.

例 18.21 （甲 1454）钝角△ABC 的面积是 $\dfrac{1}{2}$，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，则 $AC=$（ ）.

A．5 B．$\sqrt{5}$ C．2 D．1

解析：∵ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B$，∴ $\sin B=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{ac}=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC\cdot AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．解得：$B=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $B=\dfrac{3\pi}{4}$．

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 可得：当 $B=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2+1-2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$．

∵ $AB=1$，$AC=1$，$BC=\sqrt{2}$，∴△ABC 为等腰直角三角形（舍去）.

当 $B=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=2+1+2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=5$．

∴ $AC=\sqrt{5}>BC=\sqrt{2}>AB=1$，且 $B=\dfrac{3\pi}{4}$，∴△ABC 为钝角三角形．故选 B，不选 ACD.

条件 2.4 给定三角形两个角的余弦及其中一个角的对边

条件分析：当给定三角形两个角的余弦及其中一个角的对边时，首先应该利用同角三角函数的平方和公式求出所给两个角对应的正弦，再结合所给边用正弦定理解决问题.

例 18.22（甲 1615/63）△ABC 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，若 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\cos C=\dfrac{5}{13}$，$a=1$，则 $b=$__________.

解析：∵ $\cos A=\dfrac{4}{5}$，∴ $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{3}{5}$；同理可得：$\sin C=\dfrac{12}{13}$．

又∵在△ABC 中，$\angle A+\angle B+\angle C=\pi$，∴ $\angle B=\pi-(\angle A+\angle C)$． ∵目标是求 b，∴先求 $\sin B$

因此，$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}=\dfrac{15+48}{65}=\dfrac{63}{65}$．

由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$ 可得：$b=\dfrac{a}{\sin A}\sin B=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{63}{65}=\dfrac{21}{13}$．

条件 2.5 给定三角形面积和一个角的余弦及该角两邻边和

条件分析：当给定三角形面积和一个角的余弦及该角两邻边和时，由于给定了所求边对角的余弦，因此最终是需要用余弦定理来解决问题的．因此，应该想到必须利用其他条件为运用余弦定理奠定基础.

例 18.23 （甲 1767-2）△ABC 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，已知 $\cos B=\dfrac{15}{17}$．若

$a+c=6$，$\triangle ABC$ 的面积为 2，求 b.

解析：∵题设① $a+c=6$，② $\triangle ABC$ 的面积为 2，∴可以分别从①或②来探求解题思路.

由题设条件①可见：因为等号右边没有“边长”，所以不便使用正弦定理，更无法直接使用余弦定理. 想到余弦定理中可以有 a^2+c^2，因此，两边平方可得：$a^2+c^2+2ac=36$. 可以发现新的解题目标：ac

由题设条件②可得：$\dfrac{1}{2}ac\sin B=2$，解得：$ac=\dfrac{2\times2}{\sin B}=\dfrac{4}{\sqrt{1-\cos^2 B}}=\dfrac{4}{\dfrac{8}{17}}=\dfrac{17}{2}$. 将 ac 看成是一个整体

由余弦定理可得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B$

$$=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)=36-17\times\left(1+\frac{15}{17}\right)=4，解得：b=2.$$

条件 2.6 给定多个三角形的部分边和角

条件分析：当给定多个三角形的部分边和角时，应关注所求目标属于哪几个三角形，再从这些三角形中已知条件较多的三角形着手去解决问题，而从其他三角形入手为解决问题奠定基础. 如果所求目标属于两个三角形，且在各自三角形中的条件相同，那么可能需要借助正弦定理或余弦定理在两个三角形中列方程组来求解.

例 18.24 （乙 1367-1）如图 18.7 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，P 为 $\triangle ABC$ 内一点，$\angle BPC=90^\circ$. 若 $PB=\dfrac{1}{2}$，求 PA.

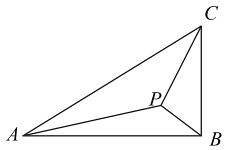


图 18.7

解析：∵所求目标 PA 既属于 $\triangle PAB$，又属于 $\triangle PAC$，但是在 $\triangle PAB$ 中已知 $AB=\sqrt{3}$，而在 $\triangle PAC$ 中未给条件，∴从 $\triangle PAB$ 着手解决问题.

毫无疑问，在 $\triangle PAB$ 中，无论是用正弦定理还是用余弦定理，要想求得 PA，必须先求得 PA 所对的 $\angle PBA$. 由于题设 $\angle ABC=90^\circ$，因此只需求出 $\angle PBC$ 即可. 因此，解题过程如下：

在 Rt$\triangle BPC$ 中，∵ $BC=1$，$PB=\dfrac{1}{2}$，∴ $\cos\angle CBP=\dfrac{PB}{BC}=\dfrac{1}{2}$，即 $\angle CBP=60^\circ$，从而 $\angle ABP=30^\circ$.

在 $\triangle APB$ 中，∵ $AB=\sqrt{3}$，$PB=\dfrac{1}{2}$，$\angle ABP=30^\circ$，∴由余弦定理可得：$PA^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cos30^\circ$.

即 $PA^2=3+\dfrac{1}{4}-2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{7}{4}$，开方可得：$PA=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

例 18.25（乙 1416）如图 18.8 所示，为测量山高 MN，选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN=60^\circ$，C 点的仰角 $\angle CAB=45^\circ$ 及 $\angle MAC=75^\circ$；从 C 点测得 $\angle MCA=60^\circ$. 已知山高 $BC=100\text{m}$，则山高 $MN=$________ m.

解析：在 Rt$\triangle ABC$ 中，∵ $BC=100\text{m}$，$\angle CAB=45^\circ$，∴ $AC=100\sqrt{2}\text{m}$.

在 $\triangle MAC$ 中，由正弦定理可得：$\dfrac{AM}{\sin60^\circ}=\dfrac{AC}{\sin(180^\circ-60^\circ-75^\circ)}$.

解得：$AM=\dfrac{\sin60^\circ}{\sin45^\circ}AC=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times100\sqrt{2}=100\sqrt{3}\text{m}$.

在 Rt$\triangle MAN$ 中，$MN=AM\sin60^\circ=100\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=150\text{m}$.

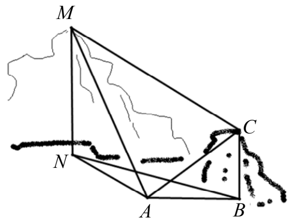


图 18.8

例 18.26 （甲 1417-1）四边形 $ABCD$ 的内角 $\angle A$ 与 $\angle C$ 互补，$AB=1$，$BC=3$，$CD=DA=2$. 求 $\angle C$ 和 BD.

解析 1：如图 18.9 所示，设 $BD=x$，则在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中，由余弦定理可得：$\cos A=\dfrac{1^2+2^2-x^2}{2\times1\times2}$，

$\cos C=\dfrac{2^2+3^2-x^2}{2\times2\times3}$．

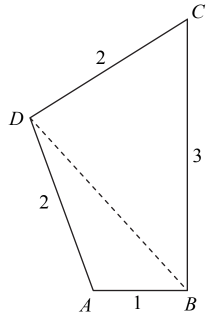


图 18.9

又∵题设 $\angle A+\angle C=\pi$，∴ $\angle A=\pi-\angle C$，即 $\cos A=-\cos C$，亦即 $\cos A+\cos C=0$，因此 $\dfrac{5-x^2}{4}+\dfrac{13-x^2}{12}=0$，即 $15-3x^2+13-x^2=0$，解得：$x=\sqrt{7}$，即 $BD=\sqrt{7}$，再代入 $\cos C=\dfrac{2^2+3^2-x^2}{2\times2\times3}$ 可得：$\cos C=\dfrac{1}{2}$，解得：$\angle C=\dfrac{\pi}{3}$．

解析 2：设 $BD=x$，则在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中，由余弦定理可得：$x^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos A$，$x^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos C$．两式相等可得：$5-4\cos A=13-12\cos C$，又∵题设 $\angle A+\angle C=\pi$，∴ $\angle A=\pi-\angle C$，即 $\cos A=-\cos C$，代入上式可得：$5+4\cos C=13-12\cos C$，即 $16\cos C=8$，亦即 $\cos C=\dfrac{1}{2}$，解得：$\angle C=\dfrac{\pi}{3}$．再代入 $x^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos C=7$，解得：$x=\sqrt{7}$，即 $BD=\sqrt{7}$．

例 18.27 （甲 1567-2）$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 上的点，AD 平分 $\angle BAC$，$\triangle ABD$ 是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍．若 $AD=1$，$DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．求 BD 和 AC 的长．

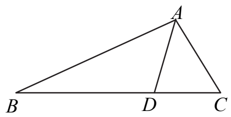


图 18.10

解析：如图 18.10 所示，∵ $S_{\triangle ABD}=2S_{\triangle ADC}$，∴ $BD=2DC=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$．

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理可得：$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos\angle ADC$，①

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理可得：$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle BDA$，②

又∵ $\angle BDA+\angle ADC=180^\circ$，∴ $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDA$．

（1）利用 $AB=2AC$ 和 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDA$，$\dfrac{②}{①}$ 消去 $\cos\angle ADC$ 可得：$\dfrac{(2AC)^2-AD^2-BD^2}{AC^2-AD^2-DC^2}=-\dfrac{BD}{DC}$，将 $AD=1$，$DC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$BD=2DC=\sqrt{2}$ 代入上式可得：$\dfrac{4AC^2-1-2}{AC^2-1-\frac{1}{2}}=-\dfrac{2}{1}$，化简可得：$AC^2=1$，解得：$AC=1$．

（2）利用 $BD=2DC$ 及 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDA$，②+2×①可得：$(2AC)^2+2AC^2=3AD^2+BD^2+2DC^2$，即 $6AC^2=3\times1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=6$．解得：$AC=1$．

例 18.28 （乙 1566）在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=75^\circ$，$BC=2$，则 AB 的取值范围是__________．

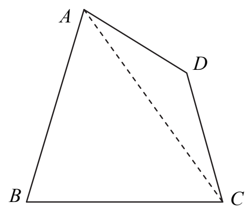


图 18.11

解析 1：（**分析法**）如图 18.11 所示，连接 AC，且设 $\angle BAC=\alpha$，则 $\angle ACB=105^\circ-\alpha$．

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可得：$\dfrac{AB}{\sin\left(105^\circ-\alpha\right)}=\dfrac{BC}{\sin\alpha}$．

将 $BC=2$ 代入上式，并化简可得：

$AB=\dfrac{2\sin\left(105^\circ-\alpha\right)}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sin105^\circ\cos\alpha-2\cos105^\circ\sin\alpha}{\sin\alpha}$．

∵ $\sin105^\circ=\cos15^\circ=\sqrt{\dfrac{\cos30^\circ+1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\dfrac{8+4\sqrt{3}}{16}}=\sqrt{\dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

$\cos105^\circ=-\sqrt{1-\sin^2105^\circ}=-\sqrt{\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}}=-\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$，∴ $AB=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$．

$\because \angle ACB = 105^\circ - \alpha < 75^\circ$，$\therefore \alpha > 30^\circ$，$\tan\alpha > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\dfrac{1}{\tan\alpha} < \sqrt{3}$.

$\therefore AB = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} < \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

又$\because \alpha < 75^\circ$，$\therefore \tan\alpha < \tan 75^\circ = \dfrac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$，即 $\dfrac{1}{\tan\alpha} > \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

$\therefore AB = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{\tan\alpha} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} > \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$.

综上所述，$\sqrt{6}-\sqrt{2} < AB < \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

解析 2：（特殊值法）如图 18.12 所示，$\because$题设 $BC = 2$，$\therefore$先画 $BC = 2$，再作 $\angle B = \angle C = 75^\circ$ 交于点 E，在 BE 上取点 A，作 $\angle A = 75^\circ$ 交 CE 于点 D.

平移 AD，当点 A 与点 D 重合于 E 点时，AB 最长.

在 $\triangle BCE$ 中，$\angle B = \angle C = 75^\circ$，$\angle E = 30^\circ$，$BC = 2$，由正弦定理可得：$\dfrac{BC}{\sin\angle E} = \dfrac{BE}{\sin\angle C}$，即 $\dfrac{2}{\sin 30^\circ} = \dfrac{BE}{\sin 75^\circ}$，解得：$BE = \sqrt{6}+\sqrt{2}$，平移 AD，当点 D 与点 C 重合时，AB 最短，此时与 AB 交于点 F.

在$\triangle BCF$ 中，$\angle B = \angle BFC = 75^\circ$，$\angle FCB = 30^\circ$.

由正弦定理可得：$\dfrac{BF}{\sin\angle FCB} = \dfrac{BC}{\sin\angle BFC}$，即 $\dfrac{BF}{\sin 30^\circ} = \dfrac{2}{\sin 75^\circ}$，解得：$BF = \sqrt{6}-\sqrt{2}$，所以 AB 的取值范围为$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}, \sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

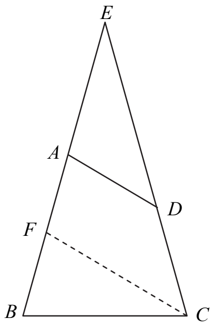


图 18.12

例 18.29（沪 1610）已知$\triangle ABC$ 的三边长分别为 3，5，7，则该三角形的外接圆半径等于____.

解析：设 $a = 3$，$b = 5$，$c = 7$，则 $\angle A < \angle B < \angle C$．　设定三个边长，利用大边对大角

由余弦定理 $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 可得：　$\because$三角形中最小的角是锐角，$\therefore$可以回避“正、负”

$\cos A = \dfrac{5^2+7^2-3^2}{2\times5\times7} = \dfrac{65}{70} = \dfrac{13}{14}$，从而 $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\dfrac{13^2}{14^2}} = \dfrac{\sqrt{14+13}}{14} = \dfrac{\sqrt{27}}{14} = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$.

$\because \angle A$是锐角，$\therefore$取“正”

由正弦定理 $2R = \dfrac{a}{\sin A}$ 可得：$R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{3\times14}{2\times3\sqrt{3}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$．　牢记正弦定理的意义

问题 3 求三角形的周长

问题分析：求三角形的周长问题，关键是要以三角形的三条边为目标.

条件 3.1　给定三角形的面积和一条边长及其对角

条件分析：当给定三角形的面积和一条边长及其对角时，往往需要借助三角形面积公式求得两邻边的乘积，再借助余弦定理求出两邻边的平方和，最后利用基本公式整体求出两邻边的和.

例 18.30（乙 1667-2）$\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，已知 $\angle C = \dfrac{\pi}{3}$．若 $c = \sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求$\triangle ABC$ 的周长.

解析：$\because$题设 $c = \sqrt{7}$，目标要求$\triangle ABC$ 的周长，$\therefore$问题转化为求 $a + b$．　整体思想

又∵题设$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，∴由三角形面积公式可得：$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，将$\angle C=\frac{\pi}{3}$代入上式可得：$ab=6$．由余弦定理$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$可得：$a^2+b^2=2ab\cos C+c^2$，将$ab=6$，$\cos C=\frac{1}{2}$，$c=\sqrt{7}$代入上式可得：$a^2+b^2=2\times 6\times\frac{1}{2}+\left(\sqrt{7}\right)^2=13$．故$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=13+2\times 6=25$，开方可得：$a+b=5$，因此，$a+b+c=5+\sqrt{7}$，即$\triangle ABC$的周长为$5+\sqrt{7}$．

条件 3.2　给定三角形的面积公式和一条边及其两个邻角的正弦乘积和余弦乘积

条件分析：利用已知两个角的正弦乘积和余弦乘积之和及两角和余弦公式和三角形内角和定理求出三角形的第三角.

例 18.31　（乙 1767-2）$\triangle ABC$的内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别为a，b，c，已知$\triangle ABC$的面积为$\frac{a^2}{3\sin A}$，且$\sin B\sin C=\frac{2}{3}$．若$6\cos B\cos C=1$，$a=3$，求$\triangle ABC$的周长.

解析：由题设$6\cos B\cos C=1$可得：$\cos B\cos C=\frac{1}{6}$，结合已知$\sin B\sin C=\frac{2}{3}$可得：　从条件出发

$\cos(B+C)=\cos B\cos C-\sin B\sin C=\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}$，　和角公式逆用

因此$\angle B+\angle C=\frac{2\pi}{3}$，所以$\angle A=\frac{\pi}{3}$．　三角形内角和为$180^\circ$

由题设可得：$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{a^2}{3\sin A}$，及题设$a=3$可得：　从条件出发

$bc=8$．由余弦定理可得：$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，　从平方公式联想到余弦定理

即$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$，亦即$b^2+c^2-bc=9$，从而$(b+c)^2=9+3bc$．　题设$a=3$

将$bc=8$代入上式可得：$b+c=\sqrt{33}$．　整体思想

从而$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=3+\sqrt{33}$．

问题 4　求三角形的面积

问题分析：求三角形的面积问题，关键是要根据所给条件找到三角形的底与高或者三角形的两条边及其夹角.

条件 4.1　给定三角形两角及一角的对边

条件分析：当给定三角形的两角及一角的对边时，先用正弦定理求出另一边，再利用三角形内角和定理确定两边的夹角.

例 18.32　（甲 1304）$\triangle ABC$的内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别为a，b，c，已知$b=2$，$\angle B=\frac{\pi}{6}$，$\angle C=\frac{\pi}{4}$，则$\triangle ABC$的面积为（　　）.

A．$2\sqrt{3}+2$　　B．$\sqrt{3}+1$　　C．$2\sqrt{3}-2$　　D．$\sqrt{3}-1$

解析：∵已知$b=2$，$\angle B=\frac{\pi}{6}$，$\angle C=\frac{\pi}{4}$，∴由正弦定理可得：$\frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}$，解得：$c=2\sqrt{2}$．

又$\because A=\pi-(B+C)$，$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}+1$．故选 B，不选 ACD.

条件 4.2　给定直角三角形的一条边及三个角的正弦关系式

条件分析：当给定直角三角形的一条边及三个角的正弦关系式时，首先必须根据三个角的正弦关系式利用正弦定理确定三边的关系.

例 18.33（乙 1517-2）已知 a，b，c 分别为$\triangle ABC$ 内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边，$\sin^2 B=2\sin A\sin C$．设$\angle B=90^\circ$，且 $a=\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$ 的面积.

解析：$\because$题设$\sin^2 B=2\sin A\sin C$，$\therefore$由正弦定理可得：$b^2=2ac$，　①　转化题设条件

又$\because \angle B=90^\circ$，$\therefore$由勾股定理可得：$b^2=a^2+c^2$.　②　转化题设条件

由①②可得：$a^2+c^2=2ac$.　消去斜边 b，确定两直角边关系便于求面积

解得：$a=c$．又$\because$题设 $a=\sqrt{2}$，$\therefore c=\sqrt{2}$，因此 Rt$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}ac=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

例 18.34（乙 1816）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$，$b^2+c^2-a^2=8$，则$\triangle ABC$ 的面积为________.

解析：$\because$题设 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$，

$\therefore$由正弦定理将角化成边可得：$bc+cb=4abc$，解得：$a=\frac{1}{2}$.　①

由正弦定理将边化成角可得：$\sin B\sin C+\sin C\sin B=4\sin A\sin B\sin C$，解得：$\sin A=\frac{1}{2}$.　②

又$\because$题设 $b^2+c^2-a^2=8$，$\therefore$由余弦定理可得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8}{2bc}>0$.　③

又$\because \sin A=\frac{1}{2}$，$\therefore$由三角公式可得：$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　④

由③④两式可得：$\frac{8}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$bc=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.　将 bc 视为整体

由三角形面积公式可得：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.　三角形面积公式

条件 4.3　给定三角形的一条边及其对角

条件分析：当给定直角三角形的一条边及三个角的正弦关系式时，首先必须根据三个角的正弦关系式利用正弦定理确定三边的关系.

例 18.35（甲 1367-2）$\triangle ABC$ 的内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别为 a，b，c，已知$\angle B=\frac{\pi}{4}$．若 $b=2$，求$\triangle ABC$ 面积的最大值.

解析：$\because\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{4}ac$，$\therefore$求$\triangle ABC$ 面积的最大值问题转化为求 ac 的最大值.

$\because$题设 $b=2$，联想到余弦定理中有 ac，$\therefore$由余弦定理可得：$2^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\frac{\pi}{4}$，即 $a^2+c^2=4+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}ac$，又$\because a^2+c^2\geqslant 2ac$，$\therefore 4+\sqrt{2}ac\geqslant 2ac$，即$\left(2-\sqrt{2}\right)ac\leqslant 4$，

亦即 $ac\leqslant\frac{4}{2-\sqrt{2}}=2\left(2+\sqrt{2}\right)$.

当$a=c$时，$(ac)_{\max}=2\left(2+\sqrt{2}\right)$，$S_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{4}ac=\frac{\sqrt{2}}{4}\times2\left(2+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+1$．

例 18.36 （乙 1466）已知a，b，c分别为$\triangle ABC$的三个内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边，$a=2$，且$(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，则$\triangle ABC$面积的最大值为_________.

解析：$\because a=2$，且$(2+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，$\therefore$由正弦定理可得：$(a+b)(a-b)=(c-b)c$，化简可得：$b^2+c^2-a^2=bc$．据此，应该想到利用余弦定理可得$\cos A=\frac{1}{2}$，进而得$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

因此，$\triangle ABC$的面积为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc$．再由$b^2+c^2-a^2=bc$可得：$b^2+c^2=a^2+bc$．

又$\because b^2+c^2\geqslant 2bc$，$\therefore a^2+bc\geqslant 2bc$，即$bc\leqslant a^2=4$．

故$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$，$\triangle ABC$面积的最大值为$\sqrt{3}$．

条件 4.4　给定多个三角形

条件分析：当给定多个三角形时，需要关注相邻两个三角形的公共边或者具有公共边的两个三角形.

例 18.37 （丙 1767-2）$\triangle ABC$的内角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边分别为a，b，c，已知$a=2\sqrt{7}$，$b=2$，$c=4$且$\angle A=\frac{2\pi}{3}$．设D为BC边上一点，且$AD\perp AC$，求$\triangle ABD$的面积.

解析：如图 18.13 所示，由题设可得$\angle CAD=\frac{\pi}{2}$，所以$\angle BAD=\angle BAC-\angle CAD=\frac{\pi}{6}$．

由三角形面积公式可得：

$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times4\times AD\times\frac{1}{2}=AD$，　①

$S_{\triangle DAC}=\frac{1}{2}AC\cdot AD=\frac{1}{2}\times2AD=AD$，　②

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times4\times2\times\sin\frac{2\pi}{3}=2\sqrt{3}$．　③

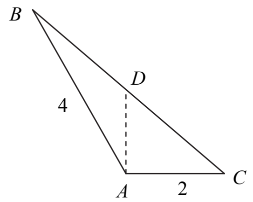


图 18.13

由①②可得：$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle DCA}$．又$\because S_{\triangle ABD}+S_{\triangle DCA}=S_{\triangle ABC}$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$．即$\triangle ABD$的面积为$\sqrt{3}$．

例 18.38 （甲 1417-2）四边形$ABCD$的内角$\angle A$与$\angle C$互补，$AB=1$，$BC=3$，$CD=DA=2$，且$\angle C=\frac{\pi}{3}$，$BD=\sqrt{7}$．求四边形$ABCD$的面积.

解析：如图 18.14 所示，$\because \angle C=\frac{\pi}{3}$，且$\angle A+\angle C=\pi$，$\therefore \sin A=\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}CB\cdot CD\cdot\sin C=\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

因此，四边形$ABCD$的面积$S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$．

所以四边形$ABCD$的面积为$2\sqrt{3}$．

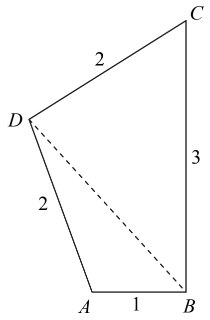


图 18.14

例 18.39 （乙 1362）设$\triangle A_nB_nC_n$的三边长分别为a_n，b_n，c_n，$\triangle A_nB_nC_n$的面积为S_n，$n=1,2,3,\cdots$．若$b_1>c_1$，$b_1+c_1=2a_1$，$a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2}$，$c_{n+1}=\frac{b_n+a_n}{2}$，则（　）.

A．$\{S_n\}$ 为递减数列

B．$\{S_n\}$ 为递增数列

C．$\{S_{2n-1}\}$ 为递增数列，$\{S_{2n}\}$ 为递减数列

D．$\{S_{2n-1}\}$ 为递减数列，$\{S_{2n}\}$ 为递增数列

解析：$\because b_1 > c_1$，$b_1 + c_1 = 2a_1$，$\therefore b_1 > a_1$，$c_1 < a_1$，即 $b_1 > a_1 > c_1$．

又 $\because a_{n+1} = a_n$，$\therefore a_{n+1} = a_n = \cdots = a_1$．

$\because b_{n+1} = \dfrac{c_n + a_n}{2}$，$c_{n+1} = \dfrac{b_n + a_n}{2}$，$\therefore b_{n+1} + c_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n + c_n}{2} = a_1 + \dfrac{b_n + c_n}{2}$，

$\because b_1 + c_1 = 2a_1$，$\therefore b_2 + c_2 = 2a_1$，……，$b_n + c_n = 2a_1$，$\therefore a_n + b_n + c_n = 3a_1$．

由此可见：$\triangle A_nB_nC_n$ 是半周长恒为 $p = \dfrac{3}{2}a_1$ 的一组三角形．

由海伦公式可得：三角形的面积为 $S_n = \sqrt{p(p-a_n)(p-b_n)(p-c_n)}$．

$\because$ 其中 $p = \dfrac{3}{2}a_1$ 和 $(p - a_n) = \dfrac{1}{2}a_1$ 均为定值，

$\therefore$ 令 $M(n) = (p-b_n)(p-c_n)$，则 $M(n) = p^2 - (b_n + c_n)p + b_nc_n = p^2 - (2p - a_1)p + b_nc_n$．

$\because b_n + c_n = 2a_1$，$\therefore b_n = 2a_1 - c_n$，即 $b_nc_n = -c_n^2 + 2a_1c_n = c_n(2a_1 - c_n)$，显然，当 $c_n = a_1$ 时，b_nc_n 取得最大值．

$\because b_{n+1} = \dfrac{c_n + a_n}{2}$，$c_{n+1} = \dfrac{b_n + a_n}{2}$，$\therefore b_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{c_n - b_n}{2}$．

$\because b_1 > c_1$，$\therefore b_n > c_n$，当 $c_n < a_1$ 时，$b_nc_n = -c_n^2 + 2a_1c_n = c_n(2a_1 - c_n)$ 单调递增．

即 $\{S_n\}$ 为递增数列．故选 B，不选 ACD．

例 18.40（丙 1767-2）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $A = \dfrac{2\pi}{3}$，$a = 2\sqrt{7}$，$b = 2$，$c = 4$，设 D 为 BC 边上一点，且 $AD \perp AC$，求 $\triangle ABD$ 的面积．

解析：由题设可得：$\angle CAD = \dfrac{\pi}{2}$，所以 $\angle BAD = \angle BAC - \angle CAD = \dfrac{\pi}{6}$．

故 $\triangle ABD$ 的面积与 $\triangle ACD$ 的面积比为 $\dfrac{\frac{1}{2}AB \cdot AD\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}AC \cdot AD} = 1$．

又 $\because \triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \sin\angle BAC = 2\sqrt{3}$，$\therefore \triangle ABD$ 的面积为 $\sqrt{3}$．

第 19 题　统计与概率应用背景

19

背景知识

抽样方法

简单随机抽样：一般地，设一个总体含有 N 个个体，从中逐个不放回地抽取 n 个个体作为样本 $(n \leqslant N)$，如果每次抽取时总体内的每个个体被抽到的机会都相等，那么就把这种抽样方法叫做简单随机抽样．最常用的简单随机抽样方法是抽签法和随机数表法．

系统抽样：假设要从容量为 N 的总体中抽取容量为 n 的样本，我们可以按下列步骤进行系统抽样：①先将总体的 N 个个体编号；②确定分段间隔 k，对编号进行分段，当 $\dfrac{N}{n}$ 是整数时，取 $k=\dfrac{N}{n}$；③在第 1 段用简单随机抽样抽取第一个个体编号 $l(l \leqslant k)$；④按照一定的规则抽取样本，通常是将 l 加上间隔 k 得到第 2 个个体编号 $(l+k)$，再加 k 得到第 3 个个体编号 $(l+2k)$，依次进行下去，直到获取 n 个个体．

分层抽样：在抽样时，将总体分成互不交叉的层，然后按照一定的比例，从各层独立地抽取一定数量的个体，将各层取出的个体合在一起作为样本，这种抽取方法是一种分层抽样．当总体是由差异明显的几个部分组成时，往往选用分层抽样的方法．

用样本估计总体

（1）用样本频率分布估计总体频率分布．

①频数：将一批数据按照要求分为若干组，各组内数据的个数叫做该组的频数．

②频率：每组频数除以全体数据的个数的值叫做该组的频率．

③频率分布：根据随机抽样所抽样本的大小，分别计算某一事件出现的频率，这些频率的分布规律（取值状况），叫做样本的频率分布．

④频率分布直方图：用来反映样本频率分布的直方图称为频率分布直方图．

⑤频率分布折线图：连接频率分布直方图中各小长方形上端中点所得到的折线，称为频率分布折线图．

⑥总体密度曲线：一般地，总体的个数越多，所取得的样本的容量就越大，分的组数就越多，随着样本容量和组数的增加，相应的频率分布折线图会越来越接近于一条光滑的曲线，这条曲线称为总体密度曲线．

⑦茎叶图：当数据有两位有效数字时，用中间的数字表示十位数，即第一位有效数字，两边的数字表示个位数，即第二位有效数字．由于这种图的中间部分像植物的茎，两边的部分像植物的叶子，因此通常把这样的图称为茎叶图．

（2）用样本的数字特征估计总体的数字特征．

①平均数：一组数据的总和除以这组数据的个数所得的商就是平均数．

②中位数：如果将一组数据按从小到大的顺序依次排列，当数据有奇数个时，处在最中间的一个数，或者当数据有偶数个时，处在最中间的两个数的平均数，就是这组数据的中位数．

③众数：在一批数据中，出现次数最多的数叫做众数（如果有多个数字出现的次数一样多，那么这组数据就有多个众数；如果一组数据中每个数据出现的次数都一样多，那么这组数据就没有众数）．

④极差：极差就是一组数据中最大数与最小数之间的差．

⑤方差：设一组数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$，则这组数据的方差为

$s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$.

⑥标准差：标准差是样本数据到平均数的一种平均距离，它用来描述样本数据的离散程度，也可以被理解为一组数据的稳定程度.

变量间的相关关系

散点图：在以两个变量作为横、纵坐标轴建立平面直角坐标系中，描出两个变量的对应点所得到的图形叫做散点图.

正相关：在散点图中，散点分布在从左下角到右上角的区域，两个变量的这种关系称为正相关.

负相关：在散点图中，散点分布在从左上角到右下角的区域，两个变量的这种关系称为负相关.

相关关系：自变量取值一定时，因变量的取值带有一定的随机性的两个变量之间的关系叫做相关关系.

线性相关关系：如果散点图中点的分布从整体上看基本在一条直线附近，我们就称这两个变量之间具有线性相关关系，这条直线叫做回归直线.

最小二乘法：求回归直线使得样本数据的点到回归直线的距离的平方和最小的方法叫做最小二乘法.

回归直线方程：$\hat{y}=bx+a$，其中斜率 $b=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，截距 $a=\overline{y}-b\overline{x}$，即 $\overline{y}=b\overline{x}+a$，显然回归直线过点 $\left(\overline{x},\overline{y}\right)$.

相关系数：为了衡量两个变量之间的线性相关程度，对于变量 y 与 x 的一组观测值，我们把 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}$ 叫做变量 y 与 x 的相关系数，简称相关系数.

分类变量：如果某种变量的不同的“值”表示个体所属的不同类别，那么这样的变量称为分类变量.

2×2 列联表：一般地，假设有两个分类变量 X 和 Y，他们可能的取值分别为 $\{x_1,y_1\}$ 和 $\{x_2,y_2\}$，其样本频数列联表为表 19.1.

表 19.1

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

独立性检验：利用随机变量 $K^2=\frac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$（读作“卡方”）来确定在多大程度上可以认为“两个分类变量有关系”的方法称为独立性检验. 若 $K^2\geqslant10.828$，则有 99.9%的把握“认为两个分类变量有关”；若 $K^2\geqslant7.879$，则有 99.5%的把握；若 $K^2\geqslant6.635$，则有 99%的把握；若 $K^2\geqslant5.024$，则有 97.5%的把握；若 $K^2\geqslant3.841$，则有 95%的把握；若 $K^2\geqslant2.706$，则有 90%的把握；……

随机变量

（1）在随机试验中，随着试验结果的变化而变化的变量称为随机变量.

（2）所有取值可以一一列出的随机变量称为离散型随机变量.

（3）离散型随机变量 X 的分布用所有可能取值的概率分布来表示，简称为离散型随机变量 X 的分布列.

（4）两点分布：若随机变量 X 的取值只有 0 和 1，则称其分布为两点分布，且称 $P(X=1)$（即随

机变量 X 取值为 1 的概率）为成功概率.

（5）独立重复试验与二项分布：在相同的条件下，重复地做 n 次试验，各次试验的结果相互独立，则称它们为 n 次独立试验．如果在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，那么在 n 次独立重复试验中事件 A 发生 k 次的概率为 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$．一般地，在 n 次独立重复试验中，用 X 表示事件 A 发生的次数，设每次试验中事件 A 发生的概率为 p，则在 n 次独立重复试验中事件 A 发生 k 次的概率为 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$．此时，称随机变量 X 服从二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$．一般地，在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中恰有 X 件次品，则事件 $\{X=k\}$ 发生的概率为 $P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}(k=0,1,2,\cdots,m)$，其中 $m=\min\{M,n\}$，且 $n\leqslant N$，$M\leqslant N$，n,M，$N\in\mathbf{N}^*$，称 X 的分布列为超几何分布列．如果随机变量 X 的分布列为超几何分布，则称随机变量 X 服从超几何分布.

离散型随机变量的期望与方差

（1）若离散型随机变量 $X=x_i$ 的概率为 $P=p_i$，则称 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$ 为随机变量 X 的均值或数学期望，简称期望．（2）如果离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，且取这些值的概率分别是 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，那么就把 $D(X)=(x_1-E(X))^2\cdot p_1+(x_2-E(X))^2\cdot p_2+\cdots+(x_n-E(X))^2\cdot p_n$ 称为随机变量 X 的方差，$D(X)$ 的算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 叫做随机变量的标准差，记作 $\sigma(X)$．（3）若 X 服从两点分布，则 $D(X)=p(1-p)$；若 X 服从二项分布，即 $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$，$D(X)=np(1-p)$；若服从参数为 N，M，n 的超几何分布，则 $E(X)=\dfrac{nM}{N}$．（4）随机变量的方差和标准差反映了随机变量的所有取值偏离均值的平均程度.

正态分布

正态曲线：函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图像称为正态分布密度曲线，简称正态曲线，其中实数 μ，$\sigma(\sigma>0)$ 是表示总体的平均数与标准差的参数.

正态分布：一般地，如果对于任何实数 $a<b$，随机变量 X 满足 $P(a<X\leqslant b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，则称 X 的分布为正态分布，记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

正态分布概率：$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9974$.

问题 1 选择抽样方法

问题分析：抽样方法的选择需要根据抽样（数据）对象、抽样（分析）目的和“搅拌均匀”（样本推断总体）的原则进行选择.

条件 1.1 给定抽样数据具有显著特征

条件分析：对于具有显著特征的数据需要根据特征属性进行分层抽样.

例 19.1（乙 1353）为了解某地区中小学生的视力情况，拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查，事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异，而男女生视力情况差异不大．在下面的抽样方法中，最合理的抽样方法是（ ）.

A．简单随机抽样　　B．按性别分层抽样　　C．按学段分层抽样　　D．系统抽样

解析：因为“该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异”“而男女生视力情况差异不大”，所以需要按照小学、初中、高中三个学段进行分层抽样．故选 C，不选 ABD．

例 19.2（丙 1814）某公司有大量客户，且不同年龄段的客户对其服务的评价有较大差异．为了解客户的评价，该公司准备进行抽样调查，可供选择的抽样方法有简单随机抽样、分层抽样和系统抽样，则最合适的抽样方法是________．

解析：∵题设不同年龄段的客户对其服务的评价有较大差异，∴可按年龄段进行分层抽样．

> **经验总结**：对有显著特征的数据需要分层抽样，分层的依据来自显著特征的属性；对于没有明确要求的采用简单随机抽样法(抽签法、随机数表法)；对于需要进行系统分析的数据采用系统抽样法(系统编号、等距抽样)．

问题 2 绘制直方图

问题分析：对于绘制统计直方图的问题关键在于区别是绘制“频数分布直方图”还是“频率分布直方图”，所谓“频率分布”是指“频数分布”占样本数量的百分比．

条件 2.1　给定分组频数表

条件分析：当给定频数分布表时，需要将频数分布除以样本数量转化为频率分布表．

例 19.3（乙 1418-1）从企业生产的某种产品中抽取 100 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量表得如下频数分布表，如表 19.2 所示．

表 19.2

质量指标值分组	[75,85)	[85,95)	[95,105)	[105,115)	[115,125)
频数	6	26	38	22	8

在答题卡［如图 19.1（a）所示］上作出这些数据的频率分布直方图．

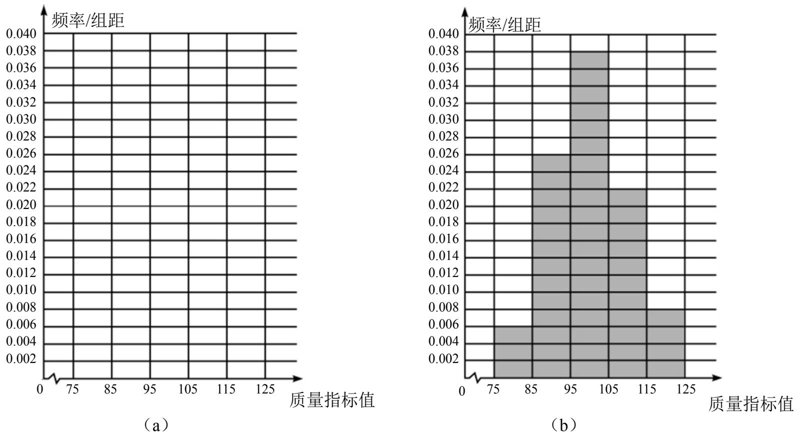


图 19.1

解析：∵ $频率=\dfrac{频数}{样本总数}$，∴上述频数分布表可以转化为频率分布表，如表 19.3 所示．

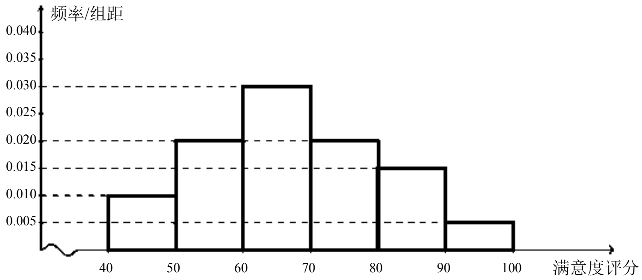
表 19.3

质量指标值分组	[75,85)	[85,95)	[95,105)	[105,115)	[115,125)
频数	6	26	38	22	8
频率（频数/100 件）	0.06	0.26	0.38	0.22	0.08

因此，样本质量的频率分布图如图 19.1（b）所示．

例 19.4 （甲 1518-1）某公司为了解用户对其产品的满意度，从 A、B 两地区分别随机调查了 40 个用户，根据用户对其产品的满意度的评分，得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频数分布表如图 19.2 所示．

A 地区用户满意度评分的频率分布直方图



B 地区用户满意度评分的频数分布表

满意度评分分组	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频数	2	8	14	10	6

图 19.2

在答题卡（见图 19.3）上作出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图，并通过此图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度．（不要求计算出具体值，只给出结论即可）

B 地区用户满意度评分的频率分布直方图

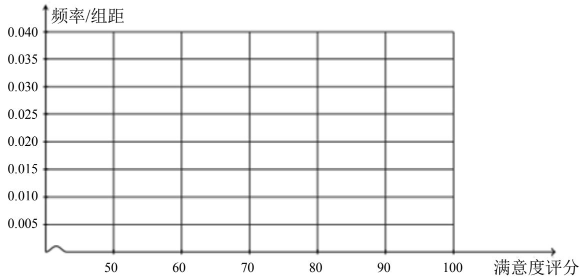


图 19.3

解析：$\because$ 从 A、B 两地区分别随机调查了 40 个用户，$\therefore$ 根据题给“B 地区用户满意度评分的频数分布表”可以计算出“B 地区用户满意度评分的频率分布表”，如表 19.4 所示．

表 19.4

满意度评分分组	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频数	2	8	14	10	6
频率/组距	0.005	0.020	0.035	0.025	0.015

据此作出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图如图 19.4 所示．

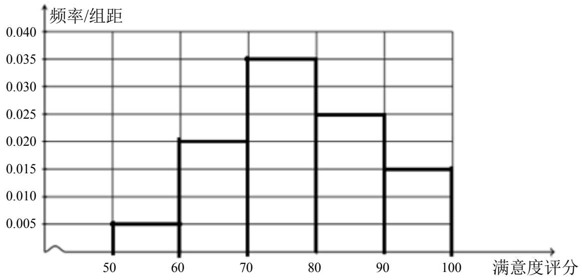


图 19.4

比较 A、B 两地区用户满意度评分的频率分布直方图可见：A 地区最高满意度频率为 0.030，且评分在 $[60,70)$，而 B 地区最高满意度频率为 0.035，且评分在 $[70,80)$，因此 B 地区满意度评分的平均值要高于 A 地区，并且 B 地区满意度评分比 A 地区满意度评分更为集中.

例 19.5　（乙 1819-1）某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据（单位：m^3）和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据，得到频数分布表如表 19.5 和表 19.6 所示.

表 19.5

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$	$[0.3,0.4)$	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$	$[0.6,0.7)$
频数	1	3	2	4	9	26	5

表 19.6

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$	$[0.3,0.4)$	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$
频数	1	5	13	10	16	5

在答题卡［见图 19.5（a）］上作出使用了节水龙头 50 天的日用水量数据的频率分布直方图.

解析：如图 19.5（b）所示的粗线即为所作的频率分布直方图.

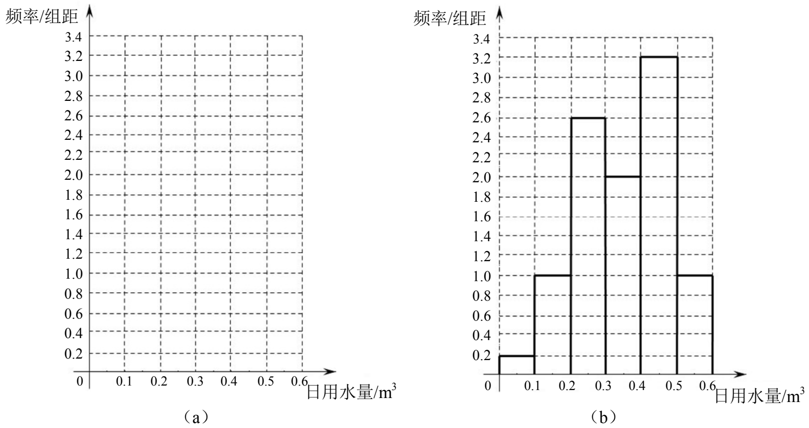


图 19.5

问题 3　绘制茎叶图

问题分析：茎叶图主要用于两组数据的对比分析，因此绘制茎叶图的关键是先确定两组数据个位数的取值范围和最小间距，从而确定茎叶图中“茎”的设计（起止范围和数据间隔）.

条件 3.1　给定两组监测数据

条件分析：当给定两组监测数据时，首先需要观察两组数据中个位数的最小值与最大值.

例 19.6　（乙 1318-2）为了比较两种治疗失眠症的药（分别称为 A 药、B 药）的疗效，随机地选取 20 位患者服用 A 药，20 位患者服用 B 药．这 40 位患者服用一段时间后，记录他们日平均增加的睡眠时间（单位：h），试验的观测结果如下．

服用 A 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间：

0.6　1.2　2.7　1.5　2.8　1.8　2.2　2.3　3.2　3.5

2.5　2.6　1.2　2.7　1.5　2.9　3.0　3.1　2.3　2.4

服用 B 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间：

3.2　1.7　1.9　0.8　0.9　2.4　1.2　2.6　1.3　1.4

1.6　0.5　1.8　0.6　2.1　1.1　2.5　1.2　2.7　0.5

根据上述数据可以分别计算两组数据的平均数为：$\overline{x}_{\mathrm{A}}=2.3$，$\overline{x}_{\mathrm{B}}=1.6$，从计算结果看 A 药的疗效更好．根据两组数据完成茎叶图，从茎叶图看，哪种药的疗效更好．

解析：将观测数据做成茎叶图如图 19.6 所示．

A 药		B 药
6	0.	8 9 5 6 5
2 5 8 2 5	1.	7 9 2 3 4 6 8 1 2
7 8 2 3 5 6 7 9 3 4	2.	4 6 1 5 7
2 5 0 1	3.	2

图 19.6

从茎叶图上来看，A 组的数据大部分（人）集中在睡眠时间增加 2 小时以上段，而 B 组的数据大部分（人）集中在睡眠时间增加 1 小时以上段．因此，A 药的效果更好．

问题 4 识读统计图

问题分析：根据不同类型统计图的作用，分别按照相应的意义进行识读.

条件 4.1　给定直方图

条件分析：统计直方图的作用主要是表示（横轴上）不同要素之间的差异，以及总体的变化趋势.

例 19.7　（甲 1503/53）根据图 19.7 给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化碳年排放量（单位：万吨）柱形图，判断以下结论中不正确的是（　　）.

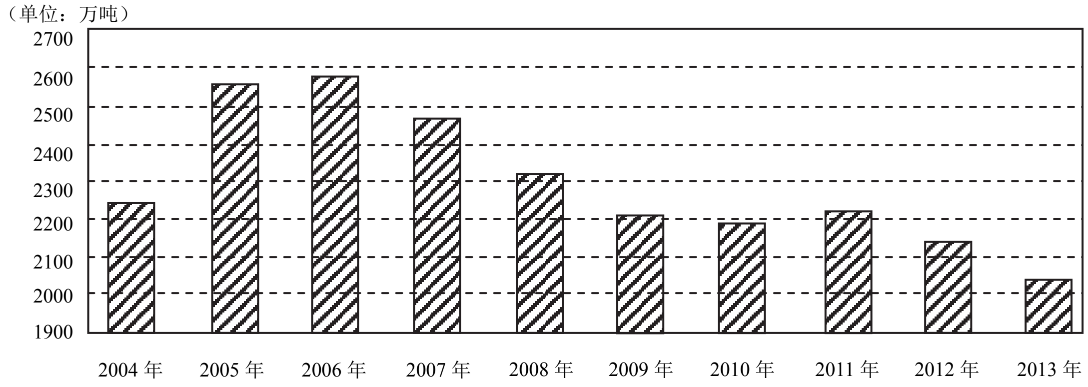


图 19.7

A．逐年比较，2008 年减少二氧化碳排放量的效果最显著

B．2007 年我国治理二氧化碳排放显现成效

C．2006 年以来我国二氧化碳年排放量呈减少趋势

D．2006 年以来我国二氧化碳年排放量与年份正相关

解析：A 选项：所谓减少排放量是指当年排放量与上一年度排放量的差值，显然 A 正确；

B 选项：∵从 2004 到 2006 年排放量在增加，而 2007 年排放量开始下降，∴B 正确；

C 选项：∵从 2006 年开始，除 2011 年外，排放量逐年下降，∴C 正确；

D 选项：∵从 2006 年开始，排放量基本上与年份呈现负相关，∴D 错误．故选 D，不选 ABC.

经验总结：对于需要确定“不正确”或“错误”选项的选择题，必须逐个选项排除.

条件 4.2　给定折线图

条件分析：统计折线图的作用主要是表示（横轴上）不同要素之间的总体变化趋势.

例 19.8（丙 1703/53）某城市为了解游客人数的变化规律，提高旅游服务质量，收集并整理了 2014 年 1 月至 2016 年 12 月期间月接待游客量（单位：万人）的数据，绘制了如图 19.8 所示的折线图.

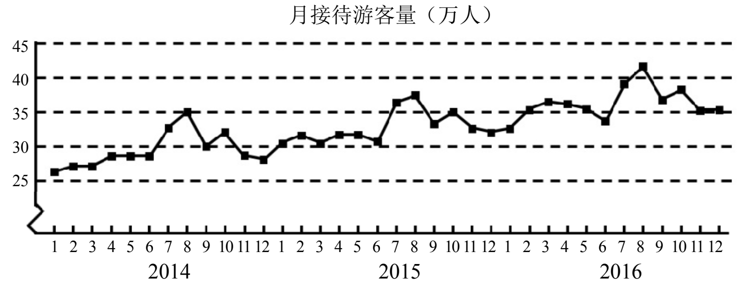


图 19.8

根据该折线图，下列结论错误的是（　）.

A．月接待游客量逐月增加

B．年接待游客量逐年增加

C．各年的月接待游客量高峰期大致在 7，8 月

D．各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月，波动性更小，变化比较平稳

解析：对于需要确定“不正确”或“错误”选项的问题，需要逐个进行排除.

A 选项：每年 7 月至 8 月折线图呈下降趋势，月接待游客量减少，选项 A 说法错误；

B 选项：折线图总体呈现出增长趋势，年接待（总）量逐年增加，选项 B 说法正确；

C 选项：每年接待游客量 7，8 月份达到最高点，即各年的月接待游客量高峰大致在 7、8 月，选项 C 说法正确；

D 选项：每年 1 月至 6 月的折线图基本平稳，月接待游客量波动性更小，7 月至 12 月折线图不平稳，月接待游客量波动性大，选项 D 说法正确．故选 A，不选择 BCD.

条件 4.3　给定雷达图

条件分析：统计雷达图的作用主要是表示多个统计指标在一组相同元素（若干轴线）上的变化趋势.

例 19.9（丙 1604/54）某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况，绘制了一年中各月平均最高气温和平均最低气温的雷达图，如图 19.9 所示．图中 A 点表示十月的平均最高气温约为 15℃，B 点表示四月的平均最低气温约为 5℃．下面叙述不正确的是（　）.

A．各月的平均最低气温都在 0℃以上

B．七月的平均温差比一月的平均温差大

C．三月和十一月的平均最高气温基本相同

D．平均最高气温高于 20℃的月份有 5 个

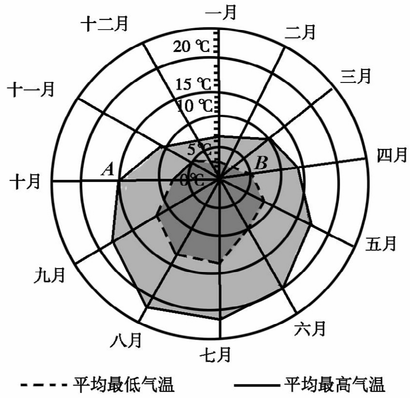


图 19.9

解析：因为每个月的平均最低气温要远低于当月平均最高气温，因此，图中深黑色区域的轮廓线表示的是最低气温，而浅黑色区域的轮廓线表示的是最高气温.

A 选项：∵ 各月的平均最低气温都在（中心点）0℃以上，∴ A 选项正确；

B 选项："七月的平均温差比一月的平均温差大"显然是正确的（温差用两线间距表示）；

C 选项："三月和十一月的平均最高气温（均约为 10℃）基本相同"是正确的；

D 选项：∵ 平均最高气温高于 20℃的月份有六、七、八 3 个月，∴ D 选项是错的.

故选 D，不选 ABC.

经验总结：对于需要确定"不正确"或"错误"选项的问题，需要逐个进行排除.

条件 4.4 给定饼图

条件分析：饼图的作用主要是表示多个统计指标在整体中所占的比例.

例 19.10 （乙 1803/53）某地区经过一年的新农村建设，农村的经济收入增加了一倍，实现翻番. 为更好地了解该地区农村的经济收入变化情况，统计了该地区新农村建设前后农村的经济收入构成比例，得到如图 19.10 所示饼图.

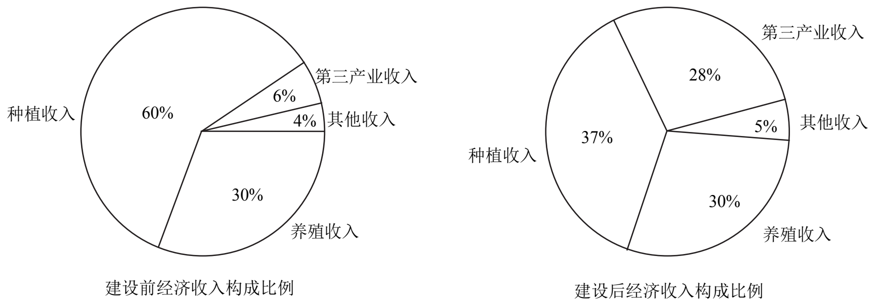


图 19.10

则下面结论中不正确的是（　）.

A．新农村建设后，种植收入减少

B．新农村建设后，其他收入增加了一倍以上

C．新农村建设后，养殖收入增加了一倍

D．新农村建设后，养殖收入与第三产业收入的总和超过了经济收入的一半

分析：∵需要确定"结论中不正确的"选项，∴必须逐项排除.

解析 1：思路：将新农村建设后的各项收入与建设前的各项收入进行对比.

∵题设新农村建设后经济收入增加了一倍，∴设建设前总收入为 x，则建设后总收入为 $2x$.

A 项：∵种植收入建设前为 $0.60x$ ，建设后为 $0.37\times 2x = 0.74x > 0.6x$ ，∴结论不正确；

B 项：∵其他收入建设前为 $0.04x$ ，建设后为 $0.05\times 2x = 0.10x > 2\times 0.4x$ ，∴结论正确；

C 项：∵养殖收入建设前为 $0.30x$ ，建设后为 $0.30\times 2x = 0.60x = 2\times 0.30x$ ，∴结论正确；

D 项：∵养殖收入与第三产业收入总和建设前为$0.36x$，建设后为$0.58\times 2x = 1.16x > 0.50\times 2x$，∴结论正确.

解法 2：思路：将新农村建设后的各项收入占建设前收入的比例与建设前的比例进行对比.

因为题设新农村建设后经济收入增加了一倍，所以建设后各项收入占建设前的比例也翻倍.

A 项：∵种植收入建设前占比为60%，建设后占（建设前）的比例是$37\%\times 2 = 74\% > 60\%$，∴结论不正确；

B 项：∵其他收入建设前占比为4%，建设后占（建设前）的比例是$5\%\times 2 = 10\% > 2\times 4\%$，∴结论正确；

C 项：∵养殖收入建设前占比为30%，建设后占（建设前）的比例是$30\%\times 2 = 60\%$，∴结论正确；

D 项：∵养殖收入与第三产业收入总和建设前占比为36%，建设后占（建设前）的比例是$58\%\times 2 = 116\% > 100\%$，∴结论正确.

故选 A，不选 BCD.

问题 5　求中位数、均值和标准差

条件 5.1　给定统计数据的茎叶图

条件分析：*统计数据的茎叶图的作用主要是表示两组数据的差异.*

例 19.11　（甲 1419-1）某市为了考核甲、乙两部门的工作情况，随机访问了 50 位市民．根据这 50 位市民对这两部门的评分（评分越高表明市民的评价越高），绘制茎叶图如图 19.11 所示.

甲部门		乙部门
	3	5 9
4	4	0 4 4 8
9 7	5	1 2 2 4 5 6 6 7 7 7 8 9
9 8 6 6 5 3 3 2 1 1 0	6	0 1 1 2 3 4 6 8 8
9 8 8 7 7 7 6 6 5 5 5 5 5 4 4 4 3 3 3 2 1 0 0	7	0 0 1 1 3 4 4 9
6 6 5 5 2 0 0	8	1 2 3 3 4 5
6 3 2 2 2 0	9	0 1 1 4 5 6
	10	0 0 0

图 19.11

分别估计该市的市民对甲、乙部门评分的中位数.

解析：由所给茎叶图可知，50 位市民对甲部门评分由小到大排序，排在第 25 位、第 26 位的是 75，故样本中位数为 75，所以该市的市民对甲部门评分的中位数的估计值是 75.

50 位市民对乙部门的评分由小到大排序，排在第 25 位、第 26 位的是 66、68．故样本中位数为$\dfrac{66+68}{2} = 67$，所以该市对乙部门评分的中位数的估计值是 67.

例 19.12　（丙 1818-2/68-2）某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了（单人独立）完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率，选取 40 名工人，将他们随机分成两组，每组 20 人，第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式．根据工人完成（该项）生产任务的工作时间（单位：分钟）绘制了如图 19.12 所示的茎叶图.

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	0 1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	1 4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

图 19.12

求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m，并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入表 19.7 中.（表中括号内数字为答案）

表 19.7

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	(15)	(5)
第二种生产方式	(5)	(15)

解析：因为 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 m 即 40 名工人完成任务所需的平均时间.

∵由茎叶图可知，两种生产方式的平均时间为 $\overline{T_1}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}t_1}{20}=84$，$\overline{T_2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}t_2}{20}=74.7$，

$$\therefore \overline{T}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}t_1+\sum\limits_{i=1}^{20}t_2}{40}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}t_1}{20}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}t_2}{20}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{T_1}+\overline{T_2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(84+74.7\right)\approx 80.$$

从茎叶图中，分别统计出完成任务所需时间超过 80 分钟和不超过 80 分钟的人数，并填入上表.

条件 5.2　给定 16 组数据及其均值和标准差

条件分析：利用所给数据及其均值和标准差进行综合计算.

例 19.13（乙 1719-2）为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每隔 30 min 从该生产线上随机抽取一个零件，并测量其尺寸（单位：cm）. 表 19.8 是检验员在一天内依次抽取的 16 个零件的尺寸.

表 19.8

抽取次序	1	2	3	4	5	6	7	8
零件尺寸	9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
抽取次序	9	10	11	12	13	14	15	16
零件尺寸	10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\overline{x}=\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2\right)}\approx 0.212$.

在一天内抽检的零件中，如果出现了尺寸在 $\left(\overline{x}-3s,\overline{x}+3s\right)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程中可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.

（ⅰ）从这一天抽检的结果看，是否需对当天的生产过程进行检查？

（ⅱ）在 $\left(\overline{x}-3s,\overline{x}+3s\right)$ 之外的数据称为离群值，试剔除离群值，估计这条生产线当天生产的零件尺寸的均值与标准差.（精确到 0.01）

解析：（ⅰ）由题设：$\overline{x}=9.97$，$s\approx 0.212$，因此，$\overline{x}-3s=9.97-0.636=9.334$，$\overline{x}+3s=9.97+0.636=10.606$. 即正常的尺寸范围是 $(9.334,10.606)$. 观察样本数据可以看出：抽取的第 13 个零件的尺寸 9.22 在 $(9.334,10.606)$ 以外，因此需对当天的生产过程进行检查.

（ⅱ）剔除第 13 个数据，剩下数据的平均数为 $\dfrac{(16\times 9.97-9.22)}{15}=10.02$，即这条生产线当天生产的零件

尺寸的均值的估计值为 10.02.

$\because$在未剔除异常数据前：$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2\right)}\approx 0.212$，即

$\sum_{i=1}^{16}x_i^2=16\times 0.212^2+16\times 9.97^2\approx 1591.134$.

$\therefore$在剔除第 13 个异常数据后，$\sum_{i=1}^{15}x_i^2=1591.134-9.22^2=1506.126$.

因此，剩下 15 组数据的样本标准差为

$s=\sqrt{\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{15}\left(\sum_{i=1}^{15}x_i^2-15\bar{x}^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{15}\times\left(1506.126-15\times 10.02^2\right)}=\sqrt{0.008}\approx 0.09$，即这条生产线当天生产的零件尺寸的标准差的估计值为$\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

例 19.14（乙 1769-2）为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）．根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$．在一天内抽检的零件中，如果出现了尺寸在$\left(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma\right)$之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程中可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查.

（ⅰ）试说明上述监控生产过程方法的合理性；

（ⅱ）下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得$\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\bar{x}^2\right)}\approx 0.212$，其中$x_i$为抽取的第$i$个零件的尺寸，$i=1,2,\cdots,16$.

用样本平均数$\bar{x}$作为μ的估计值$\hat{\mu}$，用样本标准差s作为σ的估计值$\hat{\sigma}$，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查.剔除$\left(\hat{\mu}-3\hat{\sigma},\hat{\mu}+3\hat{\sigma}\right)$之外的数据，用剩下的数据估计$\mu$和$\sigma$（精确到 0.01）.

附：若随机变量Z服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$P\left(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma\right)=0.997\,4$，$0.9974^{16}\approx 0.9592$，$\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

分析：（ⅰ）判断监控生产过程的方法的合理性，重点是考虑一天内抽取的 16 个零件中，出现尺寸在$\left(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma\right)$之外的概率是大还是小，若小即合理，若大就不合理；（ⅱ）根据题设条件算出μ的估计值和σ的估计值：剔除$\left(\hat{\mu}-3\hat{\sigma},\ \hat{\mu}+3\hat{\sigma}\right)$之外的数据 9.22，算出剩下数据的平均数，即为$\mu$的估计值；剔除$\left(\hat{\mu}-3\hat{\sigma},\ \hat{\mu}+3\hat{\sigma}\right)$之外的数据 9.22，算出剩下数据的样本标准差，即为σ的估计值.

解析：（ⅰ）因为题设正常生产状态下的零件尺寸符合正态分布，即一个零件尺寸在$\left(\hat{\mu}-3\hat{\sigma},\ \hat{\mu}+3\hat{\sigma}\right)$之外的概率为 0.0026．又由于零件的不合格数量X服从二项分布$X\sim B\left(16,0.0026\right)$，因此，由$P\left(X\geqslant 1\right)=1-P\left(X=0\right)$可得：$P\left(X\geqslant 1\right)=1-0.9974^{16}=1-0.9592=0.0408$．即一天内抽取的 16 个零件中，出现尺寸在$\left(\hat{\mu}-3\hat{\sigma},\hat{\mu}+3\hat{\sigma}\right)$之外的零件的概率只有 0.0408，发生的概率很小．因此一旦发生这种情况，就有理由认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查，可见上述监控生产过程的方法是合理的.

（ⅱ）由题设 16 组数据的$\bar{x}=9.97$，$s\approx 0.212$，因此，按题意“用样本平均数$\bar{x}$作为μ的估计值$\hat{\mu}$，用样本标准差s作为σ的估计值$\hat{\sigma}$”，可得：μ的估计值为$\hat{\mu}=9.97$，σ的估计值为$\hat{\sigma}=0.212$.

因此，$\hat{\mu}-3\hat{\sigma}=9.97-3\times 0.212=9.334$，$\hat{\mu}+3\hat{\sigma}=9.97+3\times 0.212=10.606$.

观察样本数据可以看出：有一个零件的尺寸 9.22 在$\left(9.334,10.606\right)$之外，因此需对当天的生产过程进行检查.

剔除数据 9.22 后，剩下 15 组数据的平均数为 $\dfrac{(16\times9.97-9.22)}{15}=10.02$，即这条生产线当天生产的（合格）零件尺寸的均值的估计值为 10.02．即 μ 的估计值为 $\hat{\mu}=10.02$．

又∵在未剔除异常数据前：$s=\sqrt{\dfrac{1}{16}\sum\limits_{i=1}^{16}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\left(\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2\right)}\approx0.212$，

即 $\sum\limits_{i=1}^{16}x_i^2=16\times0.212^2+16\times9.97^2\approx1591.134$．

∴在剔除异常数据 9.22 后，$\sum\limits_{i=1}^{15}x_i^2=1591.134-9.22^2=1506.126$．

因此，剩下 15 组数据的样本标准差为 $s=\sqrt{\dfrac{1}{15}\sum\limits_{i=1}^{15}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{15}\left(\sum\limits_{i=1}^{15}x_i^2-15\overline{x}^2\right)}$ $=\sqrt{\dfrac{1}{15}\times\left(1506.126-15\times10.02^2\right)}=\sqrt{0.008}\approx0.09$．即这条生产线当天生产的（合格）零件尺寸的标准差的估计值为 $\sqrt{0.008}\approx0.09$．即 σ 的估计值为 $\hat{\sigma}=\sqrt{0.008}\approx0.09$．

条件 5.3　给定统计直方图

条件分析：当给定统计直方图进行统计计算时，一般都设定或默认同一组的数据用该组数据的中点（中间）值作代表．

例 19.15　（乙 1418-2）在某企业生产的某种产品中抽取 100 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量表得如表 19.9 所示的频数分布表．

表 19.9

质量指标值分组	[75,85)	[85,95)	[95,105)	[105,115)	[115,125)
频数	6	26	38	22	8

在答题卡上作出这些数据的频率分布直方图．估计这种产品质量指标值的平均数及方差（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）．

解析：这些数据的频率分布直方图如图 19.13 所示．

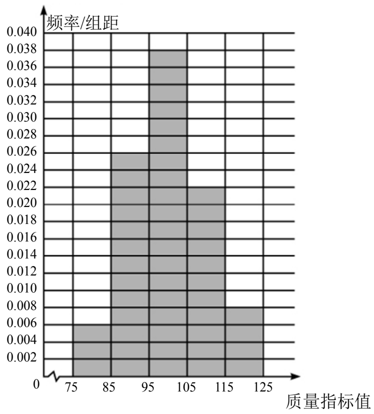


图 19.13

由于“同一组中的数据用该组区间的中间值作代表”，因此，样本质量指标值的平均数为：

$$\overline{x}=\frac{\dfrac{(75+85)}{2}\times6+\dfrac{(85+95)}{2}\times26+\dfrac{(95+105)}{2}\times38+\dfrac{(105+115)}{2}\times22+\dfrac{(115+125)}{2}\times8}{100}=100.$$

或者 $\bar{x}=80\times0.06+90\times0.26+100\times0.38+110\times0.22+120\times0.08=100$.

样本质量指标值的方差为：

$$s^2=\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2p_i=(-20)^2\times0.06+(-10)^2\times0.26+0^2\times0.38+10^2\times0.22+20^2\times0.08=104.$$

x_i 为第 i 组的中点值，$\bar{x}$ 为平均数，p_i 为第 i 组的频率

例 19.16 （乙 1468-1）从某企业的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量结果得如图 19.14 所示的频率分布直方图.

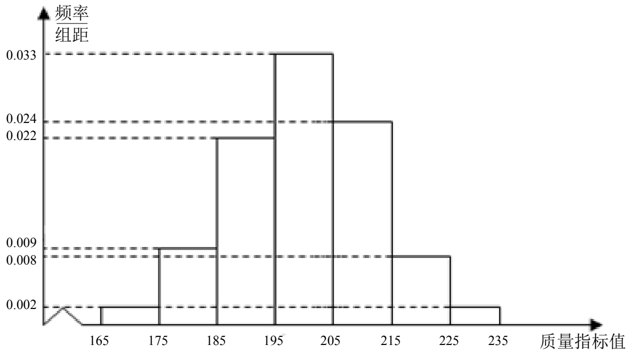


图 19.14

求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2（同一组数据用该区间的中间值作代表）.

解析：抽取产品质量指标值的样本平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2 分别为：

$$\bar{x}=170\times0.02+180\times0.09+190\times0.22+200\times0.33+210\times0.24+220\times0.08+230\times0.02=200.$$

$$s^2=\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2p_i$$

x_i 为第 i 组的中点值；$\bar{x}$ 为平均数；p_i 为第 i 组的频率

$$=(-30)^2\times0.02+(-20)^2\times0.09+(-10)^2\times0.22+0^2\times0.33+10^2\times0.24+20^2\times0.08+30^2\times0.02=150.$$

例 19.17 （甲 1768-3）海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg）. 其频率分布直方图如图 19.15 所示.

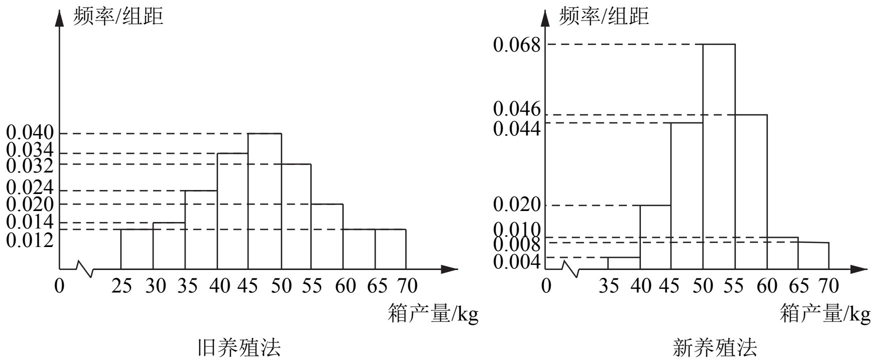


图 19.15

根据箱产量的频率分布直方图，求新养殖法箱产量的中位数的估计值（精确到 0.01）.

解析：因为在频率分布直方图中，“中位数”左右两边直方条的面积之和应该相等，且为 0.5，因此，首先根据新养殖法的箱产量频率分布直方图来估算相关面积：

①箱产量低于 50kg 的直方图的面积为：$(0.004+0.020+0.044)\times5=0.34<0.5$,

②箱产量低于 55kg 的直方图的面积为：$(0.004+0.020+0.044+0.068)\times5=0.68>0.50$.

因此，中位数应该在 $50\sim55$ 之间，设中位数为 x ，则 $50<x<55$ ，且 $0.34+0.068\times(x-50)=0.50$,

中位线左边的直方条面积之和为 0.5

解得：$x=50+\dfrac{0.50-0.34}{0.068}\approx 52.36\text{ kg}$，即新养殖法箱产量的中位数的估计值为 52.36kg.

条件 5.4　给定二项分布概率

条件分析：对于给定二项分布的概率求方差的问题，可以利用二项分布的方差公式 $D(X)=np(1-p)$ 直接进行计算.

例 19.18（甲 1763）一批产品的二等品率为 0.02，从这批产品中每次随机取一件，有放回地抽取 100 次，X 表示抽到的二等品件数，则 $DX=$____________.

解析：由题意可得，抽到二等品的件数符合二项分布，即 $X\sim B(100,0.02)$，由二项分布的方差公式可得：$DX=np(1-p)=100\times0.02\times(1-0.02)=100\times0.02\times0.98=1.96$.

> **经验总结：**利用频率分布直方图求众数、中位数和平均数时，应注意三点：①最高的小长方形底边中点的横坐标即众数；②中位数左边和右边的小长方形的面积和是相等的；③平均数是频率分布直方图的“重心”，等于频率分布直方图中每个小长方形的面积乘以小长方形底边中点的横坐标之和.

例 19.19（乙 1870-2）某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品，检验时，先从这箱产品中任取 20 件进行检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品进行检验，设每件产品为不合格品的概率都为 $p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立．已知 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $\dfrac{1}{10}$，现对一箱产品检验了 20 件，结果恰有 2 件不合格品．已知每件产品的检验费用为 2 元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.

（ⅰ）若不对该箱余下的产品进行检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X，求 EX；

（ⅱ）以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品进行检验？

解析：

（ⅰ）∵一箱 200 件中已检验 20 件，则剩余 180 件.

∴设剩余 80 件产品中不合格的产品为 N（件），则 N 服从二项分布 $N\sim B\left(180,\dfrac{1}{10}\right)$，从而不合格产品的期望值是 $E(N)=180\times\dfrac{1}{10}=18$.

∵题设：这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X，

∴ $E(x)$ 包括检验费用和赔偿费用两部分.

由题意：这一箱产品仅检测了 20 件，且每件检验费用为 2 元，故检验费用为 40 元.

又∵已检验的 20 件产品中恰有 2 件不合格，且未检验的 80 件中不合格的期望值是 18，

∴按每件 25 元计算赔偿总费用为 $25\times18=450$（元）.　　先前检出的 2 件没到用户手中，无须赔偿

因此，$E(x)=40+450=490$.

（ⅱ）∵题问：以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品进行检验？

∴先假设对剩余的 180 件产品进行检验，则 200 件产品检验总费用为 400 元.

∵ $400<E(x)=490$，∴应该对这箱剩余的所有产品进行检验.

问题 6　统计指标的选择

问题分析：统计指标的选择需要根据不同指标的意义（或作用）进行选择.

条件 6.1　给定统计指标的作用

条件分析： 按照统计指标的作用选用统计指标.

例 19.20　（乙 1702）为评估一种农作物的种植效果，选了 n 块地做试验田．这 n 块地的亩产量（单位：kg）分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，下面给出的指标中可以用来评估这种农作物亩产量稳定程度的是（　）.

A．$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数　　B．$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准差

C．$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的最大值　　D．$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的中位数

解析： 由于方差和标准差都可以用来反映一组数据偏离平均水平的程度，即表示一组数据偏离平均数的不稳定程度，因而它们也可以反向评估数据的稳定程度．因此，为了评估这种农作物亩产量稳定程度，可以选用的指标是标准差或方差．故选 B，不选 ACD.

> **经验总结：** 根据统计指标（样本特征数据）的意义（作用）进行选用.
> **众数：** 一组数据出现次数最多的数叫众数，众数反映一组数据的多数水平.
> **中位数：** 一组数据中间的数（起到分水岭的作用），中位数反映一组数据的中间水平.
> **平均数：** 反映一组数据的平均水平.
> **方差：** 反映一组数据偏离平均数的程度，用来衡量一批数据的波动大小.
> **标准差：** 方差的算术平方根，意义在于反映一组数据的离散（不稳定）程度.

问题 7　统计数据的应用

问题分析： 统计数据的应用主要集中在对一组数据与“标准”分布做对比分析和对两组数据进行对比分析.

条件 7.1　给定一组数据的频率分布直方图

条件分析： 当给定一组数据的频率分布直方图时，往往需要根据统计指标来确定不同范围指标的概率或比例.

例 19.21　（乙 1418-3）从某企业生产的某种产品中抽取 100 件，测量这些产品的一项质量指标值，由测量表得如表 19.10 所示的频数分布表.

表 19.10

质量指标值分组	[75,85)	[85,95)	[95,105)	[105,115)	[115,125)
频数	6	26	38	22	8

根据上表可作出这些数据的频率分布直方图，如图 19.16 所示.

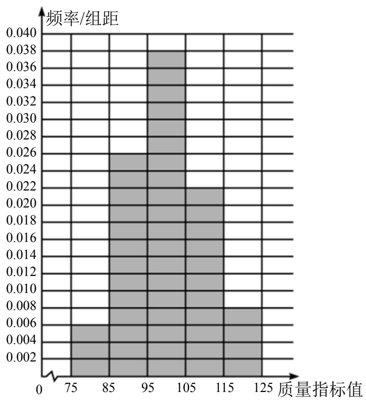


图 19.16

已估算出这种产品质量指标值的平均数和方差为 $\overline{x}=100$，$s^2=104$．根据以上抽样调查数据，能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%”的规定？

分析： 由于本题设定的质量指标“规定”是“质量指标值不低于 95 的……占 80%”，问题是“抽样结果”是否“达标”．因此，分析问题的思路可以有两条：一条是根据抽样数据，先计算质量指标不低于 95 的产品所占比例，然后将这个占比与“80%”进行比较；另一条是根据抽样数据，先计算占比为 80%的产品的质量指标上限是多少，然后将这个上限与 95 进行比较．关键是要看所给数据是按“质量指标”分组还是按“频数或频率”进行分组.

解析 1：（对于按“质量指标”分组的计算占比）

由于质量指标值不低于 95 的产品包括质量指标在$[95,105)[105,115)[115,125)$三组范围内的产品，而①这三组的 100 件产品的抽样频数为$38+22+8=68$，占比为$\dfrac{68}{100}=0.68<80\%$；②这三组的 100 件产品的抽样频率为$0.38+0.22+0.08=0.68<0.80$.

因此不能认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%”的规定.

解析 2：（对于按“频数或频率”分组的质量指标）

假设 100 件产品质量指标抽样结果如表 19.11 所示.

表 19.11

频数	6	26	38	22	8
质量指标值分组	[75,85)	[85,95)	[95,105)	[105,115)	[115,125)

对应占比的质量指标如表 19.12 所示.

表 19.12

占比	100%	94%	68%	30%	8%
质量指标值	不低于 75	不低于 85	不低于 95	不低于 105	不低于 115

由上表可见：占比 94%的产品质量指标值不低于 85，占比 68%的产品质量指标值不低于 95.

因此，无法确定占比 80%的质量指标值，从而不能认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%”的规定.

条件 7.2 给定两组监测数据

条件分析：当给定两组原始监测数据时，往往需要根据问题的要求选择相应的统计指标进行计算，进而做出分析和判断.

例 19.22 （乙 1318-1）为了比较两种治疗失眠症的药（分别称为 A 药，B 药）的疗效，随机地选取 20 位患者服用 A 药，20 位患者服用 B 药，这 40 位患者服用一段时间后，记录他们日平均增加的睡眠时间（单位：h），试验的观测结果如下.

服用 A 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间：

0.6 1.2 2.7 1.5 2.8 1.8 2.2 2.3 3.2 3.5

2.5 2.6 1.2 2.7 1.5 2.9 3.0 3.1 2.3 2.4

服用 B 药的 20 位患者日平均增加的睡眠时间：

3.2 1.7 1.9 0.8 0.9 2.4 1.2 2.6 1.3 1.4

1.6 0.5 1.8 0.6 2.1 1.1 2.5 1.2 2.7 0.5

分别计算两组数据的平均数，从计算结果看，哪种药的疗效更好？

解析：按题设要求，先计算 A，B 两组数据的平均数（人均增加的睡眠时间）：

$$\overline{x}_A=\frac{0.6+1.2+2.7+1.5+2.8+1.8+2.2+2.3+3.2+3.5+2.5+2.6+1.2+2.7+1.5+2.9+3.0+3.1+2.3+2.4}{20}$$

$$=2.3$$

$$\overline{x}_B=\frac{3.2+1.7+1.9+0.8+0.9+2.4+1.2+2.6+1.3+1.4+1.6+0.5+1.8+0.6+2.1+1.1+2.5+1.2+2.7+0.5}{20}$$

$$=1.6$$

$\because \overline{x}_A>\overline{x}_B$，$\therefore$ 从计算结果来看，服用 A 药的效果更好.

利用“平均数”来反映总体水平

例 19.23（甲 1818-1/68-1）图 19.17 是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y（单位：亿元）的折线图.

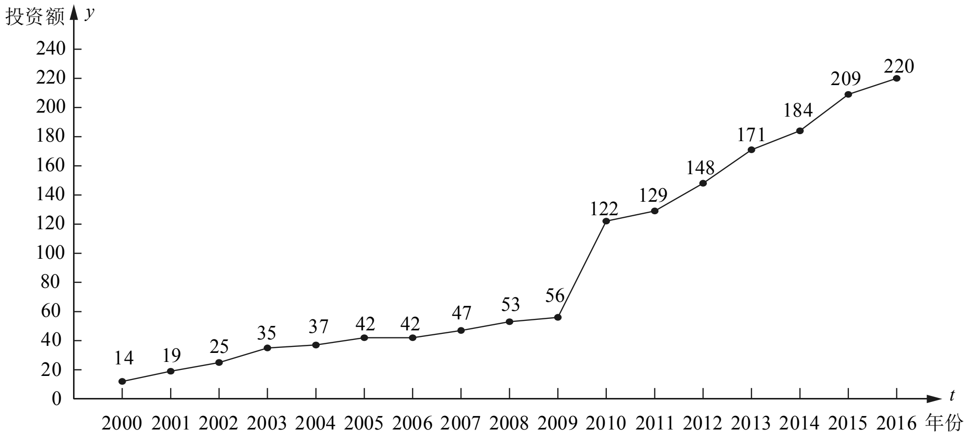


图 19.17

为了预测该地区2018年的环境基础设施投资额,建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型.根据2000年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 1，2，…，17）建立模型①：$\hat{y}=-30.4+13.5t$；根据 2010 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 1，2，…，7）建立模型②：$\hat{y}=99+17.5t$．分别利用这两个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值.

解析：利用模型①，由于题设 2000 年至 2016 年的时间变量 t 依次为 1，2，…，17，因此，2018 年对应的时间变量 $t=19$．该地区 2018 年环境基础设施投资额预测值为：$\hat{y}=-30.4+13.5\times19=226.1$（亿元）.

利用模型②，由于题设 2010 年至 2016 年的时间变量 t 依次为 1，2，…，7，因此，2018 年对应的时间变量 $t=9$，该地区 2018 年环境基础设施投资额预测值为：$\hat{y}=99+17.5\times9=256.5$（亿元）.

条件 7.3　给定两组数据的频率分布直方图

条件分析：当给定两组数据的频率分布直方图时，往往需要根据问题的要求选择相应的统计指标进行计算，进而做出分析和判断.

例 19.24（甲 1719-3）海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如图 19.18 所示.

根据箱产量的频率分布直方图，对这两种养殖方法的优劣进行比较.

解析：箱产量的频率分布直方图表明：新养殖法的箱产量平均值（或中位数）在 50kg 到 55kg 之间，旧养殖法的箱产量平均值（或中位数）在 45kg 到 50kg 之间，且新养殖法的箱产量分布集中程度较旧养殖法的箱产量集中程度高，因此，可以认为新养殖法的箱产量较高且稳定，从而新养殖法优于旧养殖法.

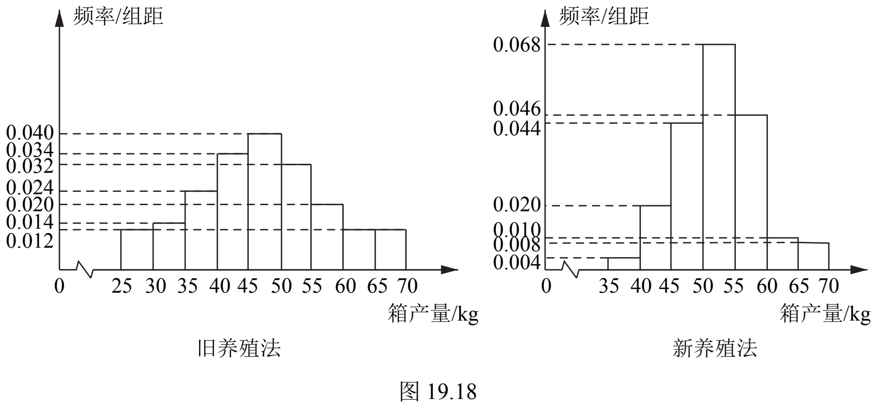


图 19.18

经验总结：

（1）频率分布直方图中小长方形的面积等于对应概率，所有小长方形面积之和为 1.
（2）频率分布直方图中均值等于组中值与对应概率乘积的和.
（3）均值大小代表水平高低，方差大小代表稳定性.

例 19.25 （乙 1819-3）某家庭记录了未使用节水龙头 50 天的日用水量数据（单位：m^3）和使用了节水龙头 50 天的日用水量数据，得到频数分布表如表 19.13 和表 19.14 所示．估计该家庭使用节水龙头后，一年能节省多少水？（一年按 365 天计算，同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表）

表 19.13

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$	$[0.3,0.4)$	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$	$[0.6,0.7)$
频数	1	3	2	4	9	26	5

表 19.14

日用水量	$[0,0.1)$	$[0.1,0.2)$	$[0.2,0.3)$	$[0.3,0.4)$	$[0.4,0.5)$	$[0.5,0.6)$
频数	1	5	13	10	16	5

解析：由于同一组中的数据以这组数据所在区间中点的值作代表，因此可以计算出使用节水龙头前后的日平均用水量如下．

未使用节水龙头 50 天的日平均用水量为：

$$\overline{x_1}=\frac{1}{50}(0.05\times1+0.15\times3+0.25\times2+0.35\times4+0.45\times9+0.55\times26+0.65\times5)=0.48.$$

使用了节水龙头 50 天的日平均用水量为：

$$\overline{x_2}=\frac{1}{50}(0.05\times1+0.15\times5+0.25\times13+0.35\times10+0.45\times16+0.55\times5)=0.38.$$

估计使用节水龙头后，一年（365 天）可节水 $(0.48-0.35)\times365=47.45(m^3)$.

条件 7.4　给定两组数据的茎叶图

条件分析：由于茎叶图是以“茎”和“叶”的形式来记录数据，因此必然会有两组数据，且两组数据的十位数都以“茎”来记录，而“叶”用来记录两组数据的个位部分.

例 19.26 （甲 1419-3）某市为了考核甲、乙两部门的工作情况，随机访问了 50 位市民．根据这 50 位市民对这两部门的评分（评分越高表明市民的评价越高），绘制茎叶图如图 19.19 所示.

甲部门		乙部门
	3	5 9
4	4	0 4 4 8
9 7	5	1 2 2 4 5 6 6 7 7 7 8 9
9 8 6 6 5 3 3 2 1 1 0	6	0 1 1 2 3 4 6 8 8
9 8 8 7 7 7 6 6 5 5 5 5 5 4 4 4 3 3 3 2 1 0	7	0 0 1 1 3 4 4 9
0	8	1 2 3 3 4 5
6 6 5 5 2 0 0	9	0 1 1 4 5 6
6 3 2 2 2 0	10	0 0 0

图 19.19

由所给茎叶图知，该市的市民对甲、乙部门评分的中位数分别是 75 和 67；该市的市民对甲、乙部门的评分高于 90 的概率分别为 0.1 和 0.16．根据茎叶图分析该市的市民对甲、乙两部门的评价.

解析：由所给茎叶图知，市民对甲部门的评分的中位数高于对乙部门的评分的中位数（用中位数估算整体）；且由茎叶图可以大致看出：对甲部门的评分集中在 70 分以上，即标准差要小于对乙部门的评分的标准差，因此，该市市民对甲部门的评分较高，且评价较为一致；对乙部门的评价较低，且评价差异较大.

利用其他统计量进行分析，结论合理即可

例 19.27 （甲 1568-1）某公司为了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

A 地区：62 73 81 92 95 85 74 64 53 76

78 86 95 66 97 78 88 82 76 89

B 地区：73 83 62 51 91 46 53 73 64 82

93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图，并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度（不要求计算出具体值，得出结论即可）.

解析：∵满意度最低评分为 46，最高评分为 97，

∴茎叶图的茎向坐标为 4，5，6，7，8，9.

据此，可以画出 A，B 两地区用户满意度评分茎叶图，如图 19.20 所示.

A 地区		B 地区
	4	6 8
3	5	1 3 6 4
6 4 2	6	2 4 5 5
6 8 8 6 4 3	7	3 3 4 6 9
9 2 8 6 5 1	8	3 2 1
7 5 5 2	9	1 3

图 19.20

通过茎叶图可以看出：A 地区用户满意度评分大多数集中在 70~90 之间，而 B 地区用户满意度评分大多数集中在 50~80 之间，因此，A 地区用户满意度评分的平均值高于 B 地区用户满意度评分的平均值，并且，A 地区用户满意度的评分比较集中，而 B 地区用户满意度的评分比较分散.

例 19.28 （丙 1818-1/68-1）某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了（单人独立）完成某项生产任务的两种新的生产方式. 为比较两种生产方式的效率，选取 40 名工人，将他们随机分成两组，每组 20 人，第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式. 根据工人完成（该项）生产任务的工作时间（单位：分钟）绘制了如图 19.21 所示的茎叶图.

根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高？并说明理由.

第一种生产方式		第二种生产方式
8	6	5 5 6 8 9
9 7 6 2	7	1 2 2 3 4 5 6 6 8
9 8 7 7 6 5 4 3 3 2	8	4 4 5
2 1 1 0 0	9	0

图 19.21

解析：第二种生产方式的效率更高．理由如下：

①由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人中，有 75%的工人完成生产任务所需时间至少 80 分钟，用第二种生产方式的工人中，有 75%的工人完成生产任务所需时间至多 79 分钟. 因此第二种方式的效率更高.

②由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 85.5 分钟，用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 73.5 分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.

③由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间为 $\overline{T_1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{20} t_1}{20}=84$，高于 80 分钟；

用第二种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间为$\overline{T_2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}t_2}{20}=74.7$，低于 80 分钟，因此第二种生产方式的效率更高.

④由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 8 上的最多；用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 7 上的最多，故可以认为用第二种生产方式完成生产任务所需的时间比用第一种生产方式完成生产任务所需的时间更少，因此第二种生产方式的效率更高.

温馨提示：考生答出以上 4 种理由中的任意一种或其他合理理由均可得分.

问题 8 求统计解析式

问题分析：求解统计解析式的关键是要确定变量之间的相互关系.

条件 8.1 统计直方图

条件分析：当给定统计直方图时，往往需要根据实际问题确定变量之间的函数关系.

例 19.29 （乙 1619-1）某公司计划购买 1 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰．机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元．在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元．现需要决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得如图 19.22 所示的柱状图.

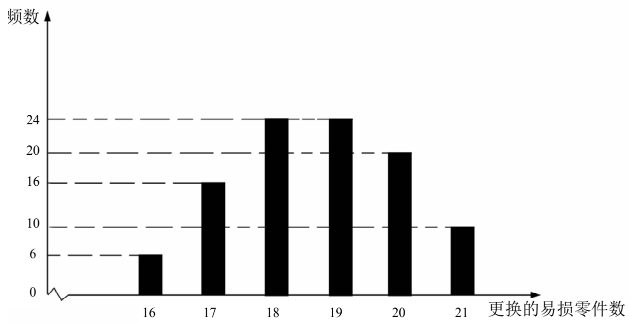


图 19.22

记x表示 1 台机器在三年使用期内需更换的易损零件数，y表示 1 台机器在购买易损零件上所需要的费用（单位：元），n表示购机的同时购买的易损零件数．若$n=19$，求y与x的解析式.

解析：$\because n=19$，$\therefore$当更换零件数$x\leqslant 19$时，所需费用为$y=200\times 19=3800$.

特别注意：$\because y$表示 1 台机器在购买易损零件上所需要的费用，而不是 1 台机器在使用过程中消耗的易损零件费用：$y=200x$.

即当$x<19$时，虽然能结余易损件，但费用已经产生！

当更换零件数$x>19$时，超出 19 件的部分应该按每个 500 元购买，因此，所需总费用为：$y=3800+500(x-19)$．所以y与x的解析式为：$y=\begin{cases}3800, & x\leqslant 19\,(x\in\mathbf{N})\\ 3800+500(x-19), & x>19\,(x\in\mathbf{N})\end{cases}$.

例 19.30 （甲 1319-1/69-1）经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出 1t 该产品获利润 500 元，未售出的产品，每 1t 亏损 300 元．根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图 19.23 所示．经销商为下一个销售季度购进了 130t 该农产品．以X（单位：t，$100\leqslant X\leqslant 150$）表示下一个销售季度内的市场需求量，$T$（单位：元）表示下一个销售季度内经销该农产品的利润．将T表示为X的函数.

解析： 假设经销商销售了 X，剩余 $130-X$．

默认：销售量=市场需求量！

当 $X\leqslant 130$ 时，获利 $500X$，亏损 $300(130-X)$，利润 $T=500X-300\times(130-X)=800X-39000$．因此，当 $x\in[100,130]$ 时，$T=800X-39000$．

当市场需求量 $130<X\leqslant 150$ 时，由于经销商只进了 130t，所以利润只能是最多销售 130t 的利润，即当 $x\in(130,150]$ 时，$T=500\times 130=65000$．

综上所述，$T=\begin{cases}800X-39000，100\leqslant X\leqslant 130\\65000，130<X\leqslant 150\end{cases}$．

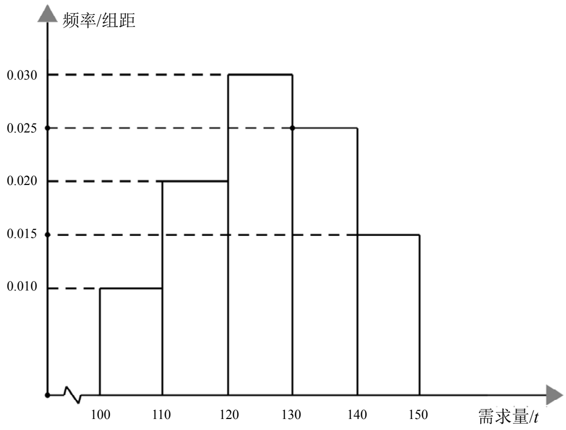


图 19.23

问题 9 求随机事件的概率

问题分析： 求随机事件的概率问题关键在于确定随机事件发生的频数或频率；求随机事件的分布列时首先要确定随机变量的取值范围．

条件 9.1　给定统计数据

条件分析： 给定统计数据求随机事件概率时，关键是要确定“随机事件”及其频率．

例 19.31 （丙 1718-1）某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年的销售经验，每天的需求量与当天最高气温（单位：℃）有关．如果最高气温不低于 25℃，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间[20,25）内，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20℃，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得如表 19.15 所示的频数分布表．

表 19.15

最高气温	[10,15）	[15,20）	[20,25）	[25,30）	[30,35）	[35,40）
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率．估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率．

分析： 先确定需求量不超过 300 瓶的天数为 $2+16+36=54$，再根据古典概型的概率计算公式求概率．

解析： 这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶，当且仅当最高气温低于 25℃，由表格数据知，最高气温低于 25℃的频率为 $\dfrac{2+16+36}{90}=0.6$，所以这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率的估计值为 0.6．

例 19.32 （丙 1718-2）某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年的销售经验，每天的需求量与当天最高气温（单位：℃）有关．如果最高气温不低于 25℃，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间[20,25）内，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20℃，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得如表 19.16 所示的频数分布表．

表 19.16

最高气温	[10,15）	[15,20）	[20,25）	[25,30）	[30,35）	[35,40）
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率．已估计六月份这种酸奶一天的需求量

不超过 300 瓶的概率为 0.48，设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y（单位：元）．当六月份这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时，写出 Y 的所有可能值，并估计 Y 大于零的概率．

分析：先分别求出最高气温不低于 25℃（36 天），最高气温位于区间[20,25)（36 天），以及最高气温低于 20℃（18 天）对应的利润分别为900，300，-100，所以 Y 大于零的概率估计为 $\frac{36+25+7+4}{90}=0.8$．

解析：当这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时，若最高气温不低于 25℃，则 $Y=6\times450-4\times450=900$；若最高气温位于区间 $[20,25)$ 时，则 $Y=6\times300+2\times(450-300)-4\times450=300$；若最高气温低于 20℃，则 $Y=6\times200+2\times(450-200)-4\times450=-100$．

所以，Y 的所有可能值为 900，300，-100．

Y 大于零当且仅当最高气温不低于 20℃，由表格数据知，最高气温不低于 20℃的频率为 $\frac{36+25+7+4}{90}=0.8$，因此 Y 大于零的概率的估计值为 0.8．

例 19.33 （甲 1618-1）某险种的基本保费为 a（单位：元），继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人的本年度的保费与其上年度出险次数的关联如表 19.17 所示．

表 19.17

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥5
保　费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况，得到统计表如表 19.18 所示．

表 19.18

一年内出险次数	0	1	2	3	4	≥5
频　数	60	50	30	30	20	10

记 A 为事件“一续保人本年度的保费不高于基本保费”．求 $P(A)$ 的估计值．

解析：∵题设事件 A 为“一续保人本年度的保费不高于基本保费”，∴ $P(A)$ 表示一续保人本年度的保费不高于基本保费的概率”．

文科重要考点之一

∵从本年度的保费与其上年度出险次数的统计表中可见，保费不高于基本保费的条件是出险 0 次或 1 次（即 1 次及 1 次以下），而从出险情况统计表可见：出险 0 次的频数是 60，出险 1 次的频数是 50．因此，根据分类加法可得：出险 1 次及 1 次以下（即保费不高于基本保费）的概率为 $P(A)=\frac{60+50}{200}=0.55$．

例 19.34 （甲 1618-2）某险种的基本保费为 a（单位：元），继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人的本年度的保费与其上年度出险次数的关联如表 19.19 所示．

表 19.19

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥5
保　费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的 200 名续保人在一年内的出险情况，得到统计表如表 19.20 所示．

表 19.20

一年内出险次数	0	1	2	3	4	≥5
频　数	60	50	30	30	20	10

记 B 为事件“一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%”，求 $P(B)$ 的估计值．

解析：∵题设事件 B 为“一续保人本年度的保费高于基本保费但不高于基本保费的 160%”，∴从本年度的保费与其上年度出险次数的统计表中可见，事件 B 的续保人本年度出险 2 次或 3 次，而从出险情况统

计表可见：出险 2 次的频数是 30，出险 3 次的频数是 30．因此，根据分类加法可得：出险 2 次或 3 次的概率为 $P(B)=\dfrac{30+30}{200}=0.30$．

例 19.35（甲 1668-1）某险种的基本保费为 a（单位：元），继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如表 19.21 所示．

表 19.21

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥5
保　费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

设该险种一续保人一年内的出险次数与相应概率如表 19.22 所示．

表 19.22

一年内出险次数	0	1	2	3	4	≥5
概　率	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

求续保人本年度的保费高于基本保费的概率．

解析：设事件 A 表示“续保人本年度的保费高于基本保费”，∵一年内出险 2 次（含 2 次）以上，其保费均高于基本保费，∴续保人本年度的保费高于基本保费的概率为出险 2 次（含 2 次）以上的概率之和，即 $P(A)=0.20+0.20+0.10+0.05=0.55$．

例 19.36（甲 1668-2）某险种的基本保费为 a（单位：元），继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人本年度的保费与其上年度出险次数的关联如表 19.23 所示．

表 19.23

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥5
保　费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

设该险种一续保人一年内的出险次数与相应概率如表 19.24 所示．

表 19.24

一年内出险次数	0	1	2	3	4	≥5
概　率	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

若续保人本年度的保费高于基本保费，求其保费比基本保费高出 60%的概率．

解析：设事件 B 表示“续保人本年度的保费高于基本保费 60%”，∵出险 3 次，保费为 $1.5a<1.6a$，出险 4 次，保费为 $1.75a>1.6a$，∴保费高于基本保费 60%的概率为出险 4 次及 4 次以上的概率，即 $P(B)=0.10+0.05=0.15$．

又∵ $P(AB)=P(B)=0.15$，∴ $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.15}{0.55}=\dfrac{3}{11}$．即若续保人本年度的保费高于基本保费，其保费比基本保费高出 60%的概率为 $\dfrac{3}{11}$．

例 19.37（甲 1568-2）某公司为了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 20 个用户，得到用户对产品的满意度评分如下：

A 地区：62　73　81　92　95　85　74　64　53　76
　　　　78　86　95　66　97　78　88　82　76　89

B 地区：73　83　62　51　91　46　53　73　64　82
　　　　93　48　65　81　74　56　54　76　65　79

根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分为三个等级，如表 19.25 所示.

表 19.25

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C 表示“A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”. 假设两地区用户的评价结果相互独立，根据所给数据，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，求 C 的概率.

解析：∵记事件 C 表示“A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”，

∴需要考量 A 地区用户“满意或非常满意”及“满意”的概率和 B 地区用户“满意”及“不满意”的概率.

设 C_{A1} 表示事件“A 地区用户的满意度等级为满意或非常满意”；C_{A2} 表示事件“A 地区用户的满意度等级为非常满意”；C_{B1} 表示事件“B 地区用户的满意度等级为满意”；C_{B2} 表示事件：“B 地区用户的满意度等级为不满意”.

又∵题设两地区用户的评价结果相互独立，∴C_{A1} 与 C_{B1} 独立，C_{A2} 与 C_{B2} 独立，C_{B1} 与 C_{B2} 互斥.

因此，$C=C_{A1}C_{B2}\cup C_{A2}C_{B1}$. 又∵题设：以事件发生的频率作为相应事件发生的概率，

∴$P\left(C_{A1}\right)=\dfrac{16}{20}$（共有 20 人评分，且评分为满意或非常满意等级即评分在 70 分以上的有 16 人）；

$P\left(C_{B2}\right)=\dfrac{10}{20}$（共有 20 人评分，且评分为不满意即评分在 70 分以下的有 10 人）；

$P\left(C_{A2}\right)=\dfrac{4}{20}$（共有 20 人评分，且评分为非常满意等级即评分不低于 90 分的有 4 人）；

$P\left(C_{B1}\right)=\dfrac{8}{20}$（共有 20 人评分，且评分为满意即评分在 70~89 分之间的有 8 人）.

即 $P(C)=P\left(C_{A1}C_{B2}\cup C_{A2}C_{B1}\right)=P\left(C_{A1}C_{B2}\right)+P\left(C_{A2}C_{B1}\right)=P\left(C_{A1}\right)P\left(C_{B2}\right)+P\left(C_{A2}\right)P\left(C_{B1}\right)$

$$=\frac{16}{20}\times\frac{10}{20}+\frac{4}{20}\times\frac{8}{20}=\frac{192}{400}=0.48.$$

条件 9.2　给定统计直方图

条件分析：给定统计（频率）直方图求随机事件的概率时，关键是要将频率转化为概率.

例 19.38（乙 1619-2）某公司计划购买 1 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰. 机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元. 在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元. 现需要决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得如图 19.24 所示的柱状图.

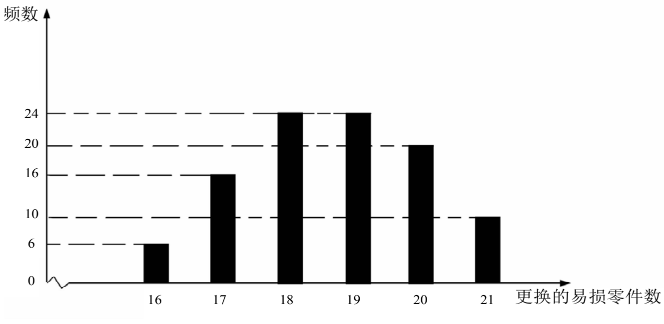


图 19.24

记 x 表示 1 台机器在三年使用期内需更换的易损零件数，y 表示 1 台机器在购买易损零件上所需要的费用（单位：元），n 表示购机的同时购买的易损零件数. 若要求“需要更换的易损零件数不大于 n”的频率不小于 0.5，求 n 的最小值.

解析：由柱状图可见：需要更换的零件数不大于 18 的频率为 $\dfrac{6}{100}+\dfrac{16}{100}+\dfrac{24}{100}=0.46<0.5$，不大于 19 的频率为 $\dfrac{6}{100}+\dfrac{16}{100}+\dfrac{24}{100}+\dfrac{24}{100}=0.70>0.5$，故 n 的最小值为 19.

例 19.39 （乙 1669-1）某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰．机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元．在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元．现需要决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得如图 19.25 所示的柱状图．

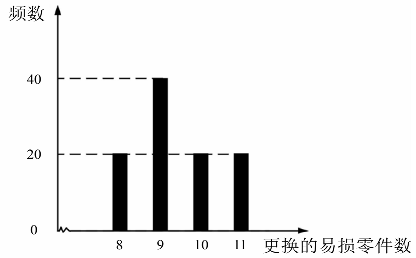


图 19.25

以这 100 台机器更换的零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数．求 X 的分布列．

解析：由于题设“以这 100 台机器更换的零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率”，且由柱状图可见：这 100 台机器在三年内更换易损零件的数量为 8，9，10，11，频数依次为 20，40，20 和 20，即频率为 $\frac{20}{100},\frac{40}{100},\frac{20}{100},\frac{20}{100}$．因此，一台机器三年内更换 8，9，10，11 个易损零件的概率为 0.2，0.4，0.2，0.2．

基于对题设“概率”的定义和柱状图的阅读

又∵题设“记 X 表示 2 台机器三年内共更换的易损零件数”，

∴2 台机器三年内更换易损零件的数量范围是 $2\times8\sim2\times11$，

确定随机变量的取值范围

根据分类计数和分步计数原理可得：

为便于理解设有 A，B 两台机器

$P(X=16)=0.2\times0.2=0.04$，

每台机器都更换 8 个易损零件的概率

$P(X=17)=0.2\times0.4+0.4\times0.2=0.16$，

A 换 8 个及 B 换 9 个+A 换 9 个及 B 换 8 个的概率

$P(X=18)=0.4\times0.4+0.2\times0.2+0.2\times0.2=0.24$，

A 换 9 个及 B 换 9 个+A 换 8 个及 B 换 10 个+A 换 10 个及 B 换 8 个的概率

$P(X=19)=2\times0.2\times0.2+2\times0.4\times0.2=0.24$，

A 换 8 个及 B 换 11 个+A 换 9 个及 B 换 10 个的概率

$P(X=20)=2\times0.2\times0.4+0.2\times0.2=0.2$，

A 换 11 个及 B 换 9 个+A 换 10 个及 B 换 10 个的概率

$P(X=21)=2\times0.2\times0.2=0.02$，

A 换 11 个及 B 换 10 个+A 换 10 个及 B 换 11 个的概率

$P(X=22)=0.2\times0.2=0.04$，

A，B 各换 11 个的概率

所以 X 的分布列如表 19.26 所示．

表 19.26

X	16	17	18	19	20	21	22
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.20	0.08	0.04

例 19.40 （乙 1669-2）某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰．机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元．在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元．现需要决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得如图 19.26 所示的柱状图．

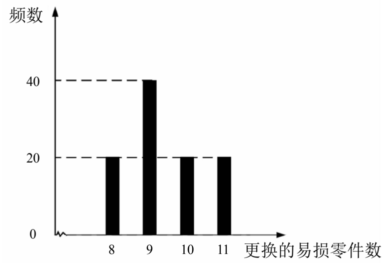


图 19.26

以这 100 台机器更换的零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数．

已求得 X 的分布列如表 19.27 所示．

表 19.27

X	16	17	18	19	20	21	22
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.20	0.08	0.04

若要求 $P(X\leqslant n)\geqslant 0.5$，确定$n$的最小值.

解析：$\because P(X\leqslant 18)=P(16)+P(17)+P(18)=0.44<0.5$，

而$P(X\leqslant 19)=P(16)+P(17)+P(18)+P(19)=0.68>0.5$，故满足$P(X\leqslant n)\geqslant 0.5$最小的$n$值为 19.

例 19.41 （甲 1719-1）海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如图 19.27 所示.

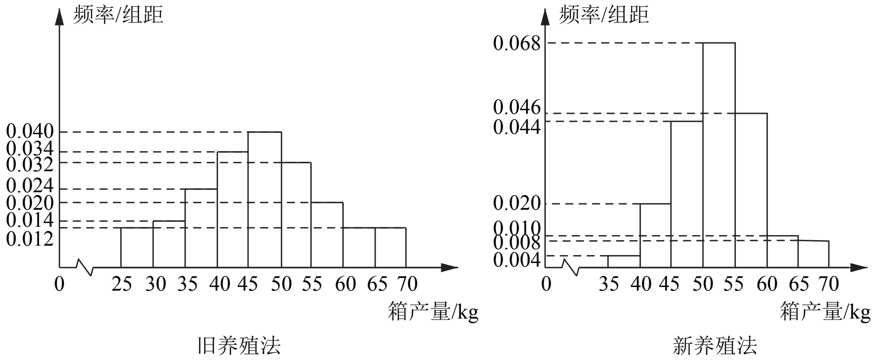


图 19.27

记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50 kg”，估计 A 的概率.

分析：根据频率分布直方图中小长方形面积等于对应概率，计算事件 A 的概率.

解析：因为由旧养殖法直方图可得“旧养殖法的箱产量低于 50kg”事件的频率为：$(0.012+0.014+0.024+0.034+0.040)\times 5=0.62$. 所以，事件 A 的概率估计值为 0.62.

例 19.42 （甲 1768-1）海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg）. 其频率分布直方图如图 19.28 所示.

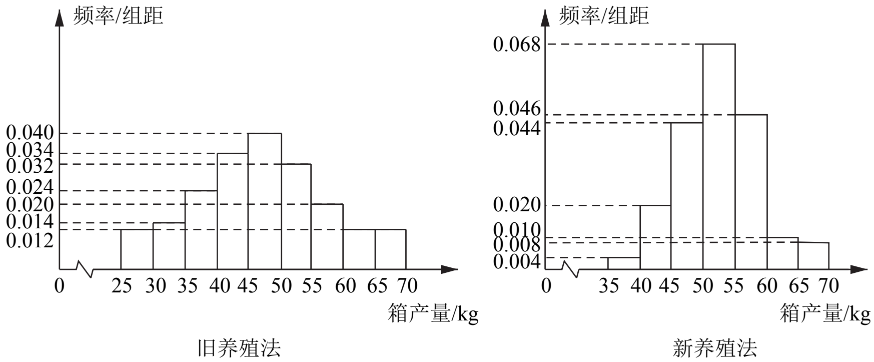


图 19.28

设两种养殖方法的箱产量相互独立，记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg，新养殖法的箱产量不低于 50kg”，估计 A 的概率.

分析：利用相互独立的事件概率公式即可求得事件 A 的概率估计值.

解析：$\because$题记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg，新养殖法的箱产量不低于 50kg”；

将事件 A 看成是两类事件的组合

$\therefore$记 B 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg”，C 表示事件“新养殖法的箱产量不低于 50kg”，故：$P(A)=P(BC)=P(B)P(C)$.

事件 A 的概率等于事件 B 和事件 C 同时发生的概率

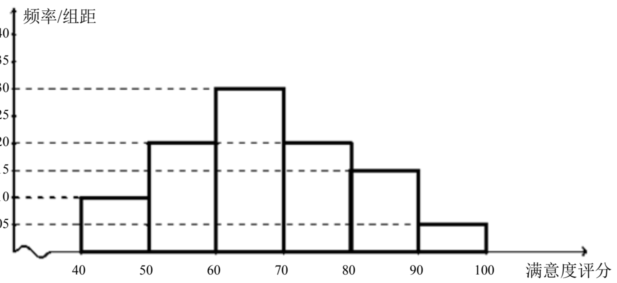
由“旧养殖法”统计直方图可得：$P(B)=(0.012+0.014+0.024+0.034+0.040)\times 5=0.62$；

由“新养殖法”统计直方图可得：$P(C)=(0.068+0.046+0.010+0.008)\times 5=0.66$.

因此，$P(A)=P(B)P(C)=0.62\times 0.66=0.4092$. 即事件 A 的概率估计值为 0.4092.

例 19.43（甲 1518-2）某公司为了了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 40 个用户，根据用户对其产品的满意度的评分，得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频数分布表如图 19.29 所示.

A 地区用户满意度评分的频率分布直方图



B 地区用户满意度评分的频数分布表

满意度评分分组	$[50,60)$	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100]$
频数	2	8	14	10	6

图 19.29

根据用户满意度评分，将用户的满意度评分分为三个等级，如表 19.28 所示.

表 19.28

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

估计哪个地区的用户的满意度等级为不满意的概率大，说明理由.

解析：记 C_{A} 表示"A 地区用户满意度等级为不满意"，C_{B} 表示"B 地区用户满意度等级为不满意".

$\because$ 题设满意度评分低于 70 分为不满意，

$\therefore P(C_{\text{A}})=(0.010+0.020+0.030)\times 10=0.6$；$P(C_{\text{B}})=(0.005+0.020)\times 10=0.25$

$\because P(C_{\text{A}})>P(C_{\text{B}})$，$\therefore$ A 地区用户满意度等级为"不满意"的概率远远大于 B 地区.

例 19.44（甲 1319-2/69-2）经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出 1t 该产品获利润 500 元，未售出的产品，每 1t 亏损 300 元. 根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图，如图 19.30 所示. 经销商为下一个销售季度购进了 130t 该农产品. 以 X（单位：t，$100\leqslant X\leqslant 150$）表示下一个销售季度内的市场需求量，$T$（单位：元）表示下一个销售季度内经销该农产品的利润. 根据直方图，可将利润 T 与市场需求量 X 的函数表示为 $T=\begin{cases}800X-39000, & 100\leqslant X\leqslant 130\\ 65000 & 130<X\leqslant 150\end{cases}$，根据直方图估计利润 T 不少于 57000 元的概率.

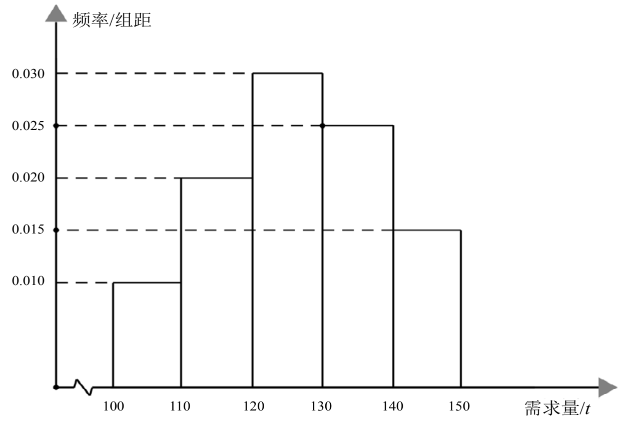


图 19.30

解析：由利润 T 与市场需求量 X 的函数解析式可知：当 $T=57000<65000$ 时，代入 $T=800X-39000$ 可得：$X=\dfrac{T+39000}{800}=\dfrac{57000+39000}{800}=120$.

由此可见：利润不少于 57000 元的市场需求量至少为 120t，即 $120<X\leqslant 150$.

由直方图可知：需求量 $X\in[120,150]$ 的频率为 0.700.

因此，下一个销售季内利润不少于 57000 元的概率为 0.7.

例 19.45（乙 1819-2）某家庭使用了节水龙头后日用水量数据的频率分布直方图如图 19.31 所示，估计该家庭使用节水龙头后，日用水量小于 0.35m^3 的概率.

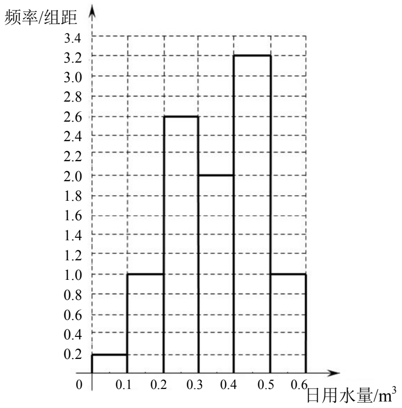


图 19.31

解析：根据日用水量频率分布直方图可知：日用水量在 $0\sim0.1\text{m}^3$ 之间的频率为 0.2，因此相应的概率为 $(0.1-0)\times0.2=0.02$，

据此可以估计日用水量小于 0.35m^3 的概率为：

$$(0.1-0)\times0.2+(0.2-0.1)\times1.0+(0.3-0.2)\times2.6+(0.35-0.3)\times2.0$$
$$=0.48.$$

频率分布直方图中的“面积”表示概率

条件 9.3　给定统计数据茎叶图

条件分析：当给定统计数据茎叶图时，关键是要确定“随机事件”的概率.

例 19.46（甲 1419-2）某市为了考核甲、乙两部门的工作情况，随机访问了 50 位市民．根据这 50 位市民对这两部门的评分（评分越高表明市民的评价越高），绘制茎叶图如图 19.32 所示.

分别估计该市的市民对甲、乙部门的评分高于 90 的概率.

解析：由茎叶图可知，50 位市民对甲、乙部门的评分高于 90 分的人数比例分别为 $\frac{5}{50}=0.1$，$\frac{8}{50}=0.16$，故该市的市民对甲、乙部门的评分高于 90 的概率估计值(用样本的比例估算全体的概率)分别为 0.1 和 0.16.

甲部门		乙部门
	3	5 9
4	4	0 4 4 8
9 7	5	1 2 2 4 5 6 6 7 7 7 8 9
9 8 6 6 5 3 3 2 1 1 0	6	0 1 1 2 3 4 6 8 8
9 8 8 7 7 7 6 6 5 5 5 5 5 4 4 4 3 3 3 2 1 0 0	7	0 0 1 1 3 4 4 9
6 6 5 5 2 0 0	8	1 2 3 3 4 5
6 3 2 2 2 0	9	0 1 1 4 5 6
	10	0 0 0

图 19.32

条件 9.4　给定条件概率

条件分析：当给定条件概率时，关键是要确定基础事件与条件事件之间的关系.

例 19.47（乙 1369-1）一批产品需要进行质量检验，检验方案是：先从这批产品中任取 4 件作检验，这 4 件产品中优质品的件数记为 n．如果 $n=3$，再从这批产品中任取 4 件检验，若都为优质品，则这批产品通过检验；如果 $n=4$，再从这批产品中任取 1 件检验，若为优质品，则这批产品通过检验；其他情况下，这批产品都不能通过检验．假设这批产品的优质品率为 50%，即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$，且各件产品是否为优质品相互独立．求这批产品通过检验的概率.

解析：设“第一次取出的 4 件产品中恰有 3 件优质品”为事件 A_1，“第一次取出的产品全是优质品”为事件 A_2；“第二次取出的 4 件产品都是优质品”为事件 B_1，“第二次取出的 1 件产品是优质品”为事件 B_2．“这

批产品通过检验”为事件 A，则根据题意应该有 $A=(A_1B_1)\cup(A_2B_2)$，且 A_1B_1 与 A_2B_2 互斥，所以 $P(A)=P(A_1B_1)+P(A_2B_2)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)$.

①∵题设这批产品的优质品率为 50%，即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$，

∴第一次取出的 4 件产品中恰有 3 件优质品（即事件 A_1）的概率为：

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{16}.$$

将恰有 3 件优质品的事件概率理解为非优质品分别出现在第 1，2，3，4 次的四种情况的概率之和.

本题由于优质品率为 $\frac{1}{2}$，所以非优质品率为 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，因此恰有 3 只优质品概率事件等同于恰有 1 只非优质品概率 $=\frac{1}{4}$，即 $P(A_1)=\frac{1}{4}$.

②又∵ B_1 事件与是否存在事件 A_1 无关，∴ $P(B_1|A_1)=P(B_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$（将 4 件产品都是优质品事件理解为连续 4 次抽取的都是优质品）.

③∵题设这批产品的优质品率为 50%，即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$，∴ $P(B_2|A_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$.

将①②③中计算的结果代入 $P(A)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_2|A_2)$ 可得：$P(A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{64}$.

例 19.48（乙 1870-1）某工厂的某种产品成箱包装，每箱 200 件，每一箱产品在交付用户之前要对产品进行检验，如检验出不合格品，则更换为合格品，检验时，先从这箱产品中任取 20 件进行检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品进行检验，设每件产品为不合格品的概率都为 $p(0<p<1)$，且各件产品是否为不合格品相互独立. 记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)$，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0.

解析：∵题设每件产品为不合格品的概率都为 $p(0<p<1)$，则每件产品合格的概率为 $(1-p)$.

在检验 20 件产品的过程中，无论检出不合格产品的顺序如何，任何一种情形，恰有 2 件不合格（即有 18 件合格）的概率为 $p^2(1-p)^{18}$.

又因为从 20 件产品中检出 2 件不合格产品的方式共有 C_{20}^2 一种. 所以根据分类加法原则可得：20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为 $f(p)=C_{20}^2p^2(1-p)^{18}$.

$$f'(p)=C_{20}^2\left[2p^1(1-p)^{18}+18(1-p)^{17}(-1)p^2\right]=2C_{20}^2p(1-p)^{17}\left[(1-p)-9p\right]=360p(1-p)^{17}(1-10p).$$

令 $f'(p)=0$，解得：$p_0=\frac{1}{10}$.

当 $p\in\left(0,\frac{1}{10}\right)$ 时，$f'(p)>0$；当 $p\in\left(\frac{1}{10},1\right)$ 时，$f'(p)<0$. 故 $p_0=\frac{1}{10}$ 是最大值点.

问题 10　求随机事件的分布列与数学期望

问题分析：随机事件的分布列是指随机事件发生的各种可能情况的概率列表，关键在于确定随机事件发生的各种情形或可能；随机事件的数学期望即随机变量的均值，数学期望的基本计算公式是 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$.

条件 10.1　给定随机变量服从正态分布

条件分析：当给定随机变量服从正态分布时，可以利用概率分布的意义来求平均值.

例 19.49（乙 1468-2）从某企业的某种产品中抽取 500 件，测量这些产品的一项质量指标值，由

测量结果得频率分布直方图如图 19.33 所示.

已知：这 500 件产品质量指标值的样本平均数 $\overline{x}=200$ 和样本方差 $s^2=150$.

由频率分布直方图可以认为，这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$ ，σ^2 近似为样本方差 s^2 .

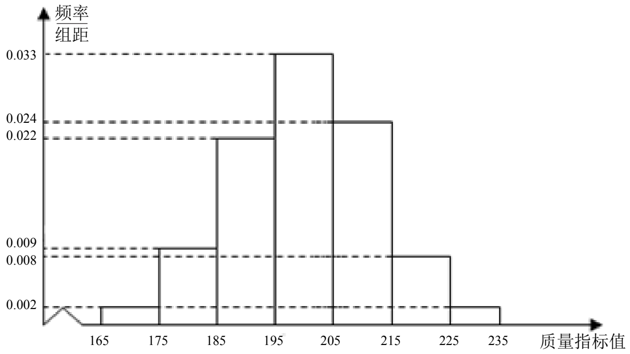


图 19.33

（ⅰ）利用该正态分布，求 $P(187.8<Z<212.2)$；

（ⅱ）某用户从该企业购买了 100 件这种产品，记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间 $(187.8,212.2)$ 的产品件数，利用（ⅰ）的结果，求 EX .

附：$\sqrt{150}\approx 12.2$.

若 $Z\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$ ，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$.

解析：∵题设这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中 μ 近似为样本平均数 $\overline{x}$ ，σ^2 近似为样本方差 s^2 . ∴质量指标值 Z 服从 $Z\sim N(200,150)$.

（ⅰ）∵ $\mu=\overline{x}=200$，$\sigma=\sqrt{150}\approx 12.2$.

∴ $P(187.8<Z<212.2)=P(200-12.2<Z<200+12.2)=P(\mu-\delta<Z<\mu+\delta)=0.6826$.

（ⅱ）∵由（ⅰ）知，一件产品中质量指标值位于区间 $(187.8,212.2)$ 的概率为 0.6826.

∴购买 100 件该产品且质量指标值位于区间 $(187.8,212.2)$ 的产品数量为 $EX=100\times 0.6826=68.26$.

条件 10.2　给定随机变量服从二项分布

条件分析：当给定随机变量服从二项分布时，要利用二项分布的数学期望计算公式：$E(X)=np$.

例 19.50（乙 1769-1）为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）. 根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$. 假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的零件数，求 $P(X\geqslant 1)$ 及 X 的数学期望.

附：若随机变量 Z 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)=0.9974$ ，$0.9974^{16}\approx 0.9592$ ，$\sqrt{0.008}\approx 0.09$.

分析：根据题设条件可知，一个零件的尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的概率为 0.9974，则零件的尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 外的概率为 0.0026. 由于零件的不合格数量 X 服从二项分布 $X\sim B(16,0.0026)$，进而可以求出零件不合格数量 X 的数学期望.

解析：由于抽取的一个零件的尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的概率为 0.9974，因而零件的尺寸在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 外的概率为 0.0026. 又由于零件的不合格数量 X 服从二项分布 $X\sim B(16,0.0026)$，因此，由 $P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)$ 可得：$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-0.9974^{16}=1-0.9592=0.0408$.

由 $E(X)=np$ 可得：不合格零件数量 X 的数学期望为 $E(X)=16\times0.0026=0.0416$.

条件 10.3　给定随机变量的分布列

条件分析：当给定随机变量的分布列时，要利用随机变量的数学期望公式进行计算.

例 19.51（乙 1669-3）某公司计划购买 2 台机器，该种机器使用三年后即被淘汰. 机器有一易损零件，在购进机器时，可以额外购买这种零件作为备件，每个 200 元. 在机器使用期间，如果备件不足再购买，则每个 500 元. 现需要决策在购买机器时应同时购买几个易损零件，为此搜集并整理了 100 台这种机器在三年使用期内更换的易损零件数，得柱状图如图 19.34 所示.

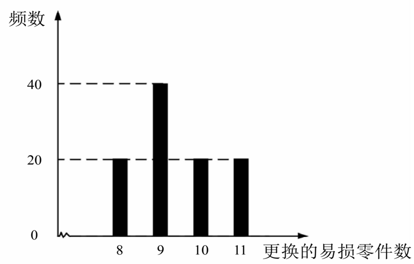


图 19.34

以这 100 台机器更换的零件数的频率代替 1 台机器更换的易损零件数发生的概率，记 X 表示 2 台机器三年内共更换的易损零件数，n 表示购买 2 台机器的同时购买的易损零件数.

由直方图可得 X 的分布列如表 19.29 所示.

表 19.29

X	16	17	18	19	20	21	22
P	0.04	0.16	0.24	0.24	0.20	0.08	0.04

以购买易损零件所需费用的期望值为决策依据，在 n=19 与 n=20 之中选其一，应选哪一个？

解析：记 Y 表示 2 台机器在购买易损零件上所需的费用（单位：元）.

当 n=19 时，$EY=19\times200\times0.68+(19\times200+500)\times0.2+(19\times200+2\times500)\times0.08+(19\times200+3\times500)\times0.04=4040$.

当 n=20 时，$EY=20\times200\times0.88+(20\times200+500)\times0.08+(20\times200+2\times500)\times0.04=4080$.

显然，当 n=19 时所需费用的期望值 4040 小于 n=20 时所需费用的期望值 4080，故应选 n=19.

条件 10.4　给定随机变量的其他条件

条件分析：当给定随机变量的其他条件时，需要根据这些条件项先求出随机变量的分布列，再利用随机变量的数学期望公式进行计算.

例 19.52（乙 1369-2）一批产品需要进行质量检验，检验方案是：先从这批产品中任取 4 件做检验，这 4 件产品中优质品的件数记为 n . 如果 $n=3$ ，再从这批产品中任取 4 件做检验，若都为优质品，则这批产品通过检验；如果 $n=4$ ，再从这批产品中任取 1 件做检验，若为优质品，则这批产品通过检验；其他情况下，这批产品都不能通过检验. 假设这批产品的优质品率为 50%，即取出的产品是优质品的概率都为 $\frac{1}{2}$，且各件产品是否为优质品相互独立.

已知每件产品的检验费用为 100 元，凡抽取的每件产品都需要检验，对这批产品做质量检验所需的费用记为 X（单位：元），求 X 的分布列及数学期望.

解析：∵题设每件产品的检验费用为 100 元，∴这批产品所需检验费（X）如下：

第一次抽取 4 件做检验，产生检验费 400 元，这是做合格检验的基本费用 400 元.

若第一次 4 件全部为优质品，则第二次再抽检 1 件产品，再产生检验费 100 元，共 500 元.

若第一次 4 件有 3 件为优质品，则第二次再抽检 4 件产品，再产生检验费 400 元，共 800 元.

注：本题没有规定合格检验和优质品数量低于 3 件的检验方案，方案不完善且容易产生歧义

据此，我们认为检验费可能的取值为 400 元、500 元和 800 元.

且各种费用产生的概率为：

$P(X=800)=\frac{1}{4}$； 第一次4件有3件为优质品，而第2次再取4件均为优质品的概率

$P(X=500)=\frac{1}{16}$； 第一次4件有4件为优质品，第2次任取1件均为优质品的概率

$P(X=400)=1-P(X=800)-P(X=500)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$.

所以X的分布列如表19.30所示.

表19.30

X	400	500	800
P	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$

因此，检验费用X的数学期望为：$EX=400\times\frac{11}{16}+500\times\frac{1}{16}+800\times\frac{1}{4}=506.25$（元）.

例 19.53 （甲1618-3）某险种的基本保费为a（单位：元），继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人本年度的保费与其上年度的出险次数的关联如表19.31所示.

表19.31

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥5
保　费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

随机调查了该险种的200名续保人在一年内的出险情况，得统计表如表19.32所示.

表19.32

一年内出险次数	0	1	2	3	4	≥5
频　数	60	50	30	30	20	10

求续保人本年度的平均保费估计值.

解析：将出险次数频数统计表改为出险次数频率（概率）统计表，如表19.33所示.

表19.33

一年内出险次数	0	1	2	3	4	≥5
频　数	60	50	30	30	20	10
频率=频数/200	0.3	0.25	0.15	0.15	0.1	0.05

保费与出险频率的关系（即保费的分布列）如表19.34所示.

表19.34

X	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$
P	0.30	0.25	0.15	0.15	0.10	0.05

其中，X为续保人本年度的保费，P为出险频率.

$EX=0.85a\times0.30+a\times0.25+1.25a\times0.15+1.5a\times0.15+1.75a\times0.10+2a\times0.05=1.1925a$，即续保人本年度平均保费的估计值为$1.1925a$.

例 19.54 （甲1668-3）某险种的基本保费为a（单位：元），继续购买该险种的投保人称为续保人，续保人本年度的保费与其上年度的出险次数的关联如表19.35所示.

表19.35

上年度出险次数	0	1	2	3	4	≥5
保　费	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$

设该险种一续保人一年内出险次数与相应概率如表 19.36 所示.

表 19.36

一年内出险次数	0	1	2	3	4	≥5
概　率	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

求续保人本年度的平均保费与基本保费的比值.

解析：设续保人本年度的保费为 X，则 X 的分布列如表 19.37 所示.

表 19.37

X	$0.85a$	a	$1.25a$	$1.5a$	$1.75a$	$2a$
P	0.30	0.15	0.20	0.20	0.10	0.05

$\because EX=0.85a\times0.30+a\times0.15+1.25a\times0.20+1.5a\times0.20+1.75a\times0.10+2a\times0.05=1.23a$.

$\therefore \dfrac{EX}{a}=1.23$，即续保人本年度的平均保费（$EX$）与基本保费（$a$）的比值为 1.23.

例 19.55（甲 1369-3）经销商经销某种农产品，在一个销售季度内，每售出 1t 该产品获利润 500 元，未售出的产品，每 1t 亏损 300 元. 根据历史资料，得到销售季度内市场需求量的频率分布直方图如图 19.35 所示. 经销商为下一个销售季度购进了 130t 该农产品. 以 X（单位：t，$100\leqslant X\leqslant150$）表示下一个销售季度内的市场需求量，$T$（单位：元）表示下一个销售季度内经销该农产品的利润. 根据直方图，可将利润 T 与市场需求量 X 的函数表示为：$T=\begin{cases}800X-39000, & 100\leqslant X\leqslant130\\65000, & 130<X\leqslant150\end{cases}$.

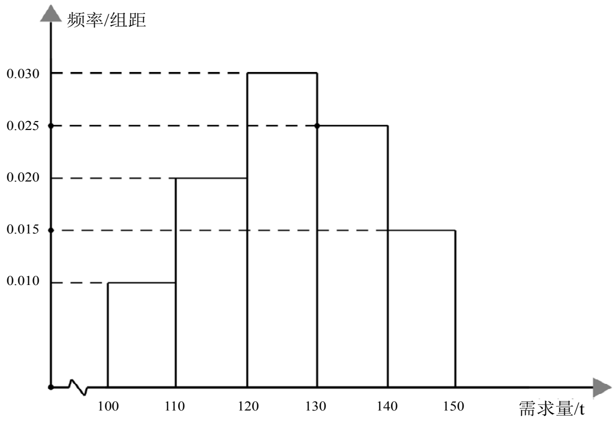


图 19.35

在直方图的需求量分组中，以各组的区间中点值代表该组的各个值，并以需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率（例如，若 $X\in[100,110)$，则取 $X=105$，且 $X=105$ 的概率等于需求量落入 $[100,110)$ 的频率），求 T 的数学期望.

解析：∵题设"以各组的区间中点值代表该组的各个值，并以需求量落入该区间的频率作为需求量取该区间中点值的概率"，∴根据直方图可得市场需求量的概率分布如表 19.38 所示.

表 19.38

X	105	115	125	135	145
P	0.10	0.20	0.30	0.25	0.15

注意：概率=10×频率/组距.

再由题设：$T=\begin{cases}800X-39000, & 100\leqslant X\leqslant130\\65000, & 130<X\leqslant150\end{cases}$，根据上表中的 X 计算出对应的 T 可得表 19.39.

表 19.39

X	105	115	125	135	145
T	45000	53000	61000	65000	65000
P	0.10	0.20	0.30	0.25	0.15

据此可得利润 T 的概率分布如表 19.40 所示.（利润为 65000 的概率为 0.25+0.15=0.40）

表 19.40

T	45000	53000	61000	65000
P	0.10	0.20	0.30	0.40

所以，$ET = 45000\times0.10+53000\times0.20+61000\times0.30+65000\times0.40 = 59400$.

例 19.56 （丙 1768-1）某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关．如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间[20,25)，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得频数分布表如表 19.41 所示．

表 19.41

最高气温	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率．

求六月份这种酸奶一天的需求量 X（单位：瓶）的分布列．

解析：由题意知，X 的所有可能取值为 200，300，500，由表格数据可得：

$P(X=200)=\dfrac{2+16}{90}=0.2$，$P(X=300)=\dfrac{36}{90}=0.4$，$P(X=500)=\dfrac{25+7+4}{90}=0.4$.

因此 X 的分布列如表 19.42 所示．

表 19.42

X	200	300	500
P	0.2	0.4	0.4

例 19.57 （丙 1768-2）某超市计划按月订购一种酸奶，每天进货量相同，进货成本每瓶 4 元，售价每瓶 6 元，未售出的酸奶降价处理，以每瓶 2 元的价格当天全部处理完．根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关．如果最高气温不低于 25，需求量为 500 瓶；如果最高气温位于区间[20,25)，需求量为 300 瓶；如果最高气温低于 20，需求量为 200 瓶．为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得频数分布表如表 19.43 所示．

表 19.43

最高气温	[10,15)	[15,20)	[20,25)	[25,30)	[30,35)	[35,40)
天数	2	16	36	25	7	4

以最高气温位于各区间的频率代替最高气温位于该区间的概率，已求得六月份这种酸奶一天的需求量 X（单位：瓶）的分布列如表 19.44 所示．

表 19.44

X	200	300	500
P	0.2	0.4	0.4

设六月份一天销售这种酸奶的利润为 Y（单位：元）．当六月份这种酸奶一天的进货量 n（单位：瓶）为多少时，Y 的数学期望达到最大值？

分析：由题中所给条件分类讨论可得 $n=300$ 时，Y 的数学期望达到最大值 520 元．

解析：由题意知，这种酸奶一天的需求量至多为 500 瓶，至少为 200 瓶，因此，只需考虑 $200\leqslant n\leqslant 500$.

① 当 $300\leqslant n\leqslant 500$ 时，

若最高气温不低于 25，则 $Y=6n-4n=2n$；

若最高气温位于区间 $[20,25)$，则 $Y=6\times300+2(n-300)-4n=1200-2n$；

若最高气温低于 20，则 $Y=6\times200+2(n-200)-4n=800-2n$.

因此，$EY=2n\times0.4+(1200-2n)\times0.4+(800-2n)\times0.2=640-0.4n$.

② 当 $200\leqslant n<300$ 时，

若最高气温不低于 25，则 $Y=6n-4n=2n$；

若最高气温低于 20，则 $Y=6\times200+2(n-200)-4n=800-2n$.

因此，$EY=2n\times(0.4+0.4)+(800-2n)\times0.2=164+1.2n$.

∵当 $n\geqslant300$ 时，$EY=640-0.4n$，与 n 成反比，即当 $n=300$ 时，Y 的数学期望达到最大值，最大值为 $EY=640-0.4\times300=520$（元）.

又∵ $200\leqslant n<300$ 时，$EY=160+1.2n$，与 n 成正比，即当 $n=300$ 时，$EY=160+1.2\times300=160+360=520$（元）$<540$（元）.

∴当 $n=300$ 时，Y 的数学期望达到最大值 520 元.

问题 11 求相关系数

问题分析：相关系数是衡量两个变量之间相关程度的重要指标，因此，计算两个变量之间的相关系数必须有两个变量的多组测量数据或散点分布图.

条件 11.1　给定多组测量数据

条件分析：当给定多组测量数据时，可以利用相关系数计算公式直接计算相关系数.

例 19.58（乙 1719-1）为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每隔 30 min 从该生产线上随机抽取一个零件，并测量其尺寸（单位：cm）. 表 19.45 是检验员在一天内依次抽取的 16 个零件的尺寸.

表 19.45

抽取次序	1	2	3	4	5	6	7	8
零件尺寸	9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
抽取次序	9	10	11	12	13	14	15	16
零件尺寸	10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\overline{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=9.97$，$s=\sqrt{\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}\left(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{x}^2\right)}\approx0.212$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{16}(i-8.5)^2}\approx18.439$，$\sum_{i=1}^{16}(x_i-\overline{x})(i-8.5)=-2.78$，其中，$x_i$ 为抽取的第 i 个零件的尺寸，$i=1,2,\cdots,16$.

求 $(x_i,i)(i=1,2,\cdots,16)$ 的相关系数 r，并回答是否可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小（若 $|r|<0.25$，则可以认为零件的尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小）.

附：样本 $(x_i,i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$.

解析：由样本数据可得 $(x_i,i)(i=1,2,3,\cdots,16)$ 的相关系数为：

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{16}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(i-8.5\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{16}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{16}\left(i-8.5\right)^2}}=\frac{-2.78}{0.212\times\sqrt{16}\times18.943}\approx-0.18,$$

其中，$\overline{i}=\frac{1+2+\cdots+16}{16}=\frac{8\times\left(1+16\right)}{16}=\frac{17}{2}=8.5$.

由于$|r|<0.25$，因此，可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小.

条件 11.2　给定统计数据折线图

条件分析：当给定统计数据折线图时，关键是先从折线图中确定几组数据，然后再利用相关系数计算公式计算相关系数.

例 19.59（丙 1618-1/68-1）图 19.36 是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图.

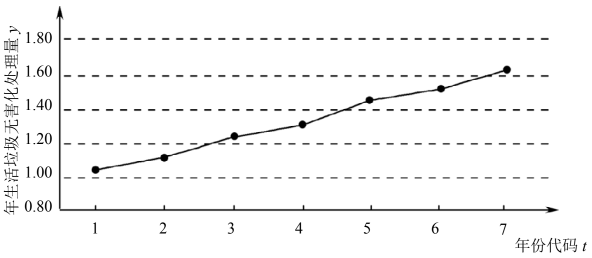


图 19.36

由折线图看出，可用线性回归模型拟合y与t的关系，请用相关系数加以说明.

附注：

参考数据：$\sum_{i=1}^{7}y_i=9.32$，$\sum_{i=1}^{7}t_iy_i=40.17$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=0.55$，$\sqrt{7}\approx2.646$.

参考公式：相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)^2\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$.

解析：由折线图中的数据可得：$\overline{t}=4$，$\sum_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)^2=28$.

由附注中参考数据知：$\sum_{i=1}^{7}y_i=9.32$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=0.55$.

观察相关系数公式可知：需先计算$\sum_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$，

而$\sum_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{7}\left(t_iy_i-\overline{t}y_i+\overline{t}\overline{y}-t_i\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{7}\left(t_iy_i-\overline{t}y_i\right)+\sum_{i=1}^{7}\left(\overline{t}\overline{y}-t_i\overline{y}\right)$.

又$\because\sum_{i=1}^{7}\left(\overline{t}\overline{y}-t_i\overline{y}\right)=\overline{y}\sum_{i=1}^{7}\left(\overline{t}-t_i\right)=\overline{y}\times0=0$，　这是解决本题的关键

$\therefore\sum_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=\sum_{i=1}^{7}t_iy_i-\overline{t}\sum_{i=1}^{7}y_i=40.17-4\times9.32=2.89$.

因此，相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)^2\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}\approx\dfrac{2.89}{\sqrt{28}\times0.55}=\dfrac{2.89}{2\sqrt{7}\times0.55}=\dfrac{2.89}{2\times2.646\times0.55}=0.99$.

因为 y 与 t 的相关系数近似为 0.99，说明 y 与 t 的线性相关（程度）相当高，从而可以用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系.

问题 12 求回归方程

问题分析：求回归方程的关键是要确定回归方程的斜率和截距.

条件 12.1　给定统计数据表

条件分析：当给定统计数据表时，可以先利用散点数据计算两个变量的平均值，再利用斜率公式计算斜率，然后利用截距公式计算截距，最后写出回归方程.

例 19.60（甲 1469-1）某地区 2007 年至 2013 年农村居民家庭人均纯收入 y（单位：千元）的数据如表 19.46 所示.

表 19.46

年　份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
年份代号 t	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入 y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

求 y 关于 t 的线性回归方程.

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$.

解析：$\because \overline{t}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，$\overline{y}=\dfrac{2.9+3.3+3.6+4.4+4.8+5.2+5.9}{7}=4.3$.

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)^2=9+4+1+0+1+4+9=28$.

$\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=(-3)\times(-1.4)+(-2)\times(-1.0)+(-1)\times(-0.7)+0\times0.1+1\times0.5+2\times0.9+3\times1.6=14$，

即 $\hat{b}=\dfrac{14}{28}=0.5$，代入 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$ 可得：$\hat{a}=4.3-0.5\times4=2.3$.

故所求回归方程为：$\hat{y}=0.5t+2.3$.　直线的斜截式方程

条件 12.2　给定统计散点图

条件分析：当给定统计散点图时，可以先利用散点数据计算两个变量的平均值，再利用斜率公式计算斜率，然后利用截距公式计算截距，最后写出回归方程.

例 19.61（乙 1519-1/69-1）某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x（单位：千元）对年销售量 y（单位：t）和年利润 z（单位：千元）的影响，对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 $y_i\left(i=1,2,\cdots,8\right)$ 的数据做了初步处理，得到如图 19.37 所示的散点图及如表 19.47 所示的一些统计量的值.

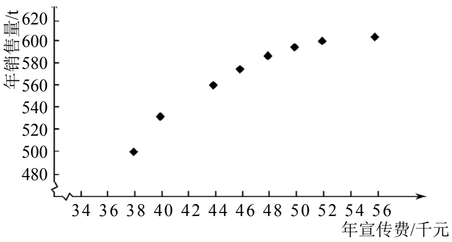


图 19.37

表 19.47

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{8}(w_i-\bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$\sum_{i=1}^{8}(w_i-\bar{w})(y_i-\bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$ ，$\bar{w}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}w_i$.

根据散点图判断，$y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型？（给出判断即可，不必说明理由）

解析：∵从散点图上可见：年销售量 y 与年宣传费 x 显然不呈正比（直线）关系，因此，$y=c+d\sqrt{x}$ 更适合作为年销售量 y 与年宣传费 x 的回归方程类型.

例 19.62 （乙 1519-2/69-2）某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x（单位：千元）对年销售量 y（单位：t）和年利润 z（单位：千元）的影响，对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 $y_i\left(i=1,2,\cdots,8\right)$ 的数据做了初步处理，得到如图 19.38 所示的散点图及如表 19.48 所示的一些统计量的值.

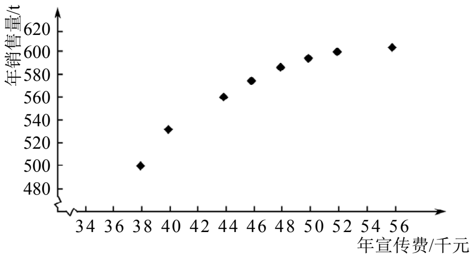


图 19.38

表 19.48

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{8}(w_i-\bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$\sum_{i=1}^{8}(w_i-\bar{w})(y_i-\bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$ ，$\bar{w}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}w_i$.

根据散点图可见：$y=c+d\sqrt{x}$ 适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型，利用表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程.

附：对于一组数据 $\left(u_1,v_1\right)$，$\left(u_2,v_2\right)$，…，$\left(u_n,v_n\right)$，其回归直线方程 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)\left(v_i-\bar{v}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

解析：令 $w=\sqrt{x}$ ，则问题转化为先求 y 关于 w 的回归方程.

$$\because \hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)\left(v_i-\bar{v}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(u_i-\bar{u}\right)^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(w_i-\bar{w}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(w_i-\bar{w}\right)^2}=\frac{108.8}{1.6}=68，\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{w}=563-68\times6.8=100.6，$$

∴ y 关于 w 的回归方程为 $\hat{y}=100.6+68w$，即 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=100.6+68\sqrt{x}$.

条件 12.3 给定统计折线图

条件分析：当给定统计折线图时，关键是利用折线图确定散点数据. 先利用散点数据计算两个变量的平均值，再利用斜率公式计算斜率，然后利用截距公式计算截距，最后写出回归方程.

例 19.63 （丙 1618-2/68-2）图 19.39 是我国 2008 年至 2014 年生活垃圾无害化处理量（单位：亿吨）的折线图.

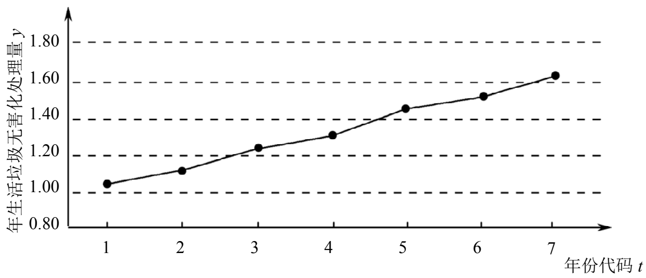


图 19.39

由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的相关系数为 0.99，建立 y 关于 t 的回归方程（系数精确到 0.01），预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量.

附注：

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}y_i=9.32$，$\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i=40.17$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=0.55$，$\sqrt{7}\approx 2.646$.

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)^2\sum\limits_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$，

回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$.

解析：∵由（丙 1618-1/68-1）有 $\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=2.89$，$\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)^2=28$.

$\therefore \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(t_i-\overline{t}\right)^2}=\dfrac{2.89}{28}=0.103$，又∵ $\overline{y}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}y_i}{7}=\dfrac{9.32}{7}=1.331$，$\overline{t}=4$，

$\therefore \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}\approx 1.331-0.103\times 4\approx 0.92$. 所以，$y$ 关于 t 的回归方程为：$\hat{y}=0.92+0.10t$.

将 2016 年对应的年份代码 $t=9$ 代入回归方程得：$\hat{y}=0.92+0.10\times 9=1.82$.

所以，预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量约为 1.82 亿吨.

问题 13 求回归预测

问题分析：所谓回归预测就是根据回归方程对未来可能的取值进行计算作出预测.

条件 13.1　给定回归方程

条件分析：当给定回归方程时，可以利用函数思想进行计算.

例 19.64　（乙 1519-3/69-3）某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x（单位：千元）对年销售量 y（单位：t）和年利润 z（单位：千元）的影响，对近 8 年的年宣传费 x_i 和年销售量 $y_i\left(i=1,2,\cdots,8\right)$ 的数据做了初步处理，得到如图 19.40 所示的散点图及如表 19.49 所

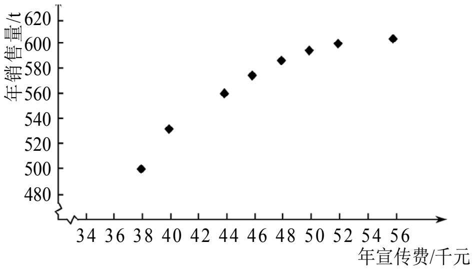


图 19.40

示的一些统计量的值.

表 19.49

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{8}(w_i-\bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$\sum_{i=1}^{8}(w_i-\bar{w})(y_i-\bar{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$， $\bar{w}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}w_i$.

已知：y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=100.6+68\sqrt{x}$，且这种产品的年利率 z 与 x，y 的关系为 $z=0.2y-x$，回答下列问题：

（i）年宣传费 $x=49$ 时，年销售量及年利润的预报值是多少？

（ii）年宣传费 x 为何值时，年利率的预报值最大？

解析：（i）当年宣传费 $x=49$ 时，

由 $\hat{y}=100.6+68\sqrt{x}$ 可得年销售量的预报值为： $\hat{y}=100.6+68\sqrt{49}=576.6$，

由 $z=0.2y-x$ 可得年利润的预报值为： $z=0.2\times576.6-49=66.32$.

（ii）$\because z=0.2y-x$，且 $\hat{y}=100.6+68\sqrt{x}$，$\therefore \hat{z}=0.2\left(100.6+68\sqrt{x}\right)-x$，即 $\hat{z}=-x+13.6\sqrt{x}+20.12$.

可令 $t=\sqrt{x}$，则 $\hat{z}=-t^2+13.6t+20.12$

显然，当 $t=\sqrt{x}=-\frac{B}{2A}=-\frac{13.6}{2\times(-1)}=6.8$，即 $x=t^2=46.24$ 时，$\hat{z}$ 取得最大值，且 $\hat{z}_{\max}=\frac{4AC-B^2}{4A}=C-\frac{B^2}{4A}=20.12-\frac{13.6^2}{4\times(-1)}=20.12+46.24=66.36$.

即年宣传费 x 为 46.24（千元）时，年利率的预报值最大可达 66.36（千元）.

例 19.65 （甲 1469-2）某地区 2007 年至 2013 年农村居民家庭人均纯收入 y（单位：千元）的数据如表 19.50 所示.

表 19.50

年　份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
年份代号 t	1	2	3	4	5	6	7
人均纯收入 y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

可以求得回归方程为：$\hat{y}=0.5t+2.3$，利用回归方程，分析 2007 年至 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入的变化情况，并预测该地区 2015 年农村居民家庭人均纯收入.

解析：$\because \hat{b}=0.5>0$，$\therefore$从 2007 年到 2013 年该地区农村居民家庭人均纯收入逐年增加，且平均每年增加 0.5（千元）.

将 2015 年的年份代号 $t=9$ 代入回归方程 $\hat{y}=0.5t+2.3$ 可得：$\hat{y}=0.5\times9+2.3=6.8$.

即预测该地区 2015 年农村居民家庭人均纯收入为 6.8 千元.

例 19.66 （甲 1818-2/68-2）如图 19.41 所示是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y（单位：亿元）的折线图.

为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额，建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 1，2，…，17）建立模型①：$\hat{y}=-30.4+13.5t$；根据 2010 年至 2016 年的数据（时间变量 t 的值依次为 1，2，…，7）建立模型②：$\hat{y}=99+17.5t$. 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠？并说明理由.

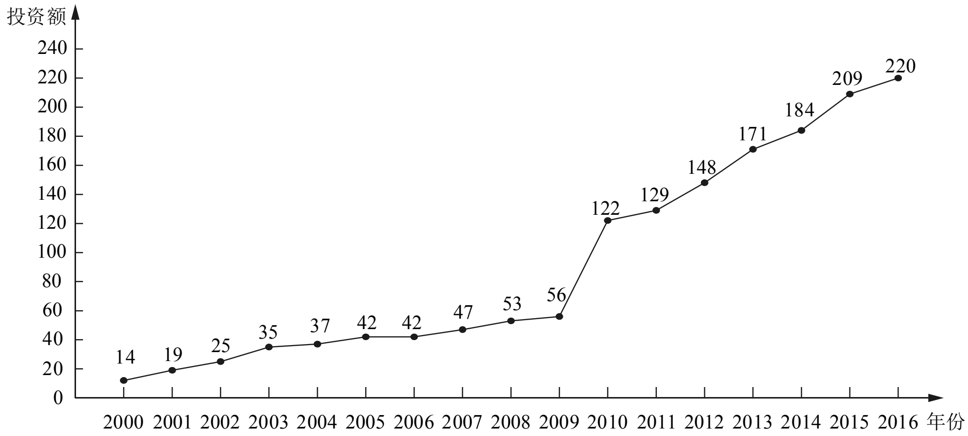


图 19.41

解析：我认为，利用模型②得到的预测值更可靠，理由如下.

①从折线图可以看出：2000 年至 2016 年的数据对应的点没有随机散布在直线 $\hat{y}=-30.4+13.5t$ 的上下，因此模型①不能很好地描述环境基础设施投资额的变化趋势. 2010 年相对于 2009 年的环境基础设施投资额有明显增加，2010 年至 2016 年的数据对应的点位于直线 $\hat{y}=99+17.5t$ 附近，这说明从 2010 年开始环境基础设施投资额呈线性增加的趋势，因此模型②较好地描述了 2010 年以后环境基础设施投资额的变化趋势. 因此，利用模型②得到的预测更可靠.

②从计算结果上来看，相对于 2016 年的环境基础设施投资额 220 亿元，由模型①得到的预测值是 199.1 亿元，由模型②得到的预测值是 221.5 亿元. 显然，由模型①得到的预测值增幅偏低，而由模型②得到的预测值增幅比较合理. 因此，利用模型②得到的预测值更可靠.

回答出以上两种理由中的任何一种即可，回答其他合理的理由也可得分

问题 14 卡方公式应用

问题分析：由卡方公式确定的随机变量主要用于判定在独立性检验中，在多大程度上可以认为“两个分类变量有关系”.

条件 14.1　给定两组监测数据

问题分析：所谓回归预测就是根据回归方程对未来可能的取值进行计算并作出预测.

例 19.67 （甲 1719-2/68-2）海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量（单位：kg），其频率分布直方图如图 19.42 所示.

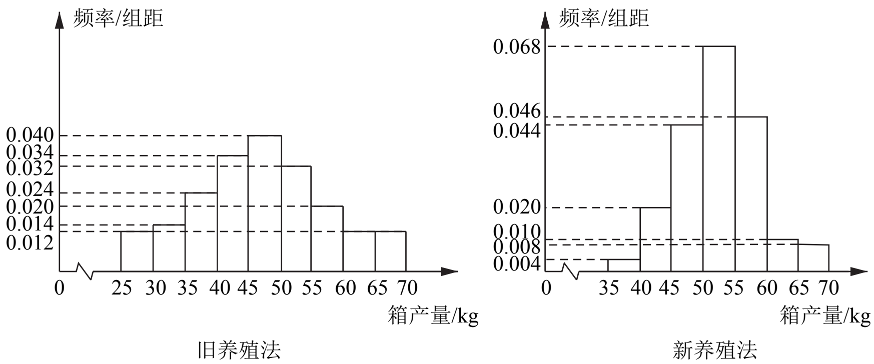


图 19.42

若记 A 表示事件"旧养殖法的箱产量低于 50 kg"，则可估计 A 的概率为 0.62．填写表 19.51 所示的列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关．

表 19.51

	箱产量＜50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法		
新养殖法		

附：

$P(K^2 \geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

，$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$．

分析：（1）根据频率分布直方图中小长方形面积等于对应概率，计算 A 的概率；（2）将数据填入对应表格，代入卡方公式，计算 $K^2 \approx 15.705$，对照参考数据可作出判断．

解析：根据箱产量的频率分布直方图可得列联表如表 19.52 所示．

表 19.52

	箱产量<50kg	箱产量≥50kg
旧养殖法	62	38
新养殖法	34	66

$$K^2=\frac{200\times\left(62\times66-34\times38\right)^2}{100\times100\times96\times104}\approx15.705.$$

由于 $15.705>6.635$，故有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关．

例 19.68 （丙 1818-3/68-3）某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了（单人独立）完成某项生产任务的两种新的生产方式．为比较两种生产方式的效率，选取 40 名工人，将他们随机分成两组，每组 20 人，第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式．根据 40 名工人完成（该项）生产任务的工作时间（单位：分钟）计算出 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 $m=80$，并将完成生产任务所需时间超过 m 和不超过 m 的工人数填入表 19.53 中．

表 19.53

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

根据上述列表，能否有 99%的把握认为两种生产方式的效率有差异？

附：$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，

$P(K^2 \geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

．

解析：∵第一种生产方式中：$a=15，b=5$；第二种生产方式中：$c=5，d=15$．

∴由 $K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$ 可得：

$$K^2=\frac{40\times\left(15\times15-5\times5\right)^2}{\left(15+5\right)\left(5+15\right)\left(15+5\right)\left(5+15\right)}=\frac{40\times200^2}{20^4}=10>6.635.$$

由表

$P(K^2 \geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

可得：$P\left(10>6.635\right)=0.010$．

因此，有 99%的把握认为两种生产方式的效率有差异．

第 20 题　直线与圆锥曲线背景

20

背景知识

一、直线的方程

直线的倾斜角：我们把 x 轴的正方向与直线 l 向上方向所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角，并将与 x 轴平行或重合的直线的倾斜角规定为 0° .

直线的斜率：我们把一条直线倾斜角 α $(0\leqslant\alpha<\pi,\alpha\neq\frac{\pi}{2})$ 的正切值 $\tan\alpha$ 叫做这条直线的斜率，斜率常用 k 表示，即 $k=\tan\alpha$. 经过 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 两点的直线的斜率为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

两条平行或垂直直线的斜率关系：设两条直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2 ，则 $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$ ，$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

直线的点斜式方程：经过点 $P(x_0,y_0)$ 且斜率为 k 的直线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.

直线的斜截式方程：斜率为 k 且纵截距为 b ，即与 y 轴的交点为 $(0,b)$ 的直线方程为 $y=kx+b$.

直线的两点式方程：经过 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2)$ 两点的直线方程为 $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 或 $\dfrac{y-y_2}{x-x_2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（若 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，则两点式可理解为：过点 A 或点 B 的点斜式方程）.

直线的截距式方程：经过点 $A(a,0)$，$B(0,b)(ab\neq0)$ 的两点式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 称为直线的截距式方程.

直线的一般式方程：我们把关于 x,y 的二元一次方程 $Ax+By+c=0\left(A^2+B^2\neq0\right)$ 叫做直线的一般式方程，简称一般式. 其中，$A^2+B^2\neq0$ 表示 A，B 不同时为 0.

二、圆的方程

圆的标准方程：以点 $C(a,b)$ 为圆心，以 r 为半径的圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

圆的一般方程：二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 在 $D^2+E^2-4F^2>0$ 时，表示以 $\left(-\dfrac{D}{2},-\dfrac{E}{2}\right)$ 为圆心，以 $\dfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径的圆.

三、圆锥曲线的方程

抛物线方程：平面内与一个定点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ 和一条不过定点的直线 l：$x=-\dfrac{p}{2}$ 的距离相等的动点轨迹方程 $y^2=2px$ ，其中 $|p|$ 表示定点到定直线的距离.

椭圆方程：平面内与两个定点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 的距离之和等于常数 $2a(2a>2c)$ 的动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中，$b^2=a^2-c^2<a^2$.

双曲线方程：平面内与两个定点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 的距离之差的绝对值为常数 $2a(2a<2c)$ 的动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $b^2=c^2-a^2<c^2$.

问题 1 求直线方程

问题分析： 求直线方程问题的关键是要确定直线方程的待定系数.

条件 1.1 求定圆的圆心到含参直线的距离为定值的直线方程

条件分析： 求定圆的圆心到含参直线的距离为定值的直线方程，关键是要利用点到直线的距离公式或综合运用勾股定理和两点间距离公式.

例 20.1 （甲 1606/54）圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 的圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1，则 $a=$（　）

A. $-\dfrac{4}{3}$　　B. $-\dfrac{3}{4}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

解析 1： ∵圆 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 可化为 $(x-1)^2+(y-4)^2=2^2$.

∴该圆的圆心为 $(1,4)$，半径为 2 . 将上式理解为动点 (x,y) 到定点 $(1,4)$ 的距离等于 2.

又∵题设：圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1，∴由点到直线的距离公式可得 $\dfrac{|a\times1+4-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$，

即 $|a+3|=\sqrt{a^2+1}$，两边平方可得：$a^2+6a+9=a^2+1$，解得：$a=-\dfrac{4}{3}$，故选 A，不选 BCD.

解析 2： ∵圆的半径为 2，弦心距为 1，

∴由勾股定理可得半弦长为 $\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$，即弦长为 $2\sqrt{3}$.

∵ $ax+y-1=0$，∴将 $y=-ax+1$ 代入 $(x-1)^2+(y-4)^2=2^2$，可得：$(x-1)^2+(-ax-3)^2=2^2$.

即 $(1+a^2)x^2+(6a-2)x+6=0$，与标准一元二次方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 进行比较，由韦达定理可得：$x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}=-\dfrac{6a-2}{1+a^2}$；$x_1x_2=\dfrac{C}{A}=\dfrac{6}{1+a^2}$.

由两点间距离公式可得 $\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\times\sqrt{1+a^2}=2\sqrt{3}$，即 $\sqrt{\dfrac{(6a-2)^2}{1+a^2}-24}=\sqrt{12}$，亦即 $\dfrac{(6a-2)^2}{1+a^2}=36$，

化简可得 $36a^2-24a+4=36+36a^2$，即 $-24a=32$，解得 $a=-\dfrac{4}{3}$. 故选 A，不选 BCD.

条件 1.2 求过曲线上定点的切线方程

条件分析： 求过曲线上定点的切线方程，关键是求出切点坐标并求出切线的斜率.

例 20.2 （乙 1570-1）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C：$y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $y=kx+a\,(a>0)$ 交于 M，N 两点. 当 $k=0$ 时，分别求 C 在点 M 和 N 处的切线方程.

分析： 当 $k=0$ 时，直线 $y=kx+a\,(a>0)$ 变为 $y=a\,(a>0)$，将 $y=a\,(a>0)$ 代入 $y=\dfrac{x^2}{4}$，解得 $x=\pm2\sqrt{a}$，因此，$M(-2\sqrt{a},a)$，$N(2\sqrt{a},a)$.

解析 1： 设过点 $M(-2\sqrt{a},a)$ 的切线斜率为 m，则切线方程为 $y=m(x+2\sqrt{a})+a$.

设直线 $y=m(x+2\sqrt{a})+a$ 与曲线 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 相切，则两条线只有一个交点. 即将 $y=m(x+2\sqrt{a})+a$ 代入 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 得一元二次方程有两个相等实根.

令 $m(x+2\sqrt{a})+a=\dfrac{x^2}{4}$ 可得 $x^2-4mx-8m\sqrt{a}-4a=0$，　　列交点方程

由 $\Delta=0$ 可得 $16m^2+16\left(2m\sqrt{a}+a\right)=0$，即 $m^2+2\sqrt{a}m+a=0$，　利用相切得到新方程

解得：$m=-\sqrt{a}$，故过点 $M\left(-2\sqrt{a},a\right)$ 的切线为 $y=-\sqrt{a}\left(x+2\sqrt{a}\right)+a$，即 $\sqrt{a}x+y+a=0$．　解方程得切线

同理可得：过点 $N\left(2\sqrt{a},a\right)$ 的切线方程为 $\sqrt{a}x-y-a=0$．　相同过程可以省略

因此，所求切线方程为 $\sqrt{a}x+y+a=0$ 和 $\sqrt{a}x-y-a=0$．　最终归纳本题全部答案或结果

解析 2：$\because$ $y=\dfrac{x^2}{4}$，$\therefore$ $y'=2\times\dfrac{x}{4}=\dfrac{1}{2}x$，　对函数求导数

因此，$y'_M=\dfrac{1}{2}\times\left(-2\sqrt{a}\right)=-\sqrt{a}$，　计算切点 M 的导数值

即 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 在 $M\left(-2\sqrt{a},a\right)$ 点切线的斜率为 $-\sqrt{a}$，　利用导数的几何意义确定切线的斜率

故 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 在 $M\left(-2\sqrt{a},a\right)$ 点切线的方程为 $y-a=-\sqrt{a}\left(x+2\sqrt{a}\right)$，　切线的点斜式方程

即 $\sqrt{a}x+y+a=0$．　化简为切线的标准方程

同理：$y'_N=\dfrac{1}{2}\times\left(2\sqrt{a}\right)=\sqrt{a}$，即 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 在 $N\left(2\sqrt{a},a\right)$ 点切线的斜率为 $\sqrt{a}$，故 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 在 $N\left(2\sqrt{a},a\right)$ 点的切线方程为 $y-a=\sqrt{a}\left(x-2\sqrt{a}\right)$，即 $\sqrt{a}x-y-a=0$．

因此，所求切线方程为 $\sqrt{a}x+y+a=0$ 和 $\sqrt{a}x-y-a=0$．　最终归纳本题全部答案或结果

> **经验总结**：（1）比较两种方法可以发现，运用导数求切线斜率时切点必须在曲线上，因此，凡是求切线的问题必须首先判断切点是否在曲线上，如果切点不在曲线上只能用解析 1；（2）本题所给直线方程中有两个参数 k 和 a，显然参数 k 是直线是否与曲线相切的决定因素，而参数 a 只是切点在哪儿的决定因素（当且仅当在题设条件 $a>0$ 时才在曲线上有切点），因此，在实际解题过程中可以把两个参数都看成是不变的“常数”．

条件 1.3　求使三角形面积最大的过定点的弦所在直线方程

条件分析：求使三角形面积最大的过定点的弦所在直线方程的关键是利用面积最大来确定直线的斜率．

例 20.3（乙 1470-2）已知点 $A(0,-2)$，椭圆 E 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，F 是椭圆的焦点，O 为坐标原点．设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P，Q 两点，当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时求 l 的方程．

解析：由题意可见：当 $l\perp x$ 轴时不符合题意，因此，可设直线 l 的斜率为 k，则其过点 $A(0,-2)$ 的方程为 $y=kx-2$．设直线 l 与 E 交于 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 两点，则将 $y=kx-2$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 可得：$\left(1+4k^2\right)x^2-16kx+12=0$，$\Delta=(-16k)^2-48\left(1+4k^2\right)=16\left(4k^2-3\right)>0$，即 $x_{1,2}=\dfrac{8k\pm2\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$，从而 $|PQ|=|x_2-x_1|\sqrt{k^2+1}=\dfrac{4\sqrt{4k^2-3}\times\sqrt{k^2+1}}{1+4k^2}$．

又 $\because$ 点 O 到直线 l：$y=kx-2$ 的距离为 $d=\dfrac{|0-0-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{k^2+1}}$．

$\therefore$ $\triangle OPQ$ 的面积为 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|PQ|d=\dfrac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}$．

令 $t=\sqrt{4k^2-3}>0$（$k^2>\dfrac{3}{4}$），则 $t^2=4k^2-3$，即 $4k^2+1=t^2+4$．

因此，$S_{\triangle OPQ}=\dfrac{4t}{t^2+4}=\dfrac{4}{t+\dfrac{4}{t}}$，又∵ $t+\dfrac{4}{t}\geqslant 2\sqrt{t\times\dfrac{4}{t}}=4$，∴ $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{4t}{t^2+4}=\dfrac{4}{t+\dfrac{4}{t}}\leqslant 1$，

当且仅当 $t=\dfrac{4}{t}$，即 $t=2$ 时，$\triangle OPQ$ 的面积最大，为 $S_{\triangle OPQ}=1$．

此时，由 $t=\sqrt{4k^2-3}=2$，解得：$k=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}$．故直线 l 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}x-2$．

条件 1.4　求平分已知三个顶点的三角形面积的直线方程

条件分析：对于给定了三个顶点坐标的三角形，关键是要将“面积平分”转化为坐标关系.

例 20.4（甲 1362）已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$，直线 $y=ax+b(a>0)$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分，则 b 的取值范围是（　）.

A．$(0,1)$　　B．$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　C．$\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{3}\right]$　　D．$\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

解析：在平面直角坐标系中标出点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，$C(0,1)$．

设直线 $y=ax+b(a>0)$ 与 x 轴交于 $Q\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$，与 y 轴交于 $P(0,b)$，与 BC 边交于 $R(m,n)$．

直线 $y=ax+b(a>0)$ 与 BC 方程 $y=-(x-1)$ 的交点纵坐标为 $n=\dfrac{a+b}{1+a}$．

∵“直线 $y=ax+b(a>0)$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分”意为 $S_{\triangle QRB}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$．

∴ $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a+b}{1+a}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 1$，即 $\dfrac{(a+b)^2}{a(1+a)}=1$，亦即 $b^2+2ab-a=0$，分离变量可得：$a=\dfrac{b^2}{1-2b}$．

当 $Q\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$ 与 $A(-1,0)$ 重合时，$\triangle QRB$ 底边最长，$R(m,n)$ 应为 BC 的中点，由中点坐标公式可得：

$m=n=\dfrac{1}{2}$，此时直线的斜率最小值为 $a=\dfrac{\dfrac{1}{2}-0}{\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{3}$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$．

将 $a=\dfrac{b^2}{1-2b}$ 代入上式可得：$\dfrac{b^2}{1-2b}\geqslant\dfrac{1}{3}$．

当 $b<\dfrac{1}{2}$ 时，即 $(1-2b)>0$，有 $3b^2+2b-1\geqslant 0$，解得：$b\leqslant -1$ 或 $b\geqslant\dfrac{1}{3}$，即 $\dfrac{1}{3}\leqslant b<\dfrac{1}{2}$．

当 $b>\dfrac{1}{2}$ 时，即 $(1-2b)<0$，有 $3b^2+2b-1\leqslant 0$，解得：$-1\leqslant b<\dfrac{1}{3}$，无解.

同理可得：当直线与 AC，BC 相交时，$1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{1}{3}$．故选 B，不选 ACD.

条件 1.5　求几何作图中的直线方程

条件分析：对几何作图中的直线方程问题，关键是利用作图条件来确定直线的相关参数.

例 20.5（乙 1720-2）设 A，B 为曲线 C：$y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点，A 与 B 的横坐标之和为 4，A，B 所在直线的斜率为 1，设 M 为曲线 C 上一点，C 在 M 处的切线与直线 AB 平行，且 $AM\perp BM$，求直线 AB 的方程.

解析 1：∵题设 A，B 所在直线的斜率为 1，∴由 $y=\frac{x^2}{4}$ 可得，$y'=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$．设 $M(x_0,y_0)$，则由题设"C 在 M 处的切线与直线 AB 平行"可得 $\frac{x_0}{2}=1$，解得：$x_0=2$，代入曲线 C 的方程可得：$y_0=1$，即 M 点坐标为 $M(2,1)$．设直线 AB 的方程为 $y=x+m$，则由题设"A 与 B 的横坐标之和为 4"可得：线段 AB 的中点为 $N(2,2+m)$．

由于点 $M(2,1)$ 与点 $N(2,2+m)$ 在同一条竖直线上（横坐标均为 2），因此可得：$|MN|=|m+1|$，

或由两点间距离公式亦可得

由于直线 $y=x+m$ 与 $y=\frac{x^2}{4}$ 相交于 A，B 两点，将 $y=x+m$ 代入 $y=\frac{x^2}{4}$ 可得 $x^2-4x-4m=0$．

且当 $\Delta=16(m+1)>0$，即 $m>-1$ 时，$x_{1,2}=2\pm2\sqrt{m+1}$．从而 $|AB|=\sqrt{2}$，$|x_1-x_2|=4\sqrt{2(m+1)}$．

直线 AB 的斜率为 1，倾斜角为 45°

由题设 $AM\perp BM$ 可知：$\triangle ABM$ 为直角三角形，又点 $N(2,2+m)$ 是线段 AB 的中点，因此，相当于 A，B，M 在以点 N 为圆心，以 AB 为直径的半圆上，故 $|AB|=2|MN|$，即 $4\sqrt{2(m+1)}=2|m+1|$，解得 $m=7$．所以，直线 AB 的方程为 $y=x+7$．

解析 2：（利用向量垂直的条件）

设直线 AB 的方程为 $y=x+m$，且设 $A(x_1,x_1+m)$，$B(x_2,x_2+m)$，则 $\overrightarrow{MA}=(x_1-2,x_1+m-1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2-2,x_2+m-1)$，因为 $AM\perp BM$，所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$，即 $x_1x_2-2(x_1+x_2)+4+x_1x_2+(m-1)(x_1+x_2)+(m-1)^2=0$，化简可得：$2x_1x_2+(m-3)(x_1+x_2)+(m-1)^2+4=0$．

又∵题设：$y=x+m$，∴代入曲线 C：$y=\frac{x^2}{4}$ 可得：$\frac{x^2}{4}=x+m$，$\frac{x^2}{4}-x-m=0$．

由韦达定理可得：$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=-4m$，代入上式可得：$-8m+4(m-3)+(m-1)^2+4=0$．

即 $m^2-6m-7=0$，解得：$m_1=7$，$m_2=-1$．∵ $y=\frac{x^2}{4}\geqslant0$，∴ $m>0$，故舍去负值，取 $m=7$．

例 20.6（丙 1770-2）已知抛物线 C：$y^2=2x$，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，以线段 AB 为直径的圆 M 过点 $P(4,-2)$，求直线 l 与圆 M 的方程．

解析：∵题设：过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，∴可设直线 l 的方程为 $x=my+2$，且设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，解 $\begin{cases}x=my+2\\y^2=2x\end{cases}$ 可得：$y^2-2my-4=0$，由韦达定理可得：$y_1+y_2=2m$，$y_1y_2=-4$，代入 $x=my+2$ 可得：$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+4=2m^2+4$，$x_1x_2=4$．

故由中点坐标公式可得：以 AB 为直径的圆 M 的圆心坐标为 (m^2+2,m)．由两点间距离公式可得：圆 M 的半径为 $r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2x_1+(y_2+y_1)^2-4y_2y_1}$，

即 $r=\sqrt{(m^2+2)^2+m^2}$．又由于题设：圆 M 过点 $P(4,-2)$，因此，

① 由 $|PM|=r$ 可得：$\sqrt{(m^2+2-4)^2+(m+2)^2}=\sqrt{(m^2+2)^2+m^2}$，　圆心 M 到 P 点的距离等于半径

即 $(m^2-2)^2+(m+2)^2=(m^2+2)^2+m^2$，化简可得：$2m^2-m-1=0$，解得 $m=1$ 或 $m=-\frac{1}{2}$．

②由 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ 可得：$(x_1-4)(x_2-4)+(y_1+2)(y_2+2)=0$，　∵ AB 为直径，∴ $AP\perp BP$

即 $x_1x_2-4(x_1+x_2)+y_1y_2+2(y_1+y_2)+20=0$，利用 $y_1y_2=-4$，$x_1x_2=4$ 可得：$2m^2-m-1=0$，解得 $m=1$ 或 $m=-\frac{1}{2}$．

当 $m=1$ 时，直线 l 的方程为 $x-y-2=0$，圆 M 的圆心坐标为 $(3,1)$，圆 M 的半径为 $\sqrt{10}$，圆 M 的方

程为$(x-3)^2+(y-1)^2=10$.

当$m=-\frac{1}{2}$时，直线l的方程为$2x+y-4=0$，圆M的圆心坐标为$\left(\frac{9}{4},-\frac{1}{2}\right)$，圆$M$的半径为$\frac{\sqrt{85}}{4}$，圆$M$的方程为$\left(x-\frac{9}{4}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{85}{16}$.

经验总结: 处理直线与圆的弦长问题时多用几何法，即弦长的一半、弦心距、半径构成直角三角形. 代数方法为运用根与系数的关系及弦长公式计算:

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$.

例 20.7 （乙 1869-1）设椭圆C: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，过F的直线l与C交于A，B两点，点M的坐标为$(2,0)$. 当l与x轴垂直时，求直线AM的方程.

解析：∵题设椭圆C: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点为F，∴$a^2=2$，$b^2=1$，再由$a^2=b^2+c^2$可得：$c^2=1$，故右焦点为$F(1,0)$.

又∵直线l过点$F(1,0)$且与x轴垂直，∴直线l的方程为$x=1$. 将$x=1$代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$可得：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

若$A\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则$k_{MA}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-0}{1-2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，且直线$AM$的方程为$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$，即$\sqrt{2}x+2y-2\sqrt{2}=0$，亦即$x+\sqrt{2}y-2=0$.

若$A\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则$k_{MA}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-0}{1-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且直线$AM$的方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$，即$\sqrt{2}x-2y-2\sqrt{2}=0$，亦即$x-\sqrt{2}y-2=0$.

综上所述，直线AM的方程为$x+\sqrt{2}y-2=0$或$x-\sqrt{2}y-2=0$.

例 20.8 （乙 1820-1）设抛物线C: $y^2=2x$，点$A(2,0)$，$B(-2,0)$，过点A的直线l与C交于M，N两点. 当l与x轴垂直时，求直线BM的方程.

解析：当直线l与x轴垂直时，∵直线l过点$A(2,0)$，∴直线l的方程为$x=2$.

将直线方程与抛物线方程联立，解方程组可得交点坐标.

解$\begin{cases}x=2\\y^2=2x\end{cases}$可得：$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\\y=-2\end{cases}$，即点$M(2,2)$或$M(2,-2)$.

当点为$M(2,2)$时，∵已知点$B(-2,0)$，∴$k_{BM}=\frac{0-2}{-2-2}=\frac{1}{2}$.

由点斜式可得直线BM的方程为$y-0=\frac{1}{2}(x+2)$ （过点B）或$y-2=\frac{1}{2}(x-2)$（过点M）.

两式均可化为：$x-2y+2=0$.

当点为$M(2,-2)$时，∵已知点$B(-2,0)$，∴由两点式可直接得到直线BM的方程为：$\frac{y-0}{x+2}=\frac{0+2}{-2-2}$或$\frac{y+2}{x-2}=\frac{0+2}{-2-2}$.

可以理解为：动点(x,y)与任意定点的斜率与两定点的斜率相等

两式均可化简为：$x+2y+2=0$.

例 20.9 （甲 1820-1/69-1）设抛物线C: $y^2=4x$的焦点为F，过F且斜率为$k(k>0)$的直线l与C交

于 A，B 两点，$|AB|=8$．求 l 的方程．

解析：∵题设抛物线 C：$y^2=4x$，∴与抛物线 $y^2=2px$，焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线 $x=-\frac{p}{2}$ 比较可得：$p=2$，焦点为 $F(1,0)$，准线为 $x=-1$．

标准抛物线相关知识

设过焦点 $F(1,0)$，斜率为 $k(k>0)$ 的直线方程为：$y=k(x-1)$．

解 $\begin{cases}y=k(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$ 可得：$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$．

∵ $\Delta=16k^2+16>0$，∴由韦达定理可得：$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$．

∵题设 $|AB|=8$，∴ $|AF|+|FB|=8$．

且根据抛物线定义可得：$|AF|=x_A+\frac{p}{2}=x_A+1$，$|FB|=|BF|=x_B+1$，即 $x_A+x_B+2=8$．

又∵ $x_A+x_B=x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$，∴ $\frac{2k^2+4}{k^2}+2=8$，解得：$k=\pm1$（题设 $k>0$，舍负）．

因此，直线 l 的方程为 $y=x-1$．

例 20.10（甲 1310）设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，直线 l 过 F 且与 C 交于 A，B 两点．若 $|AF|=3|BF|$，则 l 的方程为（ ）．

A．$y=x-1$ 或 $y=-(x-1)$　　B．$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$ 或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$

C．$y=\sqrt{3}(x-1)$ 或 $y=-\sqrt{3}(x-1)$　　D．$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$ 或 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$

解法 1：∵抛物线方程为 $y^2=4x$，∴焦点坐标为 $(1,0)$，准线方程为 $x=-1$．

设过焦点的直线方程为 $y=k(x-1)$，则代入抛物线方程可得：$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$．

∵直线 l 过 F 且与 C 交于 A，B 两点，∴ $x_1+x_2=-\frac{B}{A}=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{C}{A}=\frac{k^2}{k^2}=1$．

又∵ $|AF|=3|BF|$，∴ $\frac{x_2-1}{1-x_1}=\frac{3}{1}$（设 $x_2>1$，$x_1<1$），即 $x_2-1=3-3x_1$，亦即 $x_2=4-3x_1$．

解 $\begin{cases}x_1x_2=1\\x_2=4-3x_1\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}\\x_2=3\end{cases}$，代入 $x_1+x_2=\frac{2(k^2+2)}{k^2}$，可得：$2\left(1+\frac{2}{k^2}\right)=\frac{10}{3}$，解得：$k=\pm\sqrt{3}$．故选 C，不选 ABD．

解法 2：设直线 l 与 C 交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则根据抛物线的定义有：$|AF|=1+x_1$，$|BF|=1+x_2$．

∵ $|AF|=3|BF|$，∴ $x_1+1=3(x_2+1)$，即 $x_1=3x_2+2$．　①

又∵ $|AF|=3|BF|$，∴根据相似三角形可得：$|y_1|=3|y_2|$，代入抛物线方程可得：$x_1=9x_2$．　②

解①②可得：$x_1=3$，$x_2=\frac{1}{3}$．

当 $x_1=3$ 时，代入抛物线方程可得：$y_1=\pm2\sqrt{3}$．

若 $y_1=2\sqrt{3}$，即 A 点坐标为 $(3,2\sqrt{3})$，∵ $F(1,0)$，∴ $k_{AB}=k_{AF}=\frac{2\sqrt{3}-0}{3-1}=\sqrt{3}$，此时直线为 $y=\sqrt{3}(x-1)$．

若 $y_1=-2\sqrt{3}$，即 A 点坐标为 $(3,-2\sqrt{3})$，∵ $F(1,0)$，∴ $k_{AB}=k_{AF}=\frac{-2\sqrt{3}-0}{3-1}=-\sqrt{3}$，此时直线为 $y=-\sqrt{3}(x-1)$．故选 C，不选 ABD．

问题 2 求直线的斜率或斜率的取值范围

问题分析：求直线的斜率或斜率的取值范围问题，关键是要找到影响直线斜率的因素或制约直线斜率的条件.

条件 2.1 给定抛物线上两点的横坐标之和求两点的斜率

条件分析：遇到直线与曲线有两个交点的条件时，通常采用“设而不求”的策略进行计算.

例 20.11 （乙 1720-1）设 A，B 为曲线 C：$y=\dfrac{x^2}{4}$ 上两点，A 与 B 的横坐标之和为 4．求直线 AB 的斜率.

解析：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq x_2$，则 $y_1=\dfrac{x_1^2}{4}$，$y_2=\dfrac{x_2^2}{4}$.

于是直线 AB 的斜率为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{x_1+x_2}{4}$．又∵题设 $x_1+x_2=4$，∴代入上式可得：$k=\dfrac{x_1+x_2}{4}=1$.

条件 2.2 给定过定点的直线与定圆相交

条件分析：遇到给定过定点的直线且求斜率问题时，往往设直线的点斜式方程进行讨论.

例 20.12 （乙 1520-1）已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 C：$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 M，N 两点．求 k 的取值范围.

解析 1：（几何法）∵直线过定点 $A(0,1)$，∴可设直线 l 的方程为 $y=kx+1$.

∵直线 l 与圆 C 交于 M，N 两点．∴从几何的角度来看：圆心到直线的距离应小于半径.

故由点到直线的距离公式可得：$\dfrac{|2k-3+1|}{\sqrt{1+k^2}}<1$，解得：$\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}<k<\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$.

所以 k 的取值范围为 $\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3},\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$.

解析 2：（代数法）∵直线过定点 $A(0,1)$，∴可设直线 l 的方程为 $y=kx+1$.

∵直线 l 与圆 C 交于 M，N 两点．∴从代数的角度来看：方程组 $\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=1\\ y=kx+1\end{cases}$ 应该有两组解.

将 $y=kx+1$ 代入 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 可得：$(x-2)^2+(kx-2)^2-1=0$，即 $(1+k^2)x^2-4(k+1)x+7=0$ 应该有两个根.

由 $\Delta>0$ 可得：$16(k+1)^2-28(1+k^2)>0$，化简可得：$3k^2-8k+3<0$， 转化为关于 k 的二次不等式

解得：$\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}<k<\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$，所以 k 的取值范围为 $\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3},\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$.

条件 2.3 给定几何作图条件

条件分析：当给定几何作图条件时，关键是要确定影响斜率的因素.

例 20.13 （甲 1621-2）已知 A 是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+1$ 的左顶点，斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A，M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$．当 $2|AM|=|AN|$ 时，证明：$\sqrt{3}<k<2$.

证明：∵ $A(-2,0)$，∴ AM 所在直线方程可设为 $y=k(x+2)(k>0)$.

将 AM 所在直线方程 $y=k(x+2)$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 可得：$(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$．

$\because x_A=-2$，$\therefore$ 由韦达定理可得：$x_Ax_M=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$，解得：$x_M=\frac{2(3-4k^2)}{3+4k^2}$，故 $|AM|=|x_M-x_A|\sqrt{1+k^2}$ $=\frac{12\sqrt{(1+k^2)}}{3+4k^2}$．又 $\because MA\perp NA$，$\therefore k_{AN}=-\frac{1}{k}$，将 AN 所在直线方程 $y=-\frac{1}{k}(x+2)$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 可得 $(3k^2+4)x^2+16x+16-12k^2=0$．

$\because x_A=-2$，$\therefore$ 由韦达定理可得：$x_Ax_N=\frac{16-12k^2}{3k^2+4}$，解得：$x_N=\frac{6k^2-8}{3k^2+4}$，故 $|AN|=|x_N-x_A|\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}$ $=\frac{12k\sqrt{(1+k^2)}}{3k^2+4}$．

由题设 $2|AM|=|AN|$ 可得：$\frac{2}{3+4k^2}=\frac{k}{3k^2+4}$，化简可得：$4k^3-6k^2+3k-8=0$．

设 $f(t)=4t^3-6t^2+3t-8$，则 k 是 $f(t)=0$ 的解，即 $f(t)$ 的零点．

$\because f'(t)=12t^2-12t+3=3(2t-1)^2\geqslant 0$，$\therefore f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

$\because$ 目标是求证：$\sqrt{3}<k<2$，$\therefore$ 只要证明 $f(\sqrt{3})<0$ 及 $f(2)>0$ 即可．

又 $\because f(\sqrt{3})=4(\sqrt{3})^3-6(\sqrt{3})^2+3\sqrt{3}-8=15\sqrt{3}-26$，$15\sqrt{3}-26<1.733\times 15-26=-0.005<0$，$\therefore f(\sqrt{3})<0$．

$\because f(2)=4\times(2)^3-6\times(2)^2+3\times 2-8=32-24+6-8=6>0$，

$\therefore$ 在 $(\sqrt{3},2)$ 之间存在 k，使 $f(k)=0$，即 $\sqrt{3}<k<2$．

例 20.14（甲 1670-2）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A 是 E 的左顶点，斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A，M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$．当 $2|AM|=|AN|$ 时，求 k 的取值范围．

解析：$\because$ 题设椭圆 E：$\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，$\therefore t>3$，$A(-\sqrt{t},0)$．

将 AM 所在直线方程 $y=k(x+\sqrt{t})$ 代入 $\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{3}=1$ 可得 $(3+tk^2)x^2+2k^2t\sqrt{t}x+k^2t^2-3t=0$．

$\because x_A=-\sqrt{t}$，$\therefore$ 由韦达定理可得 $(-\sqrt{t})x_M=\frac{k^2t^2-3t}{3+k^2t}$，解得：$x_M=\frac{(3-k^2t)\sqrt{t}}{3+k^2t}$．

故 $|AM|=|x_M-x_A|\sqrt{1+k^2}=\frac{6\sqrt{(1+k^2)t}}{3+k^2t}$，又 $\because MA\perp NA$，$\therefore k_{AN}=-\frac{1}{k}$．

将 AN 所在直线方程 $y=-\frac{1}{k}(x+\sqrt{t})$ 代入 $\frac{x^2}{t}+\frac{y^2}{3}=1$ 可得：$(3k^2+t)x^2+2t\sqrt{t}x+t^2-3k^2t=0$．

$\because x_A=-\sqrt{t}$，$\therefore$ 由韦达定理可得：$(-\sqrt{t})x_N=\frac{t^2-3k^2t}{3k^2+t}$，解得：$x_N=\frac{(3k^2-t)\sqrt{t}}{3k^2+t}$．

故 $|AN|=|x_N-x_A|\sqrt{1+\left(-\frac{1}{k}\right)^2}=\frac{6k\sqrt{(1+k^2)t}}{3k^2+t}$，由题设 $2|AM|=|AN|$ 可得：$\frac{2}{3+k^2t}=\frac{k}{3k^2+t}$，化简可得：$(k^3-2)t=3k(2k-1)$，显然 $k^3\neq 2$，即 $k\neq\sqrt[3]{2}$．解得：$t=3\frac{k(2k-1)}{k^3-2}$．

$\because$题设$t>3$，$\therefore\begin{cases}k^3-2>0\\k(2k-1)>k^3-2\end{cases}$或$\begin{cases}k^3-2<0\\k(2k-1)<k^3-2\end{cases}$.

解$\begin{cases}k^3-2>0\\k(2k-1)>k^3-2\end{cases}$可得：$\begin{cases}k^3>2\\2k^2-k>k^3-2\end{cases}$，即$\begin{cases}k^3>2\\2k^2+2>k^3+k\end{cases}$，解得：$\sqrt[3]{2}<k<2$.

解$\begin{cases}k^3-2<0\\k(2k-1)<k^3-2\end{cases}$可得：$\begin{cases}k^3-2<0\\2k^2-k<k^3-2\end{cases}$，即$\begin{cases}k^3-2<0\\2k^2+2<k^3+k\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k<\sqrt[3]{2}\\k>2\end{cases}$（无解）.

因此，k的取值范围是$\left(\sqrt[3]{2},2\right)$.

经验总结： $\because\left(\sqrt{3}\right)^6=3^3=27,\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=2^2=4$，$\therefore\sqrt{3}>\sqrt[3]{2}$. 因此，比较例 20.12 与例 20.13 可见：斜率k证明的范围要小于计算所得到的范围．这主要是便于取特殊值进行证明.

例 20.15 （丙 1866）已知点$M(-1,1)$和抛物线C：$y^2=4x$，过C的焦点且斜率为k的直线与C交于A，B两点．若$\angle AMB=90°$，则$k=$________.

解析 1：$\because$点$M(-1,1)$不满足$y^2=4x$，$\therefore$点$M(-1,1)$不在抛物线C：$y^2=4x$上.

设过焦点且斜率为k的直线交抛物线于$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$两点，则$\begin{cases}y_1^2=4x_1\\y_2^2=4x_2\end{cases}$，两式相减可得：$y_1^2-y_2^2=4(x_1-x_2)$，即$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$.

由斜率计算公式可得：$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$.

$\because$由上式中的y_1+y_2想到A,B的中点，$\therefore$设中点为$N(x_0,y_0)$，则由中点坐标公式可得：$\begin{cases}x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$，从而$k=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{2}{y_0}$.

又$\because$题设$\angle AMB=90°$，$\therefore|NM|=\dfrac{1}{2}|AB|$.　　将点$N$视为以$AB$为直径的圆心

过点A,B分别作准线的垂线交准线于A',B'两点，则由抛物线的定义可得：
$|AF|=|AA'|$，$|BF|=|BB'|$，即有$|AA'|+|BB'|=|AF|+|BF|=|AB|$.

又$\because|NM|=\dfrac{1}{2}|AB|$，$\therefore|NM|=\dfrac{1}{2}\left(|AA'|+|BB'|\right)$.　　将$MN$视为直角梯形$AA'B'B$的中位线

又$\because AA',BB'$都平行于x轴，$\therefore MN$也平行于x轴.　　梯形中位线性质定理

$\because$题设点$M(-1,1)$，$\therefore$由点N的纵坐标与点M的纵坐标相等可得：$y_0=1$，代入$k=\dfrac{2}{y_0}$可得：$k=2$.

解析 2：设直线AB的方程为$y=k(x-1)$，代入$y^2=4x$可得：$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$.

设直线与抛物线的两交点为$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$，则由韦达定理可得：$x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$，$x_1x_2=1$.

$\because$题设$\angle AMB=90°$，$\therefore$由$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$可得：$(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，即$x_1x_2+(x_1+x_2)+1+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=0$.

$\because y=k(x-1)$，$\therefore y_1y_2=k^2(x_1x_2-x_1-x_2+1)$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)$．将$x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2}$，$x_1x_2=1$代入可得：$k^2-4k+4=0$，解得：$k=2$.

解析 3：设直线AB的方程为$x=ty+1$，代入$y^2=4x$可得：$y^2-4ty-4=0$.

设直线与抛物线的两交点为 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，则由韦达定理可得：$y_1+y_2=-\frac{B}{A}=4t$，$y_1y_2=\frac{C}{A}=-4$.

∵题设 $\angle AMB=90°$，∴由 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ 可得：$(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，即 $(ty_1+2)(ty_2+2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，亦即 $(1+t^2)y_1y_2+(2t-1)(y_1+y_2)+5=0$，将 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$ 代入上式可得：$4t^2-4t+1=0$．解得：$t=\frac{1}{2}$．故 $k=\frac{1}{t}=2$．

> **经验总结**：对于过定点 $(m,0)$ 且与抛物线 $y^2=2px$ 相交的直线，其方程设为 $x=ty+m$（其中 $t=\frac{1}{k}$）比设为 $y=k(x-m)$ 会使得计算更为简便.

例 20.16（丙 1820-1/70-1）已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$，证明：$k<-\frac{1}{2}$.

证明 1：设两交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1\\ \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1\end{cases}$.

两式相减可得：$\frac{x_1^2-x_2^2}{4}+\frac{y_1^2-y_2^2}{3}=0$，亦即 $\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{3}=-\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{4}$，

因此，$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3(x_1+x_2)}{4(y_1+y_2)}$.

又∵题设线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$，∴由中点坐标公式可得：$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ y_1+y_2=2m\end{cases}$，

代入上式可得：$k=-\frac{3}{4m}$.

又∵点 $M(1,m)(m>0)$ 是线段 AB 的中点，∴将 $x=1$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 解得：$y=\pm\frac{3}{2}$.

因此，$0<m<\frac{3}{2}$，故 $k=-\frac{3}{4m}<-\frac{1}{2}$.

证明 2：设直线方程为 $y=kx+b$，则解 $\begin{cases}y=kx+b\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 可得：$(4k^2+3)x^2+8kbx+4b^2-12=0$.

∵直线与椭圆有两个交点，∴ $\Delta>0$，即 $64k^2b^2-4(4k^2+3)(4b^2-12)>0$，化简可得：$4k^2+3>b^2$.

由韦达定理可得：$x_1+x_2=-\frac{8kb}{4k^2+3}$，代入 $y=kx+b$ 可得：$y_1+y_2=-k\frac{8kb}{4k^2+3}+2b=\frac{6b}{4k^2+3}$.

又∵题设线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$，∴由中点坐标公式可得：$\begin{cases}x_1+x_2=2\\ y_1+y_2=2m\end{cases}$，代入上式可得：$-\frac{8kb}{4k^2+3}=2$，$\frac{6b}{4k^2+3}=2m$.

∵题设 $m>0$，∴由 $\frac{6b}{4k^2+3}=2m$ 可得：$b>0$，从而由 $-\frac{8kb}{4k^2+3}=2$ 可得：$k<0$.

由$-\dfrac{8kb}{4k^2+3}=2$可得：$b=-\dfrac{4k^2+3}{4k}$，代入$4k^2+3>b^2$可得：$4k^2+3>\left(-\dfrac{4k^2+3}{4k}\right)^2$，

化简可得：$16k^2>4k^2+3$，即$k^2>\dfrac{1}{4}$，解得：$k>\dfrac{1}{2}$或$k<-\dfrac{1}{2}$.

又∵已求得：$k<0$，∴取$k<-\dfrac{1}{2}$，舍去$k>\dfrac{1}{2}$.

例 20.17（甲 1605）设F为抛物线C：$y^2=4x$的焦点，曲线$y=\dfrac{k}{x}(k>0)$与C交于点P，$PF\perp x$轴，则$k=$（　）.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

解析：∵F为抛物线C：$y^2=4x$的焦点，∴与抛物线标准方程$y^2=2px$比较可得：$p=2$.

故焦点坐标为$F(c,0)=F\left(\dfrac{p}{2},0\right)=F(1,0)$.

设两曲线交点为$P(x_0,y_0)$，∵$PF\perp x$轴，∴$x_0=c=1$.

将$x_0=1$代入$y^2=4x$可得：$y_0=\pm2$，再将$x_0=1$，$y_0=\pm2$代入$y=\dfrac{k}{x}(k>0)$可得：$k=x_0y_0=2$.

（∵题设$k>0$，∴舍负取正）．故选 D，不选 ABC.

问题 3 求圆锥曲线方程

条件分析：从圆锥曲线的标准方程可见：求圆锥曲线方程问题的关键就是确定两个参数a，b，解决问题的基本思想是方程思想（利用题设条件列一个方程，再利用所求圆锥曲线a，b，c，e的特定关系或渐近线方程列另一个方程，进而组成二元二次方程组进行求解），即利用待定系数法确定圆锥曲线的参数.

条件 3.1　求过椭圆三个顶点的圆的方程

条件分析：当给定圆过椭圆的三个顶点时，关键是需要根据其他条件确定所求圆过哪三个顶点.

例 20.18（乙 1564）一个圆经过椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$的三个顶点，且圆心在$x$轴上，则该圆的标准方程为____________.

解析：∵椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$的$a=4>b=2$，∴该椭圆长轴在$x$轴上，短轴在$y$轴上.

∵题设圆心在x轴上，∴该圆过椭圆y轴上的两个顶点和x轴上的一个顶点，为此可设圆心为$(m,0)$，则圆的半径为$4-|m|$.

由圆心到椭圆y轴顶点的距离等于半径可得：$(m-0)^2+(0\pm2)^2=(4-|m|)^2$，即$m^2+4=16-8|m|+(|m|)^2$，解得：$m=\pm\dfrac{3}{2}$.

又∵圆的半径为$4-|m|=\dfrac{5}{2}$，∴圆的方程为$\left(x\pm\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{4}$.

条件 3.2　给定动圆的圆心轨迹方程求特定条件下圆的方程

条件分析：当给定动圆的圆心轨迹方程时，关键是需要利用“特定条件”再来共同确定圆.

例 20.19（甲 1320-2）在平面直角坐标系xOy中，已知圆P在x轴上截得线段长为$2\sqrt{2}$，在y轴

上截得线段长为 $2\sqrt{3}$．从而圆心 P 的轨迹方程为：$y^2-x^2=1$，若 P 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，求圆 P 的方程.

解析：∵圆心 $P(x,y)$ 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴由点到直线的距离公式可得 $\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $|x-y|=1$，亦即圆心在 $x-y=\pm1$ 直线上.

又∵圆心 $P(x,y)$ 的轨迹方程为：$y^2-x^2=1$，∴圆心又在双曲线 $y^2-x^2=1$ 上.

解 $\begin{cases}x-y=1\\y^2-x^2=1\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x_1=0\\y_1=-1\end{cases}$，代入（甲 1320-1）中 $r^2=x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$ 可得 $r^2=3$，圆 P 的方程为 $x^2+(y+1)^2=3$.

解 $\begin{cases}x-y=-1\\y^2-x^2=1\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x_2=0\\y_2=1\end{cases}$，代入（甲 1320-1）中 $r^2=x^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$ 可得 $r^2=3$，圆 P 的方程为 $x^2+(y-1)^2=3$.

例 20.20（甲 1820-2/69-2）设抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，过 F 的直线 $y=x-1$ 与 C 交于 A，B 两点，且 $|AB|=8$．求过点 A，B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

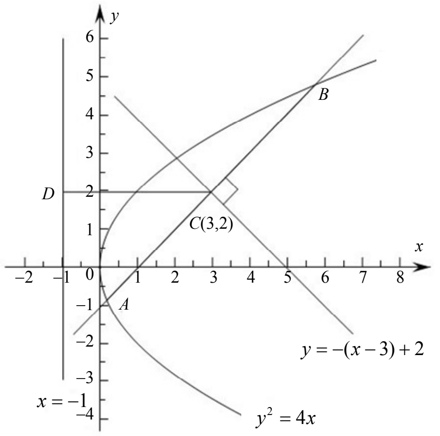


图 20.1

解析 1：根据题意作图，如图 20.1 所示．∵所求圆过点 A，B，∴先求点 A，B 的坐标.

解 $\begin{cases}y=x-1\\y^2=4x\end{cases}$ 可得：$x^2-6x+1=0$，

解得：$x=\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}=3\pm2\sqrt{2}$，$y=2\pm2\sqrt{2}$.

设 $A\left(3-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2}\right)$，$B\left(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}\right)$，则由中点坐标公式可得 A，B 的中点为 $C(3,2)$.

∵ $x_C=3$，点 C 到准线的距离为 $x_C+1=4$.

又∵ $|AB|=8$，∴ $x_C+\frac{p}{2}=\frac{|AB|}{2}$，故点 $C(3,2)$ 即为所求圆的圆心，且半径为 $\frac{|AB|}{2}=\frac{8}{2}=4$.

因此，所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=4^2$.

解析 2：由解析 1 可得 AB 的中点为 $C(3,2)$，因此，AB 的中垂线方程为 $y-2=-(x-3)$，即 $y=-x+5$.

设所求圆的圆心坐标为 $D(x_0,y_0)$，则 $D(x_0,y_0)$ 在中垂线 $y=-x+5$ 上，且点 D 到准线的距离 x_0+1 等于点 D 到点 A 或点 B 的距离，即 $\begin{cases}y_0=-x_0+5\\x_0+1=\sqrt{\left(x_0-3+2\sqrt{2}\right)^2+\left(y_0-2+2\sqrt{2}\right)^2}\end{cases}$，化简可得：$(x_0+1)^2=\left(x_0-3+2\sqrt{2}\right)^2+\left(-x_0+3+2\sqrt{2}\right)^2$，即 $(x_0+1)^2=\left(x_0-3+2\sqrt{2}\right)^2+\left(x_0-3-2\sqrt{2}\right)^2$，将 (x_0-3) 看成整体

亦即 $(x_0+1)^2=2(x_0-3)^2+2\left(2\sqrt{2}\right)^2$，化简可得：$x_0^2-14x_0+33=0$，解得：$x_{01}=3$，$x_{02}=11$，代入 $y_0=-x_0+5$ 可得：$y_{01}=2$，$y_{02}=-6$．因此所求圆的方程为：$(x-3)^2+(y-2)^2=(3+1)^2$，即 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$；或 $(x-11)^2+(y+6)^2=(11+1)^2$，即 $(x-11)^2+(y+6)^2=144$.

比较两种解法可以发现：解法 2 比解法 1 多一个结果．这说明，仅仅用作图法来求解容易遗漏结论．圆的半径 $r=x_0+1$

条件 3.3　求过抛物线焦点且半径为定长的圆过定点的抛物线方程

条件分析：当给定到焦点的距离为定长的点与焦点构成直径的圆过定点时，关键是确定圆心的坐标和半径.

例 20.21（甲 1361）设抛物线 C：$y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，$\left|MF\right|=5$，若以 MF 为直径的圆过点 $\left(0,2\right)$，则 C 的方程为（　）.

A．$y^2=4x$ 或 $y^2=8x$　　　　B．$y^2=2x$ 或 $y^2=8x$

C．$y^2=4x$ 或 $y^2=16x$　　　　D．$y^2=2x$ 或 $y^2=16x$

解析：∵抛物线 C：$y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，∴ $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，且准线为 $x=-\frac{p}{2}$.

设点 $M\left(x_M,y_M\right)$，则∵点 M 在 C 上，∴ $y_M^2=2px_M$.

又∵点 M 在 C 上，且 $\left|MF\right|=5$，∴由抛物线的定义可得：$x_M+\frac{p}{2}=5$，即 $x_M=5-\frac{p}{2}$.

又∵以 MF 为直径的圆过点 $\left(0,2\right)$，且半径为 $\frac{\left|MF\right|}{2}=\frac{5}{2}$，

∴根据中点坐标公式可得圆心为 $\left(\frac{p}{4}+\frac{x_M}{2},\frac{y_M}{2}\right)$. 其中，$\frac{p}{4}+\frac{x_M}{2}=\frac{5}{2}$，即可得圆的方程为 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_M}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$. 将坐标 $\left(0,2\right)$ 代入圆的方程可得：$y_M=4$.

又∵点 M 在 C 上，∴ $y_M^2=2px_M$. 将 $x_M=5-\frac{p}{2}$，$y_M=4$ 代入可得：$16=2p\left(5-\frac{p}{2}\right)$，解得：$p=2$ 或 $p=8$. 因此，抛物线方程为 $y^2=4x$ 或 $y^2=16x$. 故选 C，不选 ABD.

条件 3.4　求过四个已知点中三个点的椭圆方程

条件分析：当给定椭圆过四个点中的三个点时，关键是要确定椭圆过哪三个点.

例 20.22（乙 1770-1）已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，四点 $P_1\left(1,1\right)$，$P_2\left(0,1\right)$，$P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上，求 C 的方程.

分析：根据 $P_3\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P_4\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 两点关于 y 轴对称，由椭圆的对称性可知 C 经过 P_3，P_4 两点. 另外由 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}>\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{b^2}$ 知，C 不经过点 P_1，所以点 P_2 在 C 上. 因此 P_2，P_3，P_4 三点在椭圆上，代入其标准方程，即可求出 C 的方程.

解析：由于 P_3，P_4 两点关于 y 轴对称（则 P_3，P_4 或者都在 C 上，或者都不在 C 上，若都不在，则四个点最多只有两个点在 C 上，不满足题意），故 P_3，P_4 都在 C 上.

由 P_3，P_4 都在 C 上可得：$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{b^2}=1$，若 P_1 也在 C 上，则 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$.

又由 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}>\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{b^2}$ 知，C 不经过点 P_1，所以点 P_2 在 C 上.

因此 $\begin{cases}\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\end{cases}$，故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

条件 3.5　求已知离心率等条件的椭圆方程

条件分析：对于已知离心率求椭圆方程的问题，关键是要利用椭圆离心率的定义公式 $e=\dfrac{c}{a}$（e 为所给椭圆离心率的具体数值）列出方程:，即确定 c 与 a 的关系，再代入椭圆中的 $b^2=a^2-c^2$ 来确定 b 与 a 的关系.

例 20.23（乙 1470-1）已知点 $A(0,-2)$，椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，F 是椭圆的右焦点，直线 AF 的斜率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，O 为坐标原点，求 E 的方程.

解析：$\because$ 已知点 $A(0,-2)$，且直线 AF 的斜率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 想到设 $F(c,0)$，且由直线的斜率公式可得 $\dfrac{0-(-2)}{c-0}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，解得：$c=\sqrt{3}$.

又 $\because$ 题设椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ 由离心率公式可得 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，并将 $c=\sqrt{3}$ 代入可得 $a=2$.

又 $\because$ 在椭圆中 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$. $\therefore E$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

例 20.24（甲 1520-1）已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，点 $(2,\sqrt{2})$ 在 C 上，求 C 的方程.

解析：$\because$ 椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a^2=2b^2$.

又 $\because$ 点 $(2,\sqrt{2})$ 在 C 上，$\therefore \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1$，解得：$a^2=8$，$b^2=4$. 因此，$C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

条件 3.6　求已知焦点和焦点弦中点的椭圆方程

条件分析：对于给定椭圆的一个焦点坐标及过该焦点弦的中点坐标时，实际上给定了中点弦所在直线上的两个点，即焦点弦的斜率. 理论上利用“设而不求法”即可得到焦点弦与椭圆两个交点的斜率与中点坐标的关系式，即可确定 a，b 的关系，进而做出判断.

例 20.25（乙 1360）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(3,0)$，过点 F 的直线交椭圆于 A，B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1,-1)$，则 E 的方程为（　）.

A. $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{36}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{27}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{18}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$

解析：$\because AB$ 的中点坐标为 $(1,-1)$，$\therefore$ 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由中点坐标公式可得：$x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$，且点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 满足椭圆方程，即有

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad ①$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad ②$$

①–②可得：$\dfrac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{a^2}+\dfrac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{b^2}=0$，即 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\dfrac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}=\dfrac{b^2}{a^2}$.

又 $\because$ 直线过焦点 $F(3,0)$ 和中点 $(1,-1)$，$\therefore k_{AB}=\dfrac{0+1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$.

即有 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，亦即 $a^2=2b^2$．据此可从四个选项中判定椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$．

或∵ $F(3,0)$，∴ $c=3$，再利用在椭圆中 $c^2=a^2-b^2$，可得：$a^2-b^2=9$．

将 $a^2=2b^2$ 代入上式可得：$b^2=9$，从而 $a^2=2b^2=18$，最终确定椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$．

故选 D，不选 ABC．

> **经验总结：** 遇到所谓焦点弦而又不是求焦点弦所在直线方程时，往往先设直线与椭圆的两个交点坐标，然后代入椭圆方程进行求解，此即“设而不求法”．
>
> 遇到涉及中点弦的问题，往往通过作差计算并利用中点公式来确定直线的斜率，而非真正去求焦点坐标，此即“点差法”．

条件 3.7　求已知焦点弦的截距和弦长关系的椭圆方程

条件分析： 当给定焦点弦的截距和弦长关系求椭圆方程时，应考虑结合椭圆定义利用相似三角形求解.

例 20.26（甲 1420-2/70-2）设 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，M 是 C 上一点，且 MF_2 与 x 轴垂直，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N，若直线 MN 在 y 轴上的截距为 2，且 $|MN|=5|F_1N|$，求 a，b．

解析： 设直线 MN 与 y 轴交于点 P，则 $|OP|=2$，$|MF_2|=4$，即 $\dfrac{b^2}{a}=4$，亦即 $b^2=4a$．　①

又∵ $|MN|=5|F_1N|$，∴ $|MF_1|=4|F_1N|$．过点 N 作 NQ 与 x 轴垂直，则 $\mathrm{Rt}\triangle NQF_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle MF_2F_1$．

从而 $|NQ|=\dfrac{1}{4}|MF_2|=1$，$|QF_1|=\dfrac{1}{4}|F_1F_2|=\dfrac{1}{4}\times 2c=\dfrac{1}{2}c$．

将 N 点坐标 $x_N=-(|QF_1|+c)=-\dfrac{3}{2}c$，$y_N=-|NQ|=-1$ 代入椭圆方程可得：$\dfrac{9c^2}{4a^2}+\dfrac{(-1)^2}{b^2}=1$，

即 $\dfrac{9(a^2-b^2)}{4a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$，亦即 $\dfrac{5}{4}-\dfrac{9b^2}{4a^2}+\dfrac{1}{b^2}=0$．　②

将① $b^2=4a$ 代入②可得：$\dfrac{5}{4}-\dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{4a}=0$，两边同乘以 $4a$ 可得：$5a-36+1=0$，解得：$a=7$，再将 $a=7$ 代回①式可得：$b=\sqrt{4a}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$．

条件 3.8　求焦点弦的中点与原点的斜率为定值的椭圆方程

条件分析： 当遇到焦点弦及与弦的中点有关的条件时，通常采取“设而不求”的策略：即设焦点弦所在直线与圆锥曲线的两个交点坐标，再利用其他条件来“替换”这些坐标.

例 20.27（甲 1370-1）平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 M:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 右焦点的直线 $x+y-\sqrt{3}=0$ 交 M 于 A，B 两点，P 为 AB 的中点，且 OP 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，求 M 的方程.

解析： 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，则 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$．　①

∵题设过椭圆右焦点的直线为 $x+y-\sqrt{3}=0$，

∴令 $y=0$（焦点在 x 轴上），解得：$x=\sqrt{3}$，且直线的斜率为 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$，　②

即所求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 $(\sqrt{3},0)$，即 $c=\sqrt{3}$，亦即 $a^2-b^2=3$．　③

又∵ OP 的斜率为$\frac{1}{2}$，∴$\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}$，运用①式可得：$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{1}{2}$．　④

∵ $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 在椭圆上，∴$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，即$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}$，

化简可得：$\frac{b^2(x_2+x_1)}{a^2(y_2+y_1)}=-\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$，运用②④两式可得：$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$．　⑤

联立③⑤两式可得：$\begin{cases}a^2-b^2=3\\a^2=2b^2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a^2=6\\b^2=3\end{cases}$，因此，$M$ 的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$．

经验总结：涉及“弦中点”的条件一般都需要用“设（交点坐标）而不求法”，并使用“（两交）点（作）差法”．

条件 3.9　求已知离心率等条件的双曲线方程

条件分析：对于已知离心率求双曲线方程的问题，关键是要利用离心率的定义公式$e=\frac{c}{a}$（e为所给离心率的具体数值）列出方程，即确定c与a的关系，再代入双曲线中的$b^2=c^2-a^2$来确定b与a的关系．

例 20.28　（乙 1404）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3}=1(a>0)$的离心率为 2，则$a=$（　）．

A．2　　B．$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D．1

解析：∵题设$b^2=3$，$e=2$，　从题设条件出发找相关知识的联系

∴由双曲线中 a，b，c 的关系可得：$c^2=a^2+b^2$，即$c^2=a^2+3$．　①

由离心率的定义可得：$\frac{c}{a}=2$，即$c=2a$．　②

联立①②可得：$\begin{cases}c^2=a^2+3\\c=2a\end{cases}$，将②代入①消去$c$可得：　∵目标是求$a$，∴消去$c$

$4a^2=a^2+3$，化简可得：$a^2=1$，解得：$a=1$．　∵题设$a>0$，∴舍去$a=-1$

故选 D，不选 ABC．

条件 3.10　求已知渐近线方程等条件的双曲线方程

条件分析：对于给定双曲线的渐近线方程时，关键是利用标准双曲线的渐近线方程$y=\pm\frac{b}{a}x$，从中确定 a，b．

例 20.29　（丙 1714）双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{y^2}{9}=1(a>0)$的一条渐近线方程为$y=\frac{3}{5}x$，则$a=$_______．

解析：∵双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$．　由条件想知识

∴由题设条件可得：$\begin{cases}b^2=9\\\frac{b}{a}=\frac{3}{5}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=3\\a=5\end{cases}$．故$a=5$．　由条件列方程组并求解

例 20.30　（甲 1515）已知双曲线过点$(4,\sqrt{3})$，且渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$，则该双曲线的标准方程为________．

解析：∵双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，∴可设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=m$.

又∵双曲线过点 $\left(4,\sqrt{3}\right)$，∴将点 $\left(4,\sqrt{3}\right)$ 代入 $\frac{x^2}{4}-y^2=m$ 可得：$m=1$.

故所求双曲线方程为：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

例 20.31 （丙 1755）已知双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，且与椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 有公共焦点，则 C 的方程为（　）.

A. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{10}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$　　C. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

解析：∵双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0，b>0\right)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，∴由条件可得：$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ①

又∵题设双曲线与椭圆有公共焦点，　　由条件确定目标

∴确定目标：求椭圆的焦点横坐标 c.

又∵在椭圆 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$ 中，$a^2=12$，$b^2=3$，　　由条件联想知识

∴在椭圆中 $c^2=a^2-b^2=9$，解得：$c=3$.　　由椭圆知识 $c^2=a^2-b^2$ 解决问题

因此，椭圆和双曲线的焦点都为 $\left(-3,0\right)$ 和 $\left(3,0\right)$.

又∵在双曲线中 $c^2=a^2+b^2$.　　由双曲线知识 $c^2=a^2+b^2$ 建立条件②

∴ $a^2+b^2=9$. ②

联立①②两式可得：$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}\\ a^2+b^2=9\end{cases}$，　　方程思想：由题设条件建立二元二次方程组

解得：$a^2=4$，$b^2=5$. 因此，双曲线 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. 故选 B，不选 ACD.

问题 4 求动点轨迹方程

问题分析：求动点轨迹方程问题的关键在于确定动点的运动规律，直接或间接地去求动点轨迹.

条件 4.1　求到两定点的距离之和为定值的动点轨迹方程

条件分析：当求到两定点的距离之和为定值的动点轨迹时，显然根据椭圆的定义可以直接"写出"动点的轨迹方程. 当两个定点关于坐标原点不对称时，可以借助于两点间距离公式先列方程，再进行化简.

例 20.32 （乙 1670-1）设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，直线 l 过点 $B\left(1,0\right)$ 且不与 x 轴重合，l 交圆 A 于 C，D 两点，过 B 作 AC 的平行线交 AD 于 E. 证明 $|EA|+|EB|$ 为定值，并写出点 E 的轨迹方程.

证明：∵题设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，

∴化简可得：$\left(x+1\right)^2+y^2=4^2$. 根据题意作图如图 20.2 所示.

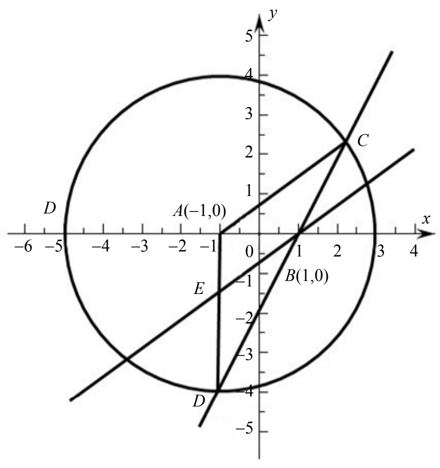


图 20.2

在$\triangle ACD$中，$\because |AD|=|AC|=4$，$\therefore \angle ADB=\angle ACB$.

又$\because EB \parallel AC$，$\therefore \angle EBD=\angle ACB$，从而$\angle EDB=\angle EBD$，即$|ED|=|EB|$，$\therefore |EA|+|EB|=|EA|+|ED|=4$.

由此可见，点E的轨迹是到$A(-1,0)$和$B(1,0)$距离之和为定值4的椭圆. 且$2a=4$，$c=1$，解得：$a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=3$.

因此所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$.

条件 4.2 求过定点的动直线与定圆的两交点的中点的轨迹方程

条件分析：当求过定点的动直线与定圆的两个交点的中点的轨迹方程时，首先需要确定定点与定圆的位置关系，然后再来确定两交点弦的中点（坐标）与题设条件的关系.

例 20.33（乙 1420-1）已知点$P(2,2)$，圆C：$x^2+y^2-8y=0$，过点P的动直线l与圆C交于A，B两点，线段AB的中点为M，O为坐标原点，求M的轨迹方程.

分析：将圆C的方程化为$x^2+(y-4)^2=16$，所以圆心为$C(0,4)$，半径为4.

$\because |PC|=\sqrt{(2-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}<4$，$\therefore$点$P$在圆$C$的内部.

因此，过P点的任意直线必与圆C有两个交点A和B.

解析 1：（几何法：利用弦心距与弦垂直的关系解决问题）

设AB的中点为$M(x,y)$，则$CM\perp AB$，即$CM\perp MP$.

$\because \overrightarrow{CM}=(x,y-4)$，$\overrightarrow{MP}=(2-x,2-y)$，$\therefore$由$CM\perp MP$得：$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，

或者$\because k_{CM}=\dfrac{y-4}{x-0}=\dfrac{y-4}{x}$，$k_{MP}=\dfrac{y-2}{x-2}$，$\therefore$由$k_{CM}\cdot k_{MP}=-1$可得：$\dfrac{y-4}{x}\cdot\dfrac{y-2}{x-2}=-1$.

即$x(2-x)+(y-4)(2-y)=0$，亦即$(x-1)^2+(y-3)^2=2$.

所以M的轨迹方程是$(x-1)^2+(y-3)^2=2$.

解析 2：（代数法）

设过点$P(2,2)$的直线斜率为k，则直线方程为$y=k(x-2)+2$.

解$\begin{cases}x^2+(y-4)^2=16\\ y=k(x-2)+2\end{cases}$可得点$A$，$B$坐标，进而可得：$A$，$B$的中点$M$的坐标与$k$的关系式，即可获得关于中点$M$横、竖坐标的参数方程. 为此，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$的中点$M(x,y)$，则$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$.

将$y=k(x-2)+2$代入$x^2+(y-4)^2=16$可得：$x^2+(kx-2k-2)^2=16$，

化简可得：$(1+k^2)x^2-4k(k+1)x+4(k+1)^2-16=0$.

由韦达定理可得：$x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}=\dfrac{4k(k+1)}{1+k^2}$，代入$y=k(x-2)+2$可得：

$y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)+4=\dfrac{4k^2(k+1)}{1+k^2}-4k+4=\dfrac{4(2k^2-k+1)}{1+k^2}$，即$\begin{cases}x=\dfrac{2k^2+2k}{1+k^2}\\ y=\dfrac{4k^2-2k+2}{1+k^2}\end{cases}$.

理论上，上述参数方程消去参数k亦能得到中点轨迹方程，但事实上比较困难，所以一般不用此方法.

经验总结：比较解析 1 和解析 2 可以发现，运用几何法可以大大简化运算.

条件 4.3　求与一个圆内切与另一个圆外切的动圆圆心轨迹方程

条件分析： 当求动圆圆心的轨迹方程时，首先需要确定两个定圆的位置关系，然后再来确定动圆如何与之分别相切.

例 20.34（乙 1321-1/70-1）已知圆 M：$(x+1)^2+y^2=1$，圆 N：$(x-1)^2+y^2=9$，动圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切，圆心 P 的轨迹为曲线 C，求 C 的方程.

解析： 由圆 M：$(x+1)^2+y^2=1$ 可得：圆 M 的圆心为 $M(-1,0)$，半径 $r_M=1$.

由圆 N：$(x-1)^2+y^2=9$ 可得：圆 N 的圆心为 $N(1,0)$，半径 $r_N=3$.

设动圆 P 的圆心为 $P(x,y)$，半径为 R. ∵题设动圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切，

∴ $|PM|+|PN|=(R+r_M)+(r_N-R)=r_M+r_N=1+3=4$.

由椭圆的定义可知，曲线 C 是以 M，N 为左、右焦点，长轴长为 4 的椭圆.　　左顶点除外

又∵ $c=1$，$a=2$，∴ $b^2=a^2-c^2=4-1=3$. 因此，C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$.

条件 4.4　求随着曲线上动点的运动而有规律运动的动点的轨迹方程

条件分析： 当求随着曲线上的动点有规律地运动的动点的轨迹方程时，通常设所求动点坐标为 (x,y)，在已知曲线上运动的动点坐标为 (x_0,y_0)，利用题设条件建立两个动点坐标之间的关系 $\begin{cases}x_0=f(x,y)\\y_0=g(x,y)\end{cases}$，然后再将在已知曲线上运动的动点坐标 (x_0,y_0) 代入所给的曲线方程，即可获得关于动点 (x,y) 的轨迹方程 $F(x,y)=0$. 这种方法通常称为轨迹转移法.

例 20.35（甲 1720-1/70-1）设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$，求点 P 的轨迹方程.

解析： 设 $P(x,y)$，$M(x_0,y_0)$，则 $N(x_0,0)$，$\overrightarrow{NP}=(x-x_0,y)$，$\overrightarrow{NM}=(0,y_0)$.

由题设 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$ 可得：$x_0=x$，$y_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$. 因为动点 $M(x_0,y_0)$ 在椭圆 C:$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，所以，将 $x_0=x$，$y_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y$ 代入上式可得：$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$. 因此，动点 $P(x,y)$ 的轨迹方程为：$x^2+y^2=2$.

条件 4.5　求在两个坐标轴上截距为定值的动圆的圆心轨迹方程

条件分析： 求在两个坐标轴上截距为定值的动圆的圆心轨迹方程时，先判断弦心距等于圆心坐标的绝对值，再利用勾股定理构建两个关于半径的等式，消去半径即得所求.

例 20.36（甲 1320-1）在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 $2\sqrt{2}$，在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$，求圆心 P 的轨迹方程.

解析： 设圆心 $P(x,y)$，圆的半径为 r.

∵圆 P 在 x 轴上截得线段长为 $2\sqrt{2}$，且圆心 $P(x,y)$ 到 x 轴的距离为 $|y|$.

∴由勾股定理可得：$y^2+\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2=r^2$.　　①

又∵圆 P 在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$，且圆心 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离为 $|x|$.

∴由勾股定理可得：$x^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2=r^2$.　　②

由①②两式消去 r 可得：$y^2-x^2=1$．即圆心 $P(x,y)$ 的轨迹方程为：$y^2-x^2=1$．

条件 4.6　求过抛物线焦点的两个三角形面积成定比的非焦点弦的中点轨迹方程

条件分析：当给定过焦点的两个三角形的面积之比时，通常需要建立中点与面积有关的点之间的联系，然后利用面积的比例关系列有关点的坐标方程，最后用中点坐标代替有关点的坐标即可获得中点轨迹方程，这种解题方法类似“轨迹转移法”.

例 20.37　（丙 1620-2/70-2）已知抛物线 C：$y^2=2x$ 的焦点为 F，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交 C 于 A，B 两点，交 C 的准线于 P，Q 两点，若△PQF 的面积是△ABF 面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程.

解析：设过 A，B 两点的直线 l 与 x 轴的交点为 $D(x_0,0)$，如图 20.3 所示，

且 l_1：$y=a$，l_2：$y=b$．

$S_{\triangle PQF}=\frac{1}{2}|a-b|\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$，$S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AFD}+S_{\triangle BFD}=\frac{1}{2}|a-b|\cdot\left|x_0-\frac{1}{2}\right|$，

又∵题设△PQF 的面积是△ABF 面积的两倍，

∴ $\frac{1}{2}|a-b|=|a-b|\cdot\left|x_0-\frac{1}{2}\right|$，解 $\left|x_0-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ 可得：$x_0=1$ 或 $x_0=0$（舍去）.

设满足条件的 AB 的中点为 $E(x,y)$，则当 AB 不与 x 轴垂直时，

由 $k_{AB}=k_{DE}$ 可得：$\frac{2}{a+b}=\frac{y}{x-1}(x\neq1)$．

又∵ E 是 AB 的中点，∴由中点公式可得：$y=\frac{a+b}{2}$，

代入上式可得：$y^2=x-1(x\neq1)$．

当 AB 与 x 轴垂直时，点 E 与点 D 重合，此时，$x=1$，$y=0$．

综上所述，所求轨迹方程为：$y^2=x-1$．

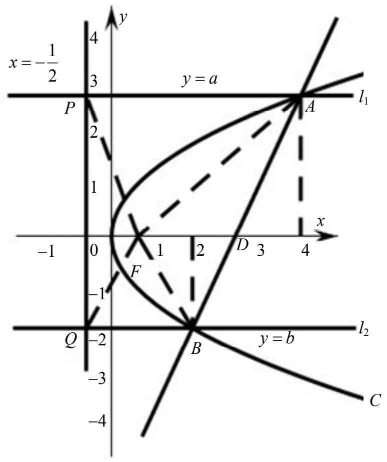


图 20.3

问题 5　求双曲线渐近线方程

问题分析：由于焦点在 x 轴上的双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，因此，求双曲线渐近线方程的关键是求 $\frac{b}{a}$，而不必分别求出 a 和 b.

条件 5.1　求已知离心率的双曲线的渐近线方程

条件分析：当给定双曲线的离心率 e 求渐近线时，利用离心率定义可知：$\frac{c}{a}=e$，即 $\frac{c^2}{a^2}=e^2$．为了求得 $\frac{b}{a}$，需将 $\frac{c^2}{a^2}=e^2$ 中的 c 利用双曲线 $c^2=a^2+b^2$ 进行代换，即 $\frac{a^2+b^2}{a^2}=e^2$，可得 $\frac{b^2}{a^2}=e^2-1$，解得：$\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$，即可写出渐近线方程.

例 20.38　（乙 1304/54）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 C 的渐近线方程为（　）.

A. $y=\pm\frac{1}{4}x$　　B. $y=\pm\frac{1}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{1}{2}x$　　D. $y=\pm x$

解析：∵题设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，∴$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

又∵双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，∴目标转化为求$\frac{b}{a}$.

又∵在双曲线中：$c^2=a^2+b^2$，∴两边同除以a^2可得：$\left(\frac{c}{a}\right)^2=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2$，即$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2-1$，将$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$代入可得：$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$. 因此，双曲线的渐近线方程为：$y=\pm\frac{1}{2}x$. 故选 C，不选 ABD.

经验总结：

（1）双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的渐近线：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$.

（2）渐近线$y=mx$的双曲线标准方程系为$m^2x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$.

（3）双曲线的焦点到渐近线的距离为b，垂足为对应准线与渐近线的交点.

（4）双曲线的顶点到渐近线的距离是$\frac{ab}{c}$.

（5）系列双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$有相同的渐近线.

例 20.39（甲 1806/55）双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0，b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，则其渐近线方程为（　）.

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm\sqrt{3}x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

解析：∵题设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0，b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，∴$\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.　　离心率公式$e=\frac{c}{a}$

又∵在双曲线中有$c^2=a^2+b^2$，　　双曲线中的几何关系

∴将$c=\sqrt{3}a$代入可得：$2a^2=b^2$，　　运算

解得：$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$.　　整体思想：按双曲线渐近线方程的要求，将$\frac{b}{a}$看成整体进行求解

因此，双曲线的渐近线方程为：$y=\pm\sqrt{2}x$.　　标准双曲线的渐近线方程

故选 A，不选 BCD.

问题 6 求圆锥曲线离心率

问题分析：根据离心率的定义公式$e=\frac{c}{a}$可知：求圆锥曲线离心率的关键是求$\frac{c}{a}$，因此，求双曲线的离心率（或离心率的取值范围），有两种常见的方法：①求出a，c，代入公式$e=\frac{c}{a}$求得；②只需要根据一个条件得到关于a，b，c的齐次式，结合a^2，b^2，c^2的关系消去b，转化为a，c的齐次式，然后等式（或不等式）两边分别除以a或a^2转化为关于e的方程（或不等式），解方程（或不等式）即可求得离心率e（或取值范围）.

条件 6.1　给定椭圆中心到焦点弦的距离与短轴的比例关系

条件分析：当给定椭圆中心到焦点弦的距离与短轴的比例关系时，关键是要正确画图并利用三角函数进行计算或利用相似三角形进行求解.

例 20.40（乙 1605）直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点，若椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为（　）.

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

解析 1：按照题意作图，如图 20.4 所示，其中 $|OA|=b$，$|OF_1|=c$，$|AF_1|=a$.

又∵题设椭圆中心到 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$，

∴ $|OP|=\frac{1}{4}\times(2b)=\frac{1}{2}b$.

短半轴长为 b

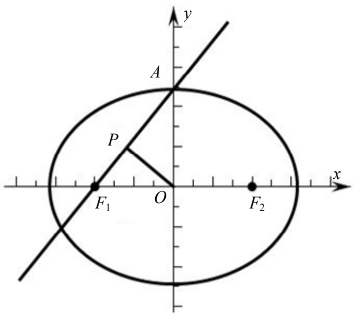


图 20.4

∵椭圆离心率公式为 $e=\frac{c}{a}$，∴在 $\mathrm{Rt}\triangle AOF_1$ 中，

$e=\frac{c}{a}=\frac{|OF_1|}{|AF_1|}=\sin\angle PAO$，而在 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 中，$\sin\angle PAO=\frac{|OP|}{|OA|}=\frac{\frac{1}{2}b}{b}=\frac{1}{2}$，

∴椭圆离心率 $e=\frac{1}{2}$. 故选 B，不选 ACD.

解析 2：∵在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_1O$ 中，$|OF_1|=c$，$|OA|=b$，$|AF_1|=a$，∴ $e=\frac{c}{a}=\frac{|OF_1|}{|AF_1|}$.

又∵ $\mathrm{Rt}\triangle AF_1O$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle AOP$ 共用 $\angle OAP$，∴ $\mathrm{Rt}\triangle AF_1O\backsim\mathrm{Rt}\triangle AOP$，即有 $\frac{|OF_1|}{|AF_1|}=\frac{|OP|}{|OA|}$.

相似三角形性质定理：对应边成比例

又∵题设 $\frac{|OP|}{2|OA|}=\frac{1}{4}$，∴ $e=\frac{c}{a}=\frac{|OF_1|}{|AF_1|}=\frac{|OP|}{|OA|}=\frac{1}{2}$，故选 B，不选 ACD.

条件 6.2　给定椭圆焦点正上方的点与两个焦点所成三角形的角度

条件分析：当给定椭圆焦点正上方的点与两个焦点所成三角形的角度时，关键是要正确画图并结合椭圆定义利用三角函数进行计算.

例 20.41（甲 1305）设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 是 C 上的点，$PF_2\perp F_1F_2$，$\angle PF_1F_2=30^\circ$，则 C 的离心率为（　）.

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析：∵ $PF_2\perp F_1F_2$，$\angle PF_1F_2=30^\circ$，且 $|F_1F_2|=2c$，∴ $|PF_2|=2c\cdot\tan30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}c$，$|PF_1|=\frac{2c}{\cos30^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{3}c$.

∵由椭圆定义可得：$|PF_1|+|PF_2|=2a$，∴ $\frac{4\sqrt{3}}{3}c+\frac{2\sqrt{3}}{3}c=2a$，即 $\sqrt{3}c=a$.

因此，$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{\sqrt{3}c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 D，不选 ABC.

条件 6.3 给定与以椭圆长轴为直径的圆相切的切线方程

条件分析：当给定与以椭圆长轴为直径的圆相切的切线方程时，关键是要利用圆心到切线的距离等于半径（即长半轴）这一重要的隐含条件.

例 20.42 （丙 1711/60）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，且以线段 A_1A_2 为直径的圆与直线 $bx-ay+2ab=0$ 相切，则 C 的离心率为（　）.

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

解析：以线段 A_1A_2 为直径的圆的圆心坐标为 $(0,0)$，半径 $r=a$，圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$，直线 $bx-ay+2ab=0$ 与圆相切，所以圆心到直线的距离等于半径，即 $d=\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a^2$，整理可得：$a^2=3b^2$.

∵在椭圆中：$c^2=a^2-b^2$，∴代入上式可得：$a^2=3(a^2-c^2)$，即 $2a^2=3c^2$，由椭圆离心率公式 $e=\frac{c}{a}$ 可得：$c=ea$，代入上式可得：$2=3e^2$. 解得：$e=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选 A，不选 BCD.

条件 6.4 给定过两个焦点的直角三角形的正弦值

条件分析：当给定过焦点的直角三角形的正弦值时，关键是要将这一正弦值利用三角函数的定义化为对应的 a，b，c 方程，再利用 $b^2=c^2-a^2$ 消去 b，最终获得 a 与 c 的比例关系.

例 20.43 （甲 1661）已知 F_1，F_2 是双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点，点 M 在 E 上，MF_1 与 x 轴垂直，$\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$，则 E 的离心率为（　）.

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

解析：如图 20.5 所示，由 $\sin\angle MF_2F_1=\frac{1}{3}$ 可得：$\frac{|MF_1|}{|MF_2|}=\frac{1}{3}$，

∵ $F_1(-c,0)$，∴将 $x=-c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 可得：$\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}$.

又∵在双曲线中：$c^2=a^2+b^2$，∴解得：$|y|=\frac{b^2}{a}$，即 $|MF_1|=\frac{b^2}{a}$.

由双曲线的定义可知：$|MF_2|-|MF_1|=2a$，即 $|MF_2|=|MF_1|+2a$，即 $|MF_2|=2a+\frac{b^2}{a}=\frac{2a^2+b^2}{a}=\frac{a^2+c^2}{a}$，代入 $\frac{|MF_1|}{|MF_2|}=\frac{1}{3}$ 可得：

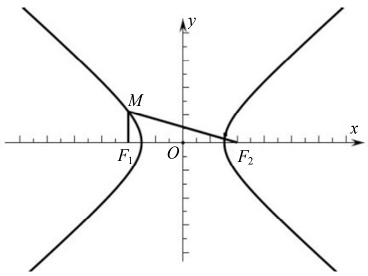


图 20.5

$\frac{b^2}{a^2+c^2}=\frac{1}{3}$，即 $\frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}=\frac{1}{3}$，化简可得：$3c^2-3a^2=a^2+c^2$，即 $2c^2=4a^2$，亦即 $\frac{c^2}{a^2}=2$，因此 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. 故选 A，不选 BCD.

条件 6.5 给定过两个顶点的三角形为等腰三角形

条件分析：当给定过两个顶点的三角形为等腰三角形时，关键是要利用等腰三角形的性质，并结合双曲线的定义进行求解.

例 20.44 （甲 1561）已知 A，B 为双曲线 E 的左、右顶点，点 M 在 E 上，$\triangle ABM$ 为等腰三角形，且顶角为 120°，则 E 的离心率为（　）.

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

解析：设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$，如图 20.6 所示，$|AB|=|BM|$，$\angle ABM=120^\circ$.

过 M 点作 x 轴的垂线，垂足为 N．在 $\mathrm{Rt}\triangle BMN$ 中，

$\because \angle MBN=180^\circ-120^\circ=60^\circ$，$|BM|=2a$.

$\therefore |BN|=|MB|\cos 60^\circ=a$，$|MN|=|BM|\sin 60^\circ=\sqrt{3}a$.

故 M 点坐标为 $M(2a,\sqrt{3}a)$，代入双曲线方程可得：$\frac{(2a)^2}{a^2}-\frac{(\sqrt{3}a)^2}{b^2}=1$，即 $a^2=b^2$.

又$\because c^2=a^2+b^2$，$\therefore c^2=2a^2$，即 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. 故选 D，不选 ABC.

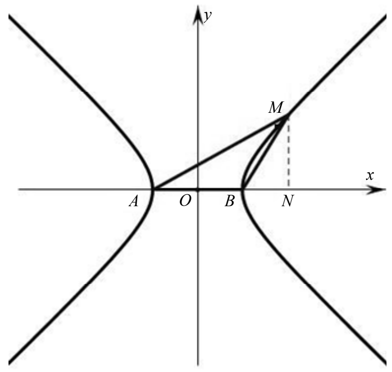


图 20.6

条件 6.6　给定一个定圆截得双曲线的一条渐近线的弦长

条件分析：当给定一个定圆截得双曲线的一条渐近线的弦长时，关键是要正确作图并利用所给弦长进行计算.

例 20.45　（甲 1759）若双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2，则 C 的离心率为（　）.

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

解析：如图 20.7 所示，$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中，$|OA|=a$，$|AB|=b$，$OB=c$，

$\therefore$ 由离心率定义可得：$e=\frac{c}{a}=\frac{|OB|}{|OA|}=\frac{1}{\cos\angle BOA}$，至此，发现目标：需要求 $\angle BOA$ 或其函数值.

$\because$ 圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 恰过坐标原点，

$\therefore |OD|=2$，$|OC|=2$.　　弦长为 2，半径为 2

作 $CE\perp OB$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle EOC$ 中，$|OE|=\frac{1}{2}|OD|=1$，从而 $\cos\angle EOC=\frac{|OE|}{|OC|}=\frac{1}{2}$.　　三角函数定义

因此，$e=\frac{c}{a}=\frac{|OB|}{|OA|}=\frac{1}{\cos\angle BOA}=2$. 故选 A，不选 BCD.

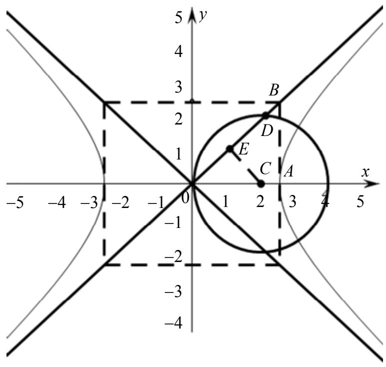


图 20.7

条件 6.7　给定几何作图条件

条件分析：当给定几何作图条件时，关键是要正确作图并利用所给条件进行计算.

例 20.46　（甲 1420-1/70-1）设 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，M 是 C 上一点，且 MF_2 与 x 轴垂直，直线 MF_1 与 C 的另一个交点为 N．若直线 MN 的斜率为 $\frac{3}{4}$，求 C 的离心率.

解析：根据题意作图，如图 20.8 所示.

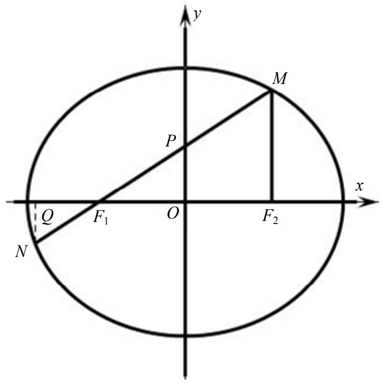


图 20.8

∵题设直线 MN 的斜率为 $\frac{3}{4}$，∴ $\frac{|MF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{3}{4}$.

将 $x=c$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 可得：$\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}$，解得：$y=\frac{b^2}{a}$，

即 $|MF_2|=\frac{b^2}{a}$，又∵ $|F_1F_2|=2c$，∴ $\frac{b^2}{a}\times\frac{1}{2c}=\frac{3}{4}$，即 $2\left(a^2-c^2\right)=4ac$，

两边同除以 a^2，并利用 $e=\frac{c}{a}$ 可得：$2e^2+3e-2=0$，解得：$e=\frac{1}{2}$.

例 20.47 （丙 1612/61）已知 O 为坐标原点，F 是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，A，B 分别为 C 的左、右顶点．P 为 C 上一点，且 $PF\perp x$ 轴.过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M，与 y 轴交于点 E．若直线 BM 经过 OE 的中点，则 C 的离心率为（　）.

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

解析：根据题意作图，如图 20.9 所示．∵ $e=\frac{c}{a}$，∴目标是求 $\frac{c}{a}$.

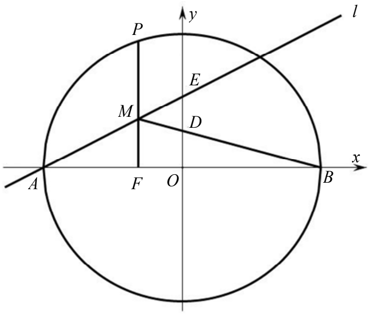


图 20.9

∵ $A(-a,0)$，$F(-c,0)$，∴设直线 l 的斜率为 $k(k>0)$，则直线 l 的方程为 $y=k(x+a)$.

令 $x=-c$ 可得 $|MF|=k(a-c)$；令 $x=0$ 可得 $|OE|=ka$.

又∵直线 BM 经过 OE 的中点 D，∴ $|OD|=\frac{1}{2}|OE|=\frac{1}{2}ka$.

∵ $\mathrm{Rt}\triangle BDO\backsim\mathrm{Rt}\triangle BMF$，∴ $\frac{|OD|}{|MF|}=\frac{|OB|}{|FB|}$，即 $\frac{\frac{1}{2}ka}{k(a-c)}=\frac{a}{a+c}$，

两边取倒数（目标出现 $\frac{c}{a}$）可得：$\frac{2(a-c)}{a}=\frac{a+c}{a}$，即 $2-2\frac{c}{a}=1+\frac{c}{a}$，

解得：$\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，即 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，故选 A，不选 BCD.

例 20.48 （乙 1765）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的右顶点为 A，以 A 为圆心，b 为半径作圆 A，圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M，N 两点．若 $\angle MAN=60^\circ$，则 C 的离心率为______.

解析：根据题意作图，如图 20.10 所示，设以点 A 为圆心，b 为半径的圆交一条渐近线于 M，N 两点．则 $|AM|=b$，

以 b 为半径

且 $MA\perp OA$.

渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$

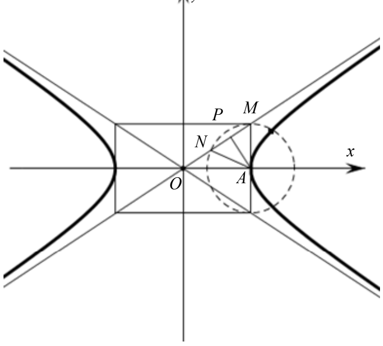


图 20.10

因此，$\triangle OAM$ 是直角三角形，且 $|OA|=a$，$|AM|=b$，$|OM|=c$.

双曲线的性质

根据离心率公式 $e=\frac{c}{a}$ 可得：在 $\mathrm{Rt}\triangle OAM$ 中，$e=\frac{|OM|}{|OA|}=\frac{1}{\cos\angle MOA}$.

发现目标：需要求 $\angle MOA$

∵圆心角 $\angle MAN=60^\circ$，∴作 $AP\perp MN$ 可得：$\angle MAP=\frac{1}{2}\angle MAN=30^\circ$.

从而在 $\mathrm{Rt}\triangle PAM$ 中，$\angle PMA=60^\circ$．进而在 $\mathrm{Rt}\triangle OAM$ 中，$\angle MOA=30^\circ$.

因此，$e=\dfrac{|OM|}{|OA|}=\dfrac{1}{\cos\angle MOA}=\dfrac{1}{\cos30^{\circ}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

经验总结：无论是求椭圆的离心率还是求双曲线的离心率，按照题意正确地画出图形是解决问题的基础，按照椭圆或双曲线参数的几何意义在图中进行标注，利用三角函数或平面几何知识进行求解是关键.

例 20.49 （乙 1804）已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的一个焦点为 $(2,0)$，则 C 的离心率（　）.

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

解析：∵题设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的一个焦点为 $(2,0)$，∴ $b^2=4$，且 $c=2$.　熟悉椭圆标准方程

又∵在椭圆中有 $a^2=b^2+c^2$，　用标准椭圆图像进行记忆：短半轴为 b，焦距为 c，短轴端点到焦点的距离为 a，由勾股定理可得：$a^2=b^2+c^2$，熟悉标准椭圆的特征值

∴将 $b^2=4$，$c=2$ 代入上式可得：$a^2=4+2^2=8$，从而 $a=2\sqrt{2}$.

再由离心率公式可得：$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　必须知道离心率计算公式

故选 C，不选 ABD.

例 20.50 （甲 1862）已知 F_1，F_2 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，A 是 C 的左顶点，点 P 在过点 A 且斜率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120^{\circ}$，则 C 的离心率为（　）.

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

解析 1：（代数法）

根据题意 $a>b>0$，绘制示意图如图 20.11 所示，由题设可知 PA 所在直线方程为：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x+a)$.

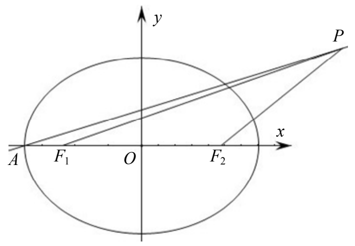


图 20.11

又∵ $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120^{\circ}$，

∴ $\angle PF_1F_2=30^{\circ}$，故 PF_1 所在直线方程为：

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$.　或直接列 PF_2 所在直线方程

$y=\sqrt{3}(x-c)$

解 $\begin{cases} y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x+a) \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+c) \end{cases}$ 可得：$\begin{cases} x=a-2c \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(a-c) \end{cases}$，即点 $P\left(a-2c,\dfrac{\sqrt{3}}{3}(a-c)\right)$.　解方程组求交点坐标

又∵题设：$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，∴ $|PF_2|=|F_2F_1|$（其中，由椭圆定义可知：$|F_2F_1|=2c$）.

因此，由两点间距离公式可得：$(a-2c-c)^2+\dfrac{1}{3}(a-c)^2=(2c)^2$，　利用等腰列方程建立 a,c 关系式

根据离心率公式 $e=\dfrac{c}{a}$，两边同除以 a^2 可得：$3(1-3e)^2+(1-e)^2=12e^2$.　利用离心率公式列方程

化简可得：$4e^2-5e+1=0$，即 $(4e-1)(e-1)=0$，解得：$e=\dfrac{1}{4}$ 或 $e=1$（舍去）.

故选 D，不选 ABC.

解析 2：（几何法）

根据题意作图，如图 20.12 所示．

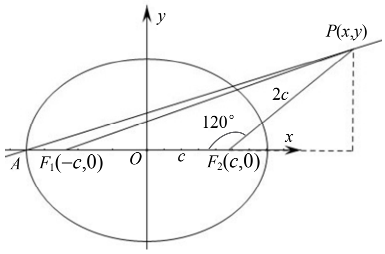


图 20.12

∵题设：$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，∴$|PF_2|=|F_2F_1|$，且 $|F_2F_1|=2c$．

椭圆定义

设点 $P(x,y)$，则∵ $\angle F_1F_2P=120°$，

∴$\begin{cases}x=c+2c\cos(180°-\angle F_1F_2P)\\y=2c\sin(180°-\angle F_1F_2P)\end{cases}$．

又∵点 $A(-c,0)$，∴$k_{AP}=\dfrac{2c\sin\angle F_1F_2P-0}{c-2c\cos\angle F_1F_2P+a}$，即 $(1-2\cos\angle F_1F_2P)k_{AP}c-2c\sin\angle F_1F_2P=-k_{AP}a$，

解得：$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{k_{AP}}{2\sin\angle F_1F_2P-(1-2\cos\angle F_1F_2P)k_{AP}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{6}}{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(1+2\times\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}}=\dfrac{\dfrac{1}{6}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{4}$．故选 D，不选 ABC.

例 20.51 （甲 1811）已知 F_1，F_2 是椭圆 C 的两个焦点，P 是 C 上的一点，若 $PF_1\perp PF_2$，且 $\angle PF_2F_1=60°$，则 C 的离心率为（　）．

A．$1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$2-\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　D．$\sqrt{3}-1$

解析：∵ $PF_1\perp PF_2$，且 $\angle PF_2F_1=60°$，∴$\triangle PF_1F_2$ 是以 F_1F_2 为斜边，一个锐角为 $60°$ 的直角三角形．

从而，由三角函数可得：$|PF_2|=|F_1F_2|\cos60°$，$|PF_1|=|F_1F_2|\sin60°$．

又∵由椭圆性质可得：$|F_1F_2|=2c$，∴$|PF_2|=|F_1F_2|\cos60°=c$，$|PF_1|=|F_1F_2|\sin60°=\sqrt{3}c$．

又∵由椭圆定义可得：$|PF_1|+|PF_2|=2a$，∴$(\sqrt{3}+1)c=2a$．

解得：$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{3}-1$．故选 D，ABC.

例 20.52 （丙 1861）设 F_1，F_2 是双曲线 C: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，$O$ 是坐标原点．过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 P．若 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，则 C 的离心率为（　）．

A．$\sqrt{5}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}$

解析：根据题意绘制如图 20.13 所示的示意图．

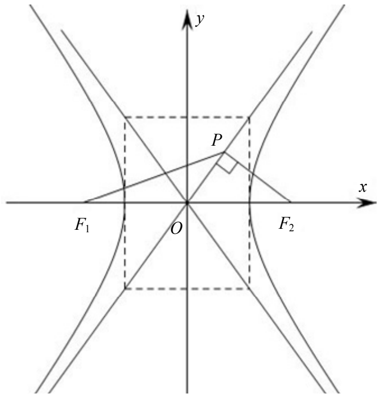


图 20.13

∵ $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，且 OP 的渐近线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$．

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle F_2PO$ 中，$\tan\angle POF_2=\dfrac{b}{a}$．

又∵ $|OF_2|=c$，∴由 $c^2=a^2+b^2$ 可得：$|OP|=a$，$|PF_2|=b$．

焦点到渐近线的距离等于半虚轴

又∵题设 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，∴$|PF_1|=\sqrt{6}a$．

∵ $PF_1\subset\triangle PF_1O$，在 $\triangle PF_1O$ 中由余弦定理可得：$\cos\angle F_1OP=\dfrac{|F_1O|^2+|OP|^2-|F_1P|^2}{2|F_1O|\cdot|OP|}=\dfrac{c^2+a^2-6a^2}{2ca}$．

又∵ $\cos\angle F_1OP=-\cos\angle POF_2=-\dfrac{a}{c}$，∴$-\dfrac{a}{c}=\dfrac{c^2+a^2-6a^2}{2ca}$，即 $-2a^2=c^2+a^2-6a^2$，化简可得：$c^2=3a^2$，

解得：$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$．

问题 7 求离心率的取值范围

问题分析：遇到求离心率的取值范围问题时说明圆锥曲线不是一个确定的圆锥曲线，因此，解决问题的关键是要确定影响圆锥曲线离心率变化的因素，进而确定离心率与变化因素之间的函数关系，再根据对函数表达式的研究来确定离心率的取值范围.

条件 7.1　给定双曲线的半虚轴长

条件分析：当给定双曲线的半虚轴长时，利用圆锥曲线的离心率定义公式可以得到离心率与半实轴的函数关系式，进而根据题设条件求其取值范围.

例 20.53 （甲 1705）若 $a>1$，则双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 的离心率的取值范围是（　）.

A. $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$　　B. $\left(\sqrt{2},2\right)$　　C. $\left(1,\sqrt{2}\right)$　　D. $\left(1,2\right)$

解析：由题意 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+1}{a^2}=1+\frac{1}{a^2}$，$\because a>1$，$0<\frac{1}{a}<1$，即 $0<\frac{1}{a^2}<1$，$\therefore 1<1+\frac{1}{a^2}<2$，即 $1<e^2<2$，亦即 $1<e<\sqrt{2}$. 故选 C，不选 ABD.

问题 8 求点线（点点）距离

问题分析：求圆锥曲线中的点线（点点）距离问题，往往需要借助于点到直线的距离公式或两点间的距离公式进行求解.

条件 8.1　给定三点坐标求过该三点的圆的圆心到坐标原点的距离

条件分析：当给定三点坐标求过该三点的圆的圆心到坐标原点的距离时，需要先根据"线段垂直平分线上的点到两端点的距离都相等"的知识，求出三点中任意两条线段的垂直平分线，进而解方程组确定圆心坐标，最后利用两点间距离公式进行求解.

例 20.54 （甲 1507）已知三点 $A(1,0)$，$B\left(0,\sqrt{3}\right)$，$C\left(2,\sqrt{3}\right)$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到原点的距离为（　）.

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

解析：如图 20.14 所示，在平面直角坐标系中标出 $A(1,0)$，$B\left(0,\sqrt{3}\right)$，$C\left(2,\sqrt{3}\right)$.

$\because B\left(0,\sqrt{3}\right)$，$C\left(2,\sqrt{3}\right)$ 两点的纵坐标相等，

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆圆心在 BC 的垂直平分线 $x=1$ 上，即圆心的横坐标为 1.

设圆心为 $D(1,m)$，则由 $|DA|=|DB|$ 可得：$|m|=\sqrt{1+\left(m-\sqrt{3}\right)^2}$，解得：$m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 所以圆心 $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ 到原点的距离为 $d=\sqrt{1+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

故选 B，不选 ACD.

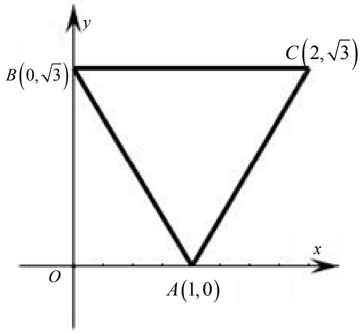


图 20.14

条件 8.2 给定三点坐标求过该三点的圆与 y 轴两交点间的距离

条件分析：当给定三点坐标求过该三点的圆的圆心到坐标原点的距离时，需要先根据“线段垂直平分线上的点到两端点的距离都相等”的知识，求出三点中任意两条线段的垂直平分线，进而解方程组确定圆心坐标和圆的半径，最后令 $x=0$ 代入圆的方程，解得圆与 y 轴两交点的纵坐标，进而利用两点间距离公式进行求解.

例 20.55 （甲 1557）过三点 $A(1,3)$，$B(4,2)$，$C(1,-7)$ 的圆交 y 轴于 M，N 两点，则 $|MN|=$（　）

A．$2\sqrt{6}$　　B．8

C．$4\sqrt{6}$　　D．10

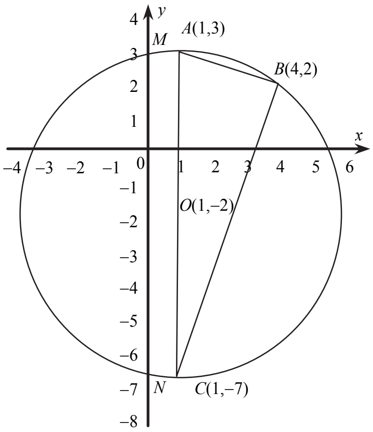


图 20.15

解析：在平面直角坐标系中，标出点 $A(1,3)$，$B(4,2)$，$C(1,-7)$，如图 20.15 所示.

∵点 $A(1,3)$ 与点 $C(1,-7)$ 的横坐标相等，即 A，C 在同一条竖线上，

∴猜想：$AB\perp BC$.

证明：∵ $k_{AB}=\dfrac{2-3}{4-1}=-\dfrac{1}{3}$，$k_{BC}=\dfrac{-7-2}{1-4}=\dfrac{-9}{-3}=3$，

∴ $k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$，即证明了 $AB\perp BC$. 因此，AC 即为圆的直径.

∵ $A(1,3)$，$C(1,-7)$，∴由中点公式可得：圆心坐标为 $(1,-2)$，半径为 $|AC|$ 的一半，即 $r=\dfrac{|-7-3|}{2}=5$.

从而圆的方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=5^2$.

将 y 轴直线方程 $x=0$ 代入圆的方程可得 $y=\pm2\sqrt{6}-2$. 因此，$|MN|=4\sqrt{6}$. 故选 C，不选 ABD.

> **经验总结**：准确地画图可以帮助我们有效地发现解决问题的快捷路径.

条件 8.3 给定含参双曲线求焦点到渐近线的距离

条件分析：当给定含参双曲线求焦点到渐近线的距离时，需要先将含参双曲线化成标准双曲线方程，然后确定焦点坐标和渐近线方程，最后再利用点到直线的距离公式进行求解.

例 20.56 （乙 1454）已知 F 是双曲线 C：$x^2-my^2=3m(m>0)$ 的一个焦点，则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为（　）.

A．$\sqrt{3}$　　B．3　　C．$\sqrt{3m}$　　D．$3m$

解析：将 $x^2-my^2=3m(m>0)$ 化为标准形式：$\dfrac{x^2}{3m}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 可得：$a^2=3m$，$b^2=3$，$c^2=a^2+b^2=3m+3$，且 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{1}{m}}$.

故焦点为 $F\left(\sqrt{3m+3},0\right)$，一条渐近线为 $y=\dfrac{1}{\sqrt{m}}x$，即 $x-\sqrt{m}y=0$，则点 F 到 C 的一条渐近线的距离为 $d=\dfrac{\left|\sqrt{3m+3}-0\right|}{\sqrt{1+m}}=\sqrt{3}$. 故选 A，不选 BCD.

例 20.57 （丙 1810）已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为 $\sqrt{2}$，则点 $(4,0)$ 到 C 的渐近线的距离为（　）.

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

解析：$\because e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，且双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $bx\pm ay=0$．

由点到直线距离公式可得点 $(4,0)$ 到渐近线的距离为 $d=\frac{|4b\pm 0|}{\sqrt{b^2+a^2}}$．

又$\because$在双曲线中有 $a^2+b^2=c^2$，$\therefore$代入上式可得：$d=\frac{4\sqrt{c^2-a^2}}{c}=4\sqrt{1-\frac{1}{e^2}}=4\sqrt{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$．

故选 D，不选 ABC．

条件 8.4　给定抛物线焦点弦的斜率求焦点弦的端点到直线的距离

条件分析：当给定抛物线焦点弦的斜率时，首先需要根据抛物线方程来确定焦点坐标，然后利用给定的斜率写出焦点弦的直线方程，进而再做其他运算．

例 20.58（甲 1712）过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M（M 在 x 轴的上方），l 为 C 的准线，点 N 在 l 上且 $MN\perp l$，则 M 到直线 NF 的距离为（　）．

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$3\sqrt{3}$

解析：由题意知 MF 所在的直线方程为：$y=\sqrt{3}(x-1)$，与抛物线 $y^2=4x$ 联立可得：$3x^2-10x+3=0$，解得：$x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=3$．

$\because$题设点 M 在 x 轴的上方，且 NF 所在直线斜率为 $\sqrt{3}>0$，

$\therefore$点 M 的横坐标为 $x_2=3$，代入抛物线方程 $y^2=4x$ 可得：$y=2\sqrt{3}>0$，即点 $M(3,2\sqrt{3})$．

$\because$题设 l 是抛物线 $y^2=4x$ 的准线，$\therefore l$ 的方程为 $x=-\frac{p}{2}=-\frac{2}{2}=-1$．

又$\because$题设点 N 在 l 上，$\therefore$点 N 的横坐标为–1．

又$\because$题设 $MN\perp l$，$\therefore$点 N 的纵坐标与点 M 的纵坐标相等，亦为 $2\sqrt{3}$，即点 $N(1,2\sqrt{3})$．

又$\because F(1,0)$，$\therefore NF$ 所在直线的方程为：$y=-\sqrt{3}(x-1)$．

所以点 M 到直线 NF 的距离为 $d=\frac{\left|\sqrt{3}\times(3-1)+2\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=2\sqrt{3}$．故选 C，不选 ABD.

条件 8.5　给定抛物线上动点到焦点的距离与动点的横坐标的关系求动点坐标

条件分析：当给定抛物线上动点到焦点的距离与动点的横坐标的关系求动点坐标时，需要利用抛物线定义将动点到焦点的距离转化为动点到准线的距离，即建立坐标关系．

例 20.59（乙 1410）已知抛物线 C：$y^2=x$ 的焦点为 F，$A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点，$|AF|=\frac{5}{4}x_0$，则 $x_0=$（　）．

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

解析：$\because$抛物线 C：$y^2=x$，$\therefore p=\frac{1}{2}$．

又$\because A(x_0,y_0)$，$\therefore A(x_0,y_0)$ 到准线 $x=-\frac{1}{4}$ 的距离为 $x_0+\frac{1}{4}$．又$\because$焦点为 F，并且题设 $|AF|=\frac{5}{4}x_0$．

$\therefore$根据抛物线定义可得：$x_0+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}x_0$，解得：$x_0=1$．故选 A，不选 BCD．

条件 8.6 给定几何作图求距离

条件分析：当给定几何作图求距离时，关键是要按照题意正确作图，并寻找所求距离与已知条件之间的关系.

例 20.60（乙 1815）直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$________.

解析 1：解 $\begin{cases}y=x+1\\x^2+y^2+2y-3=0\end{cases}$ 可得：$x^2+(x+1)^2+2(x+1)-3=0$，化简可得：$2x^2+4x=0$，解得：$x_1=0$，$x_2=-2$，代入 $y=x+1$ 可得：$y_1=1$，$y_2=-1$.

由两点间距离公式可得：$|AB|=\sqrt{(-2-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

解析 2：将圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 化为 $x^2+(y+1)^2=4$，可见圆心为 $(0,-1)$，半径为 $r=2$.

又∵圆心 $(0,-1)$ 到直线 $y=x+1$ 即 $x-y+1=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|0-(-1)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}<r=2$，

∴直线 $y=x+1$ 与圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 相交，且弦心距为 $\sqrt{2}$.

所以由勾股定理可得：$\dfrac{|AB|}{2}=\sqrt{r^2-d^2}$，即 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.

例 20.61（甲 1410）设 F 为抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 $30°$ 的直线交 C 于点 A，则 $|AB|=$（ ）.

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$　　B. 6

C. 12　　D. $7\sqrt{3}$

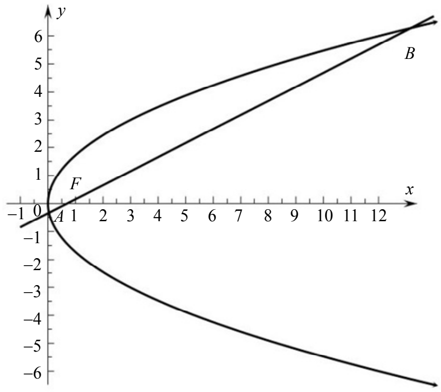


图 20.16

解析：如图 20.16 所示，∵ $F\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，$k=\tan 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

∴ AB 所在直线的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$.

将 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$ 代入 $y^2=3x$ 化简可得：$x^2-\dfrac{21}{2}x+\dfrac{9}{16}=0$，由韦达定理可得：$x_A+x_B=\dfrac{21}{2}$.

∵由抛物线定义可得：$|FA|=x_A+\dfrac{p}{2}$，$|FB|=x_B+\dfrac{p}{2}$.

∴ $|AB|=|FA|+|FB|=x_A+x_B+p=\dfrac{21}{2}+\dfrac{3}{2}=12$.

故选 C，不选 ABD.

例 20.62（甲 1766）已知 F 是抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N. 若 M 为 FN 的中点，则 $|FN|=$____________.

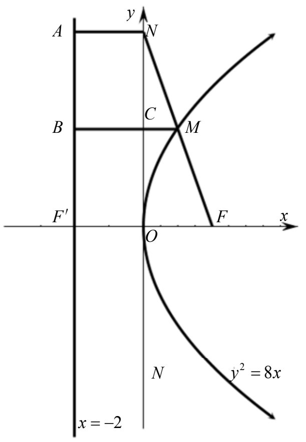


图 20.17

解析 1：根据题意作图，如图 20.17 所示，不妨设点 M 位于第一象限，设抛物线的准线与 x 轴交于点 F'，作 $MB\perp l$ 于点 B，$NA\perp l$ 于点 A.

由抛物线的解析式可得准线方程为 $x=-2$，则 $|AN|=2$，$|FF'|=4$.

在直角梯形 $ANFF'$ 中，中位线 $|BM|=\dfrac{|AN|+|FF'|}{2}=3$，由抛物线的定义有：$|MF|=|MB|=3$，结合题意有 $|MN|=|MB|=3$，故

$|FN| = |FM| + |NM| = 3 + 3 = 6$.

解析 2：∵题设 M 为 FN 的中点，且 $MC \parallel OF$，

∴ $|CM| = \frac{1}{2}|OF| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$. 又∵ $|BC| = |F'O| = 2$，

∴ $|BM| = |MC| + |CM| = 2 + 1 = 3$.

∵根据抛物线定义可得：$|MF| = |BM|$，

∴ $|FN| = |FM| + |MN| = 2|FM| = 2|BM| = 6$.

经验总结：抛物线的定义是解决抛物线问题的基础，它能将“抛物线上的点到焦点的距离”与“抛物线上的点到准线的距离”进行等量转化．因此，遇到涉及抛物线的焦半径、焦点弦等条件的问题时，可以优先考虑利用抛物线的定义将其转化为点到准线的距离，这样可能会使解决问题的路径更加明朗．

例 20.63（乙 1660）以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A，B 两点，交 C 的准线于 D，E 两点，已知 $|AB| = 4\sqrt{2}$，$|DE| = 2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为（　）.

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

解析：如图 20.18 所示，设抛物线方程为 $y^2 = 2px\left(p > 0\right)$，则焦点到准线的距离为 p.

设圆的半径为 R，连接 OD，则在 Rt△DHO 中，由勾股定理可得 $|DH|^2 + |HO|^2 = |OD|^2$.

∵ $|DH| = \frac{1}{2}|DE| = \sqrt{5}$，$|OH| = \frac{p}{2}$，$|OD| = R$，

∴ $5 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = R^2$.　　①

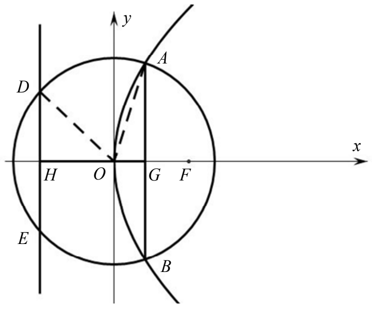


图 20.18

连接 AO，在 Rt△AOG 中，∵ $|AG| = \frac{1}{2}|AB| = 2\sqrt{2}$，∴将 $y = 2\sqrt{2}$ 代入 $y^2 = 2px$，解得 $x = \frac{y^2}{2p} = \frac{4}{p}$，即 $|OG| = \frac{4}{p}$，因此，由勾股定理可得 $\left(\frac{4}{p}\right)^2 + 8 = R^2$.　　②

联立①②两式可得：$5 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{16}{p^2} + 8$，化简可得 $p^4 - 12p^2 - 64 = 0$. 即 $\left(p^2 - 6\right)^2 = 100$，解得 $p^2 = 16$，即 $p = 4$，故选 B，不选 ACD.

例 20.64（乙 1505）已知椭圆 E 的中心在坐标原点，离心率为 $\frac{1}{2}$，E 的右焦点与抛物线 C：$y^2 = 8x$ 的焦点重合，A，B 是 C 的准线与 E 的两个交点，则 $|AB| =$（　）.

A．3　　B．6　　C．9　　D．12

解析：∵椭圆 E 的右焦点与抛物线 C：$y^2 = 8x$ 的焦点重合，即椭圆 E 的焦点在 x 轴上，

∴可设椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\left(a > b > 0\right)$.

又∵抛物线 C：$y^2 = 8x$ 的焦点为 $\left(2,0\right)$.

∴在椭圆 E 中，$c = 2$. 又∵题设椭圆离心率为 $\frac{1}{2}$，∴ $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$，解得：$a = 2c = 4$.

又∵在椭圆中有 $a^2 = b^2 + c^2$，∴ $b^2 = a^2 - c^2 = 4^2 - 2^2 = 12$. 因此，椭圆方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

又∵ A，B 是抛物线 C 的准线与椭圆 E 的两个交点，

∴将抛物线准线 $x=-\frac{p}{2}=-2$ 代入 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 可得 $y^2=9$，解得 $|y|=3$.

即 $|AB|=2|y|=6$．故选 B，不选 ACD.

例 20.65 （乙 1460）已知抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则 $|QF|=$ （　）.

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. 2

解析：根据题意作图，如图 20.19 所示．∵抛物线 C：$y^2=8x$ 的焦点为 F，

∴ $F(2,0)$，设准线与 x 轴的交点为 N，则 $NF=4$.

∵题设 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，∴ $\frac{|PQ|}{|PF|}=\frac{3}{4}$.

过 Q 作 $QM\perp$ 准线 l 于点 M，则由相似三角形可得：$\frac{|MQ|}{|NF|}=\frac{|PQ|}{|PF|}$.

将 $NF=4$，$\frac{|PQ|}{|PF|}=\frac{3}{4}$，代入上式可得：$|MQ|=3$.

又根据抛物线定义可得：$|QF|=|QM|=3$．故选 C，不选 ABD.

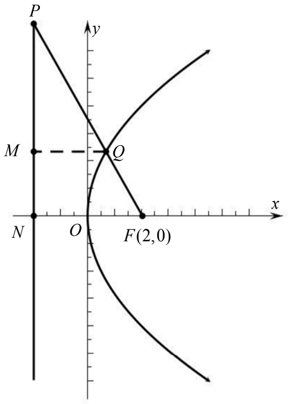


图 20.19

例 20.66 （丙 1615）已知直线 l：$x-\sqrt{3}y+6=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A, B 两点，过 A, B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点，则 $|CD|=$ ________.

解析：根据题意作图，如图 20.20 所示．∵直线 l：$x-\sqrt{3}y+6=0$ 的斜率 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴ $\angle ECD=30^\circ$，在 Rt△CED 中，欲求 $|CD|$，须知 $|CE|$，而 $|CE|=|AB|$.

至此，问题转化为求 $|AB|$．解 $\begin{cases}x-\sqrt{3}y+6=0\\x^2+y^2=12\end{cases}$ 即可.

将 $x=\sqrt{3}y-6$ 代入 $x^2+y^2=12$ 可得：$y^2-3\sqrt{3}y+6=0$，解得：$y_A=\sqrt{3}$，$y_B=2\sqrt{3}$．再代回 $x=\sqrt{3}y-6$ 可得：$x_A=-3$，$x_B=0$.

因此，$A(-3,\sqrt{3})$，$B(0,2\sqrt{3})$，从而 $|AB|=\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}$ $=2\sqrt{3}$，所以 $|CD|=\frac{|CE|}{\cos30^\circ}=\frac{|AB|}{\cos30^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$.

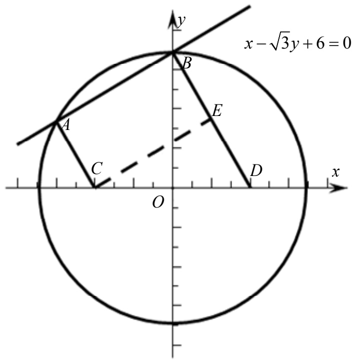


图 20.20

例 20.67 （丙 1666）已知直线 l：$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 与圆 $x^2+y^2=12$ 交于 A, B 两点，过 A, B 分别作 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点，若 $|AB|=2\sqrt{3}$，则 $|CD|=$ ____________.

解析：∵直线 l：$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$ 包含参数 m，转换主元，将 m 看成主变量可得 $(x+3)m+(y-\sqrt{3})=0$.

显然，当 $x=-3$ 时，$y=\sqrt{3}$，即直线 l 是过 $P(-3,\sqrt{3})$，斜率为 $-m$ 的直线.

又∵圆 $x^2+y^2=12$ 可化为 $x^2+y^2=(2\sqrt{3})^2$，即圆心为 $(0,0)$，半径为 $2\sqrt{3}$.

∵ $|OP|=2\sqrt{3}$，∴点 $P(-3,\sqrt{3})$ 在圆周上，不妨设点 $P(-3,\sqrt{3})$ 为点 A.

据此作图，如图 20.21 所示，并作 $OE \perp AB$．

∵题设 $|AB| = 2\sqrt{3}$，∴ $|AE| = \sqrt{3}$．

又∵ $|OA| = 2\sqrt{3}$，∴在 Rt△AEO 中由勾股定理可得：$|OE| = \sqrt{|OA|^2 - |AE|^2} = \sqrt{12-3} = 3$．

因此，由点到直线的距离公式可得：$\dfrac{|0+0+3m-\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$，解得：$m = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即直线的斜率 $k = -m = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，从而直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$．过点 C 作 $CF \perp BD$，则 $|CF| = |AB| = 2\sqrt{3}$，

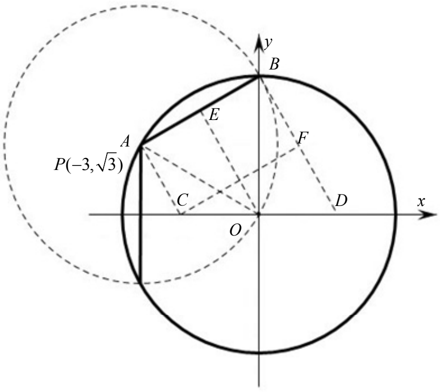


图 20.21

在 Rt△CFD 中，由三角函数定义可得：$\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{|CF|}{|CD|}$．解得：

$|CD| = \dfrac{|CF|}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$．

说明：满足 $|AB| = 2\sqrt{3}$ 的直线 AB' 因垂线与 x 轴无交点而舍去

例 20.68（乙 1620-1）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y = t(t \neq 0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 C：$y^2 = 2px(p>0)$ 于点 P，M 关于 P 的对称点为 N，连接 ON 并延长交 C 于点 H．求 $\dfrac{|OH|}{|ON|}$．

解析：根据题意作图，如图 20.22 所示．

∵直线 l：$y = t(t \neq 0)$ 交 y 轴于点 M，∴ M 点的坐标为 $(0,t)$．

又∵直线 l：$y = t(t \neq 0)$ 交抛物线 C：$y^2 = 2px(p>0)$ 于点 P，

∴ $y_P = t$，代入 $y^2 = 2px$，解得：$x_P = \dfrac{t^2}{2p}$，即 $P\left(\dfrac{t^2}{2p}, t\right)$．

又∵题设 M 关于 P 的对称点为 N，

∴由中点坐标公式可得：$x_N = 2x_P - x_M = \dfrac{t^2}{p}$，

$y_N = 2y_P - y_M = 2t - t = t$，即 $N\left(\dfrac{t^2}{p}, t\right)$．

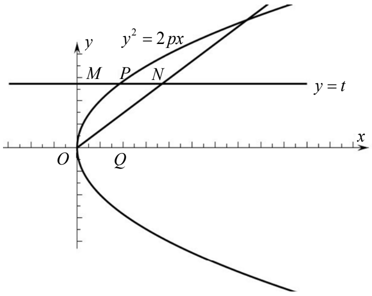


图 20.22

∵ $k_{ON} = \dfrac{y_N - 0}{x_N - 0} = \dfrac{p}{t}$，∴ ON 所在直线方程为：$y = \dfrac{p}{t}x$，代入 $y^2 = 2px$ 可得：$px^2 - 2tx = 0$，解得：$x_1 = 0$，$x_2 = \dfrac{2t^2}{p}$．将 $x_H = x_2 = \dfrac{2t^2}{p}$ 代入 $y^2 = 2px$ 解得：$y = \pm 2t$，即 $H\left(\dfrac{2t^2}{p}, 2t\right)$．

又∵ $N\left(\dfrac{t^2}{p}, t\right)$，$H\left(\dfrac{2t^2}{p}, 2t\right)$，∴ N 是 OH 的中点，因此 $\dfrac{|OH|}{|ON|} = 2$．

例 20.69（乙 1520-2）已知过点 $A(0,1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 C：$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 M，N 两点.若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 12$，其中 O 为坐标原点，求 $|MN|$．

解析：设直线 l：$y = kx + 1$ 与圆 C 交于 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，则代入圆的方程可得：$(1+k^2)x^2 - 4(1+k)x + 7 = 0$，由韦达定理可得：$x_1 + x_2 = \dfrac{4(1+k)}{1+k^2}$，$x_1 x_2 = \dfrac{7}{1+k^2}$．

又∵ $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1+1)(kx_2+1) = (1+k^2)x_1x_2 + k(x_1+x_2) + 1 = \dfrac{4k(k+1)}{1+k^2} + 8$．

∴由题设$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$可得：$\dfrac{4k(k+1)}{1+k^2}+8=12$，解得：$k=1$．故直线$l$的方程为$y=x+1$．

∵圆心$C(2,3)$在直线l上，∴MN为圆的一条直径，故$|MN|=2r=2\times1=2$．

例 20.70 （乙 1321-2/70-2）已知圆M：$(x+1)^2+y^2=1$，圆N：$(x-1)^2+y^2=9$，动圆P与圆M外切并且与圆N内切，圆心P的轨迹C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$．$l$是与圆$P$和圆$M$都相切的一条直线，$l$与曲线$C$交于$A$，$B$两点，当圆$P$的半径最长时，求$|AB|$．

解析：根据题意作图，如图 20.23 所示．

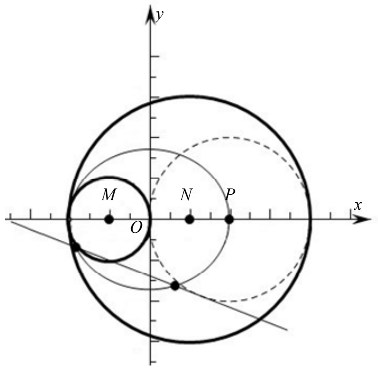


图 20.23

当动圆P的圆心位于$P(2,0)$时，动圆的半径最大为 2．

此时，动圆P的方程为$(x-2)^2+y^2=4$．

此时，两圆共有三条切线，其中由上、下两条切线有对称性可得：设直线l与x轴交于$Q(x_Q,0)$，则$\dfrac{|MQ|}{r_M}=\dfrac{|PQ|}{R_{\max}}$，即$\dfrac{-1-x_Q}{1}=\dfrac{2-x_Q}{2}$，

解得：$x_Q=-4$．

设切线斜率为k，则切线方程为$y=k(x+4)$．

∵ $y=k(x+4)$与圆M相切，

∴利用圆心到直线距离等于圆的半径可得：$\dfrac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

解得：$k=\pm\dfrac{\sqrt2}{4}$．因此，上、下两条切线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt2}{4}(x+4)$．

设直线$y=k(x+4)$与$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$交于$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$两点，则$3x^2+4k^2(x+4)^2=12$，化简可得：$(3+4k^2)x^2+32k^2x+64k^2-12=0$，由韦达定理可得：$x_A+x_B=-\dfrac{B}{A}=-\dfrac{32k^2}{3+4k^2}$，$x_A\cdot x_B=\dfrac{C}{A}=\dfrac{64k^2-12}{3+4k^2}$．

因此，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_B-x_A|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B}$，

即$|AB|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{\dfrac{(32k^2)^2}{(3+4k^2)^2}-4\times\dfrac{64k^2-12}{3+4k^2}}$．

将$k^2=\dfrac18$代入上式可得：$\sqrt{1+k^2}=\dfrac{3}{\sqrt8}$，$32k^2=4$，$3+4k^2=\dfrac72$．

因此，$|AB|=\dfrac{3}{\sqrt8}\times\sqrt{\dfrac{16}{\left(\frac72\right)^2}-4\times\dfrac{8-12}{\frac72}}=\dfrac{3\times4}{\sqrt8}\sqrt{\left(\dfrac27\right)^2+\dfrac27}=\dfrac{12\sqrt{18}}{7\sqrt8}=\dfrac{18}{7}$．

另一条切线与y轴重合，此时切线与椭圆的交点即为上、下顶点，所以$|AB|=2b=2\sqrt3$．

综上所述，$|AB|=\dfrac{18}{7}$或$|AB|=2\sqrt3$．

问题 9 求线段长度的最值

问题分析：求线段长度的最值问题关键是要找到影响长度变化的因素，以及线段长度与该因素的函数

关系式.

条件 9.1　给定抛物线中两条相互垂直的直线

例 20.71 （乙 1760）已知 F 为抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点，过 F 作两条互相垂直的直线 l_1，l_2，直线 l_1 与 C 交于 A，B 两点，直线 l_2 与 C 交于 D，E 两点，则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为（　）.

A．16　　B．14

C．12　　D．10

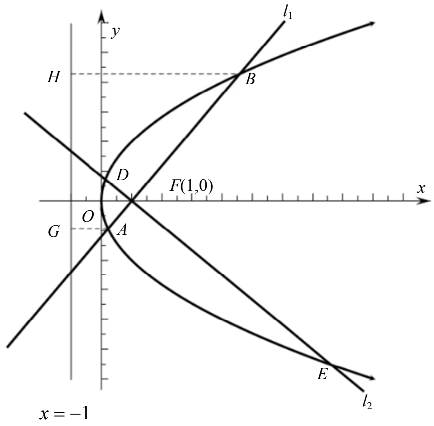


图 20.24

解析 1：（以斜率为变化因素）

根据题意作图，如图 20.24 所示，$|AB|=|AF|+|FB|$.

根据抛物线的定义可知：$|AF|=|AG|$，$|FB|=|BH|$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_3,y_3)$，$E(x_4,y_4)$，

则 $|AF|=|AG|=x_1+\dfrac{p}{2}$，$|FB|=|BH|=x_2+\dfrac{p}{2}$，

即 $|AB|=|AF|+|FB|=x_1+x_2+p$.

同理可得：$|DE|=|DF|+|FE|=x_3+x_4+p$.

因此，$|AB|+|DE|=x_1+x_2+x_3+x_4+2p$.

设直线 l_1 的方程为 $y=k_1(x-1)$，联立 $\begin{cases}y^2=4x\\ y=k_1(x-1)\end{cases}$ 可得：$k_1^2x^2-2(k_1^2+2)x+k_1^2=0$，由韦达定理可得：$x_1+x_2=\dfrac{2(k_1^2+2)}{k_1^2}$；同理可得：直线 l_2 与抛物线的交点满足 $x_3+x_4=\dfrac{2(k_2^2+2)}{k_2^2}$．代入 $|AB|+|DE|=x_1+x_2+x_3+x_4+2p$ 可得：$|AB|+|DE|=\dfrac{2(k_1^2+2)}{k_1^2}+\dfrac{2(k_2^2+2)}{k_2^2}+4=\dfrac{4}{k_1^2}+\dfrac{4}{k_2^2}+8\geqslant 2\sqrt{\dfrac{16}{k_1^2k_2^2}}+8$ $=16$，当且仅当 $k_1=-k_2=\pm1$ 时取等号.

故选 A，不选 BCD.

解析 2：（以倾斜角为变化因素）

设直线的倾斜角为 α，则 $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$，且 $|DE|=\dfrac{2p}{\sin^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{2p}{\cos^2\alpha}$.

所以 $|AB|+|DE|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}+\dfrac{2p}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{4}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.　　题设：$y^2=4x$

又∵ $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2\geqslant(2\sin\alpha\cos\alpha)^2$，　　基本不等式：$a^2+b^2\geqslant 2ab$

∴ $1\geqslant 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.　　基本三角公式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

两边同除以 $\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ 可得：$\dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\geqslant 4$，　　$\because \sin^2\alpha\cos^2\alpha>0$，$\therefore$ 不等号方向不变

因此，$|AB|+|DE|=\dfrac{4}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\geqslant 4\times4=16$，

事实上，$|AB|+|DE|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}+\dfrac{2p}{\cos^2\alpha}=4\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$$=4\left(2+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\geqslant 4\times(2+2)=16.$$　　基本不等式：$a^2+b^2\geqslant 2ab$

故选 A，不选 BCD.

例 20.72 （乙 1861）已知双曲线C：$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，O为坐标原点，F为C的右焦点，过F的直线与C的两条渐近线的交点分别为M，N，如图 20.25 所示．若$\triangle OMN$为直角三角形，则$|MN|=$（　）．

A．$\dfrac{3}{2}$　　B．3

C．$2\sqrt{3}$　　D．4

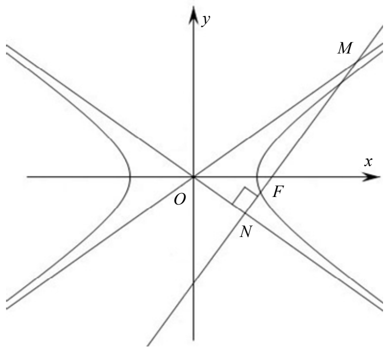


图 20.25

解析 1：∵双曲线方程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，∴$a^2=3,\ b^2=1$．定义

从而$c^2=a^2+b^2=3+1=4$，即$c=2$，右焦点$F(2,0)$．

又∵双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，即$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，

∴$\angle MOF=\angle NOF=30^\circ$．

∵题设：$\triangle OMN$为直角三角形，∴$\angle ONF=90^\circ$．

在$\mathrm{Rt}\triangle ONF$中，∵$|OF|=2$，$\angle NOF=30^\circ$，

∴$|ON|=|OF|\cos 30^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$．

在$\mathrm{Rt}\triangle ONM$中，∵$|ON|=\sqrt{3}$，$\angle MON=60^\circ$，∴$|MN|=|ON|\tan 60^\circ=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$．

故选 B，不选 ACD．

解析 2：∵双曲线方程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$，∴$a^2=3,\ b^2=1$．

∴$c^2=a^2+b^2=3+1=4$，即$c=2$，右焦点$F(2,0)$．

又∵双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$，∴$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$．

∵题设$\triangle OMN$为直角三角形，∴M，N所在直线的斜率为$\sqrt{3}$，且题设过右焦点$F(2,0)$，因此，直线方程为$y=\sqrt{3}(x-2)$．

解$\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-2)\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x\end{cases}$可得：$\begin{cases}x=3\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$，即$M(3,\sqrt{3})$．

又∵另一条渐近线方程为$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，即$\sqrt{3}x+3y=0$．由点到直线距离公式可得：

$$|MN|=\frac{\left|\sqrt{3}\times 3+3\times\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+3^2}}=\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=3.$$

故选 B，不选 ACD．

问题 10　求几何图形的面积

问题分析：求几何图形的面积问题的关键是要确定几何图形的类型及相关几何尺寸．

条件 10.1　给定含有同一个参数的直线与圆相交的弦长求圆的面积

条件分析：当给定含有同一个参数的直线与圆相交的弦长求圆的面积时，首先要利用给定的弦长求参数，然后再利用点到直线的距离求出弦心距，最后利用勾股定理求出圆的半径．

例 20.73（乙 1615）设直线$y=x+2a$与圆C：$x^2+y^2-2ay-2=0$相交于A，B两点，若$|AB|=2\sqrt{3}$，

则圆 C 的面积为__________ .

分析：∵圆 C：$x^2+y^2-2ay-2=0$，∴标准方程为 $x^2+(y-a)^2=a^2+2$，显然，这是一个以 $(0,a)$ 为圆心，半径为 $\sqrt{a^2+2}$ 的圆.

由于圆的半径包含有参数 a，因此问题进一步转化为先求参数 a.

又∵题设直线 $y=x+2a$ 与圆 $x^2+(y-a)^2=a^2+2$ 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=2\sqrt{3}$，

∴可能会很快想到如下两种解法.

解析 1：将 $y=x+2a$ 代入 $x^2+(y-a)^2=a^2+2$ 可得：$x^2+(x+a)^2=a^2+2$，化简可得：$2x^2+2ax-2=0$，由韦达定理可得：$x_A+x_B=-\dfrac{B}{A}=-a$，$x_A\cdot x_B=\dfrac{C}{A}=-1$.

再由两点间距离公式可得：$|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$，并将 $y=x+2a$ 代入可得：$|AB|=\sqrt{2(x_A-x_B)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_A+x_B)^2-4x_A\cdot x_B}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+4}$.

由于题设 $|AB|=2\sqrt{3}$，∴ $\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+4}=2\sqrt{3}$，解得：$a^2=2$，所以圆的半径为 $\sqrt{a^2+2}=\sqrt{4}=2$，故圆的面积为 4π.

解析 2：由点到直线的距离公式，可求得弦心距为 $d=\dfrac{|0\times1-a\times1+2a|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}$.

又∵半弦长为 $\dfrac{|AB|}{2}=\sqrt{3}$，∴由勾股定理可得：圆的半径为 $\sqrt{3+\dfrac{a^2}{2}}$.

而题设圆的半径为 $\sqrt{a^2+2}$，因此有 $a^2+2=3+\dfrac{a^2}{2}$，解得：$a^2=2$.

所以圆的半径为 $\sqrt{a^2+2}=\sqrt{4}=2$，故圆的面积为 4π；

或圆的半径为 $\sqrt{3+\dfrac{a^2}{2}}=\sqrt{4}=2$，故圆的面积为 4π.

例 20.74 （甲 1460）设 F 为抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 $30°$ 的直线交 C 于 A，B 两点，O 为坐标原点，则△OAB 的面积为（　）

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$　　C. $\dfrac{63}{32}$　　D. $\dfrac{9}{4}$

解析：如图 20.26 所示，∵ $F\left(\dfrac{3}{4},0\right)$，$k=\tan30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

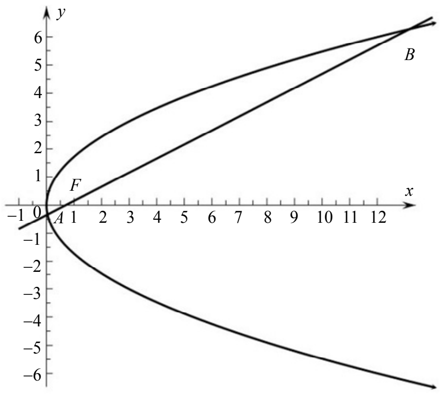


图 20.26

∴ AB 所在直线的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$，即 $4\sqrt{3}x-12y-3\sqrt{3}=0$.

从而坐标原点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|-3\sqrt{3}|}{\sqrt{48+144}}=\dfrac{3}{8}$.

将 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$ 代入 $y^2=3x$ 化简可得：$x^2-\dfrac{21}{2}x+\dfrac{9}{16}=0$，由韦达定理可得：$x_A+x_B=\dfrac{21}{2}$.

∵由抛物线定义可得：$|FA|=x_A+\dfrac{p}{2}$，$|FB|=x_B+\dfrac{p}{2}$，

∴ $|AB|=|FA|+|FB|=x_A+x_B+p=\dfrac{21}{2}+\dfrac{3}{2}=12$.

因此，$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times12\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{9}{4}$. 故选 D，不选 ABC.

条件 10.2　给定圆锥曲线方程等条件求焦点三角形的面积

条件分析：当给定圆锥曲线方程求焦点三角形的面积时，首先要根据圆锥曲线方程确定焦点坐标，再根据其他条件确定另外两个点，最后确定三角形的“底”与“高”.

例 20.75　（乙 1705）已知 F 是双曲线 C: $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的焦点，P 是 C 上一点，且 PF 与 x 轴垂直，点 A 的坐标是 $(1,3)$，则 $\triangle APF$ 的面积为（　）.

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

解析：由 $c^2=a^2+b^2$ 可得：$c^2=1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=4$，解得：$c=2$．故焦点为 $F(2,0)$.

$\because$ 题设 PF 与 x 轴垂直，$\therefore$ PF 所在直线方程为 $x=2$．将 $x=2$ 代入双曲线方程可得 $y=\pm3$，即 $|PF|=3$.

又 $\because$ 题设点 A 的坐标是 $(1,3)$，且 PF 所在直线方程为 $x=2$，

$\therefore$ 点 A 到 PF 的距离（即三角形的“高”）为 $2-1=1$.

因此，$\triangle APF$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times3\times1=\dfrac{3}{2}$．故选 D，不选 ABC.

例 20.76　（乙 1308）O 为坐标原点，F 为抛物线 C：$y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点，P 为 C 上一点，若 $|PF|=4\sqrt{2}$，则 $\triangle POF$ 的面积为（　）.

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

解析 1：$\because$ F 为抛物线 C：$y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点，$\therefore$ $\dfrac{p}{2}=\sqrt{2}$，即 $F\left(\sqrt{2},0\right)$.

如图 20.27 所示，作 $PM\perp$ 准线 l，则由抛物线的定义可得：$|PM|=|PF|=4\sqrt{2}$.

再作 $FN\perp PM$，则 $|PN|=|NM|=\dfrac{1}{2}|PM|=2\sqrt{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle FNP$ 中，由勾股定理可得：$|FN|=\sqrt{|PF|^2-|PN|^2}=\sqrt{32-8}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

因此，$S_{\triangle OPF}=\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|FN|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=2\sqrt{3}$．故选 C，不选 ABD.

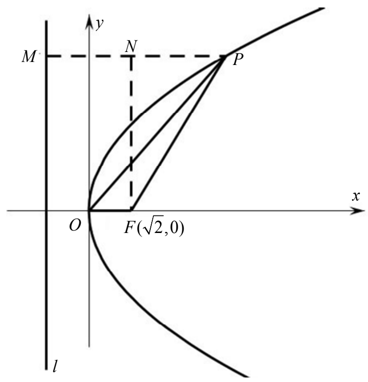


图 20.27

解析 2：$\because$ F 为抛物线 C：$y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点，$\therefore$ $\dfrac{p}{2}=\sqrt{2}$，故 $F\left(\sqrt{2},0\right)$．即 $|OF|=\sqrt{2}$．欲求 $\triangle POF$ 的面积，须知点 P 到 x 轴的距离，即点 P 的纵坐标，因此，想到列圆方程与抛物线方程求解.

又 $\because$ 题设 $|PF|=4\sqrt{2}$，$\therefore$ 以 F 为圆心，以 $|PF|=4\sqrt{2}$ 为半径的圆方程为 $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=32$.

解 $\begin{cases}\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=32\\ y^2=4\sqrt{2}x\end{cases}$ 得 $\left(x+\sqrt{2}\right)^2=32$，解得：$x=\pm4\sqrt{2}-\sqrt{2}$（舍负），可得 $x=3\sqrt{2}$．代入 $y^2=4\sqrt{2}x$ 可得 $|y|=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

$S_{\triangle OPF}=\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|y|=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=2\sqrt{3}$．故选 C，不选 ABD.

条件 10.3　给定圆锥曲线方程等条件求三角形周长最小时的面积

条件分析：当给定圆锥曲线方程等条件求三角形周长最小时的面积时，首先要根据圆锥曲线方程确定焦点坐标，再根据“周长最小”确定另外两个点，最后确定三角形的“底”与“高”.

例 20.77（乙 1516）已知 F 是双曲线 C：$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的右焦点，P 是 C 的左支上一点，$A\left(0,6\sqrt{6}\right)$，当 $\triangle APF$ 周长最小时，该三角形的面积为_____.

解析 1：∵双曲线 C：$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$，∴ $a=1$，$b^2=8$，从而 $c=\sqrt{a^2+b^2}=3$.

设左焦点为 $F'(-3,0)$，右焦点为 $F(3,0)$. 根据双曲线定义 $|PF|-|PF'|=2a$，得 $|PF|=|PF'|+2(a=1)$.

设 $\triangle APF$ 周长为 L，则 $L=|AP|+|AF|+|PF|$，即 $L=|AP|+|AF|+|PF'|+2$.

∵ $|AF|=15$ 为定值，且在 $\triangle APF'$ 中，$|AP|+|PF'|>|AF'|$.

∴当 P 移动至 P' 时，$(|AP|+|PF'|)_{\min}=|AF'|=|AF|=15$，此时，$S_{\triangle AP'F}=S_{\triangle AF'F}-S_{\triangle P'F'F}$.

∵ $|F'F|=6$，$|AO|=6\sqrt{6}$，∴ $S_{\triangle AF'F}=\dfrac{1}{2}\times6\times6\sqrt{6}=18\sqrt{6}$.

∵ $k_{AF'}=\dfrac{6\sqrt{6}-0}{0-(-3)}=2\sqrt{6}$，∴ AF' 所在直线为 $y=2\sqrt{6}(x+3)$，化为 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{12}y-3$. 代入双曲线方程可得 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{12}y-3\right)^2-\dfrac{1}{8}y^2=1$，化简可得：$y^2+6\sqrt{6}y-96=0$.

解得：$y_1=2\sqrt{6}$，$y_2=-8\sqrt{6}$（舍去）. 此处，消去 x 的目的是直接解出 y，如果将 $y=2\sqrt{6}(x+3)$ 代入双曲线，则可先解出：$x_1=-2$ 和 $x_2=-7<-3$（舍去），再将 $x_1=-2$ 代回 $y=2\sqrt{6}(x+3)$ 得：$y_1=2\sqrt{6}$.

总之，$S_{\triangle P'F'F}=\dfrac{1}{2}|F'F|\cdot|y_1|=\dfrac{1}{2}\times6\times2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$. ∴ $S_{\triangle AP'F}=S_{\triangle AF'F}-S_{\triangle P'F'F}=18\sqrt{6}-6\sqrt{6}=12\sqrt{6}$.

解析 2：设 F' 是双曲线 C：$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 的左焦点，而 P 是 C 的左支上一点，则 $|PF|=|PF'|+2$，$\triangle APF$ 周长等于 $|PA|+|PF|+|AF|=|PA|+|PF'|+|AF|+2\geqslant|AF'|+|AF|+2=32$. 当且仅当点 P，F'，A 共线时等号成立，点 P 在线段 $F'A$ 上，线段 $F'A$：$y=2\sqrt{6}x+6\sqrt{6}(-3\leqslant x\leqslant0)$，代入 $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 可得 $8x^2-(2\sqrt{6}x+6\sqrt{6})^2=8$，即 $x^2+9x+14=0$，解得 $x=-2$，$x=-7$（舍去），则 $P(-2,2\sqrt{6})$ 到直线 FA：$y=-2\sqrt{6}x+6\sqrt{6}$ 的距离为 $d=\dfrac{8\sqrt{6}}{5}$，$S=\dfrac{1}{2}\cdot d\cdot|AF|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8\sqrt{6}}{5}\cdot15=12\sqrt{6}$.

条件 10.4　给定几何图形求面积

条件分析：当给定几何图形求面积时，往往需要根据作图要求，确定图形中几何量之间的关系，目标在于确定三角形的“底”与“高”.

例 20.78（甲 1621-1/70-1）已知 A 是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+1$ 的左顶点，斜率为 $k(k>0)$ 的直线交 E 于 A，M 两点，点 N 在 E 上，$MA\perp NA$. 当 $|AM|=|AN|$ 时，求 $\triangle AMN$ 的面积.

解析：根据题意作图，如图 20.28 所示.

∵ $MA\perp NA$ 且 $|AM|=|AN|$，∴ $\triangle AMN$ 为等腰直角三角形，即

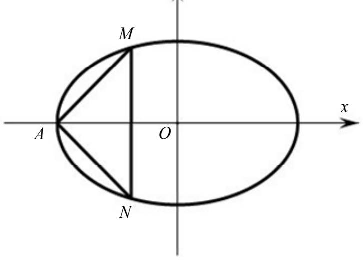


图 20.28

$\angle MAO=\angle NAO=\dfrac{\pi}{4}$，故 $k_{AM}=1$，$k_{AN}=-1$．

又∵ $a^2=4$，∴ $A(-2,0)$，故 AM 所在直线方程为 $y=x+2$．

方案1：将 $y=x+2$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 可得：$7x^2+16x+4=0$，解得：$x=-2$ 或 $x=-\dfrac{2}{7}$，即点 M 的横坐标为 $-\dfrac{2}{7}$，再代回 $y=x+2$ 可得：点 M 的纵坐标为 $\dfrac{12}{7}$．

因此 $S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}\times\left(2\times\dfrac{12}{7}\right)\times\left(2-\dfrac{2}{7}\right)=\dfrac{144}{49}$．

方案 2：将 $x=y-2$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 可得 $7y^2-12y=0$，解得：$y=0$ 或 $y=\dfrac{12}{7}$．即点 M 的纵坐标为 $\dfrac{12}{7}$．将等腰直角 $\triangle AMN$ 看成由上、下两个等腰直角三角形组成的，则 $S_{\triangle AMN}=2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12}{7}\times\dfrac{12}{7}=\dfrac{144}{49}$．

> 经验总结：比较两个方案可见：方案 1 计算复杂，容易出错；方案 2 计算简捷．实际上，方案 1 是受“将 $y=x+2$ 代入先消去 y，再自然求 x”这一习惯做法的影响；而方案 2 是在将等腰直角 $\triangle AMN$ 看成由上、下两个等腰直角三角形组成的，明确需要求出点 M 的纵坐标之后做出的选择．

例 20.79（乙 1420-2）已知点 $P(2,2)$，圆 C：$x^2+y^2-8y=0$，过点 P 的动直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点 M 的轨迹方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$，O 为坐标原点．当 $|OP|=|OM|$ 时，求 l 的方程及 $\triangle POM$ 的面积．

解析：如图 20.29 所示，M 的轨迹是以点 $N(1,3)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆．由于 $|OP|=|OM|$，因此 O 在线段 PM 的垂直平分线上．

又∵ P 在圆 N 上，∴ $ON\perp PM$．因为 ON 的斜率为 3，所以直线 l 的斜率为 $-\dfrac{1}{3}$，因此，直线 l 的方程为 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{8}{3}$，即 $x+3y-8=0$．

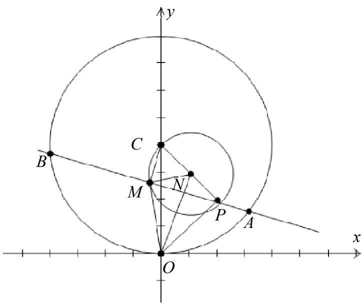


图 20.29

又∵ $|OM|=|OP|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，且 O 到 l 的距离为 $\dfrac{|-8|}{\sqrt{1+3^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{10}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$，

∴ $|PM|=2\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{10}}{5}$．

所以 $\triangle POM$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{10}}{5}\times\dfrac{4\sqrt{10}}{5}=\dfrac{16}{5}$．

问题 11 求四边形面积的取值范围

问题分析：求四边形面积的取值范围（最值）问题的关键是要弄清楚影响四边形面积变化的因素．

条件 11.1 给定四边形的变化规律

条件分析：当给定四边形的变化规律时，根据四边形的变化规律找到引起四边形变化的因素，建立四边形面积与变化因素之间的函数关系式．

例 20.80（乙 1670-2）设圆 $x^2+y^2+2x-15=0$ 的圆心为 A，以点 A 为左焦点的椭圆方程为 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，设过点 $B(1,0)$ 的直线 l（不与 x 轴重合）交 C 于 M，N 两点，过点 $B(1,0)$ 且与 l 垂直的直线与圆 A 交于 P，Q 两点，求四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围.

解析：根据题意作图，如图 20.30 所示.

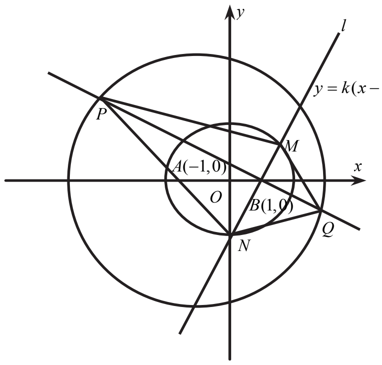


图 20.30

∵题设直线 l 过点 $B(1,0)$ 且不与 x 轴重合，

∴直线 l 有与 x 轴垂直和不垂直两种情形.

① 当直线 l 与 x 轴垂直时，其方程为 $x=1$，代入椭圆方程可得：$y=\pm\frac{3}{2}$，即 $|MN|=3$.

此时，P，Q 两点在 x 轴上，有 $|PQ|=2R=8$，故 $S_{MPNQ}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\times3\times8=12$.

② 当直线 l 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq0)$，且直线 l 与椭圆的交点为 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

解 $\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 可得：$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，由韦达定理可得：$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{C}{A}=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$.

由两点间距离公式可得：$|MN|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，并将 $y=k(x-1)$ 代入上式可得：

$$|MN|=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}.$$

$$=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{\left(\frac{8k^2}{4k^2+3}\right)^2-\frac{4(4k^2-12)}{4k^2+3}}=\frac{\sqrt{1+k^2}}{4k^2+3}\sqrt{64k^4-4(4k^2-12)(4k^2+3)}=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}.$$

又∵过点 $B(1,0)$ 且与 l 垂直的直线 m 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-1)$，

∴圆心 $A(-1,0)$ 到直线 m 的距离（即弦心距）为 $\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，故由勾股定理可得弦长 $|PQ|$ 为

$$|PQ|=2\sqrt{4^2-\left(\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2}=4\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}.$$

故四边形 $MPNQ$ 的面积为：$S_{MPNQ}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|=12\sqrt{1+\frac{1}{4k^2+3}}$.

由此可见：当 $k\to\infty$ 时，$S_{MPNQ}\to12$；当 $k\to0$ 时，$S_{MPNQ}\to12\sqrt{1+\frac{1}{3}}=8\sqrt{3}$.

又∵ $8\sqrt{3}\approx8\times1.732=13.856>12$，

∴综上所述，四边形 $MPNQ$ 面积的取值范围为 $\left[12,8\sqrt{3}\right)$.

例 20.81（甲 1370-2）平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 M：$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 右焦点的直线 $x+y-\sqrt{3}=0$ 交 M 于 A，B 两点，P 为 AB 的中点，且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$，C，D 为 M 上的两点，若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD\perp AB$，求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

解析：∵解$\begin{cases}x+y-\sqrt{3}=0\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$可得：$\begin{cases}x_1=0\\ y_1=\sqrt{3}\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\\ y_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$，∴由两点间距离公式可得：$|AB|=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

又∵$CD\perp AB$，且AB的直线方程为$x+y-\sqrt{3}=0$.

∴设CD的直线方程为$x-y+n=0$，且设$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$.

解$\begin{cases}x-y+n=0\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$可得：$3x^2+4nx+2n^2-6=0$，解得：$x_{3,4}=\dfrac{-2n\pm\sqrt{2(9-n^2)}}{3}$.

∵直线CD的斜率为1，∴$|CD|=\sqrt{2}|x_4-x_3|=\dfrac{4}{3}\sqrt{9-n^2}$.

因此，平行四边形$ACBD$的面积为$S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{4}{3}\sqrt{9-n^2}=\dfrac{8\sqrt{6}}{9}\sqrt{9-n^2}$.

故当$n=0$时，$S_{\max}=\dfrac{8\sqrt{6}}{9}\times3=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$，所以平行四边形$ACBD$面积的最大值为$\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$.

例 20.82（丙 1808/56）直线$x+y+2=0$分别与x轴、y轴交于A，B两点，点P在圆$(x-2)^2+y^2=2$上，则$\triangle ABP$面积的取值范围是（　）.

A. $[2,6]$　　B. $[4,8]$　　C. $[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　　D. $[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

解析：∵题设直线$x+y+2=0$分别与x轴、y轴交于A，B两点，

∴令$y=0$代入直线方程$x+y+2=0$可得$x=-2$，即点$A(-2,0)$；令$x=0$代入直线方程$x+y+2=0$可得：$y=-2$，即点$B(0,-2)$. 则$|AB|=2\sqrt{2}$.　可由两点间距离公式或勾股定理求得

∵圆方程为$(x-2)^2+y^2=2$，∴圆心为$(2,0)$，半径为$r=\sqrt{2}$.

设圆心$(2,0)$到直线$x+y+2=0$的距离为D，则$D=\dfrac{|2+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$.

∵$D>r$，∴圆$(x-2)^2+y^2=2$与直线$x+y+2=0$相离.

因此，圆上离直线最近的点到直线的距离为$D-r=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$；圆上离直线最远的点到直线的距离为$D+r=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$. 即$\triangle ABP$高的最小值为$h_{\min}=\sqrt{2}$，高的最大值为$h_{\max}=3\sqrt{2}$. 亦即$\triangle ABP$面积的最小值为$S_{\min}=\dfrac{1}{2}|AB|h_{\min}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$；$\triangle ABP$面积的最大值为$S_{\max}=\dfrac{1}{2}|AB|h_{\max}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=6$.

因此，$\triangle ABP$面积的取值范围是$[2,6]$. 故选 A，不选 BCD.

问题 12 求圆锥曲线中参数的取值范围

问题分析：圆锥曲线中的参数问题主要依据题目中的另一个“约束条件”来确定.

条件 12.1　给定含参的圆锥曲线方程

条件分析：当给定含参的圆锥曲线方程时，往往需要根据参数在圆锥曲线方程中的位置，对参数与圆锥曲线方程中的常数进行比较，进而通过分类讨论来解决问题.

例 20.83（乙 1712）设A，B是椭圆C：$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{m}=1$长轴的两个端点，若$C$上存在点$M$满足

$\angle AMB=120°$，则 m 的取值范围是（　）.

A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$　　B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$

C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$　　D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$

解析 1：（分类讨论，归纳结论）

观察 C：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{m}=1$ 可见：由于 m 和 3 的大小关系将决定椭圆的焦点在哪个坐标轴上，因此需要对 m 分为 $0<m<3$ 或 $m>3$ 两类进行讨论.

①当 $0<m<3$ 时，焦点在 x 轴上，要是 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120°$，则 $\frac{a}{b}\geqslant\tan60^{\circ}=\sqrt{3}$，即 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}}\geqslant\sqrt{3}$，解得：$0<m\leqslant1$.

②当 $m>3$ 时，焦点在 y 轴上，要是 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120°$，则 $\frac{a}{b}\geqslant\tan60^{\circ}=\sqrt{3}$，即 $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}}\geqslant\sqrt{3}$，解得：$m\geqslant9$.

综上所述，m 的取值范围为 $(0,1]\cup[9,+\infty)$，故选 A，不选 BCD.

解析 2：∵题设的四个选项为 A. $(0,1]\cup[9,+\infty)$，B. $(0,\sqrt{3}]\cup[9,+\infty)$，C. $(0,1]\cup[4,+\infty)$，D. $(0,\sqrt{3}]\cup[4,+\infty)$，可以依据选项的“交集”将四个选项分为两组.

分法 1：$E=A\cap C=(0,1]$，$F=B\cap D=(0,\sqrt{3}]$；

分法 2：$E=A\cap B=[9,+\infty)$，$F=C\cap D=[4,+\infty)$.

由于选项只能是四选一，所以也只能是 E 或 F 的二选一，即排除 E 或 F 即可.

因为 E 或 F 有交集，所以从两者的补集中选择一个特殊值进行“检验”即可.

以分法 1 为例，取 $1<m=1.5<\sqrt{3}$，经检验不符合条件，故排除 F，再在 E 中从 A，C 的补集中选择 $4\leqslant m=6\leqslant9$，经检验符合条件．故选 A，不选 BCD.

以分法 2 为例，取 $4<m=6<9$，经检验不符合条件，故排除 F，再在 E 中从 A，B 的补集中选择 $1\leqslant m=1.5\leqslant\sqrt{3}$，经检验不符合条件．故选 A，不选 BCD.

> **经验总结：**解析 1 的关键是将题设条件 $\angle AMB=120^{\circ}$ 转化为 $\frac{a}{b}\geqslant\tan60^{\circ}=\sqrt{3}$，需要注意的是对焦点位置进行讨论；解析 2 是“取值范围”类选择题通用的先分组，再两次采用特殊值进行排除.

例 20.84　（乙 1655）已知方程 $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$ 表示双曲线，且该双曲线两焦点间的距离为 4，则 n 的取值范围是（　）.

A. $(-1,3)$　　B. $(-1,\sqrt{3})$　　C. $(0,3)$　　D. $(0,\sqrt{3})$

解析 1：（不等式组思想）

∵题设 $\frac{x^2}{m^2+n}-\frac{y^2}{3m^2-n}=1$ 表示双曲线，∴ $a^2=m^2+n$，$b^2=3m^2-n$.

又∵题设双曲线两焦点间的距离为 4，∴ $2c=4$，解得：$c=2$.

代入双曲线 $a^2+b^2=c^2$ 可得：$4m^2=2^2$，解得：$m^2=1$.

代入 $b^2=3m^2-n>0$ 可得：$3\times1-n>0$，解得：$n<3$；代入 $a^2=m^2+n>0$ 可得：$1+n>0$，解得：$n>-1$.

综上所述，$-1<n<3$，故选 A，不选 BCD.

解析 2：（特殊值二次检验法）

比较四个选项可见：A，B 中包含“0”，C，D 中不包含“0”；A，C 中包含“2（$2<3$）”，B，D 中不包含“2（$2>\sqrt{3}$）”.

因此，可以分别取 $n=0$，2 代入检验即可，故选 A，不选 BCD.

条件 12.2　给定圆锥曲线上动点坐标

例 20.85（乙 1555）已知 $M(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点，F_1，F_2 是 C 的两个焦点，若 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$，则 y_0 的取值范围是（　）.

A. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　B. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$　　C. $\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

解析：$\because M(x_0,y_0)$ 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上的一点，$\therefore \dfrac{x_0^2}{2}-y_0^2=1$，即 $x_0^2=2+2y_0^2$.

又 $\because F_1$，F_2 是 $C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 的两个焦点，$\therefore a^2=2$，$b^2=1$，$c^2=a^2+b^2=3$，即 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{3},0\right)$.

又 $\because$ 已知 $M(x_0,y_0)$，$\therefore \overrightarrow{MF_1}=\left(-\sqrt{3}-x_0,0-y_0\right)$，$\overrightarrow{MF_2}=\left(\sqrt{3}-x_0,0-y_0\right)$.

由题设 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}<0$ 可得：$\left(-\sqrt{3}-x_0\right)\left(\sqrt{3}-x_0\right)+(-y_0)(-y_0)<0$，即 $(-x_0)^2-3+y_0^2<0$，将 $x_0^2=2+2y_0^2$ 代入可得 $3y_0^2-1<0$，即 $y_0^2<\dfrac{1}{3}$，解得：$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}<y_0<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故选 A，不选 BCD.

例 20.86（甲 1412/66）设点 $M(x_0,1)$，若在圆 O：$x^2+y^2=1$ 上存在点 N，使得 $\angle OMN=45°$，则 x_0 的取值范围是（　）.

甲 1466 是填空题

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　　C. $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$　　D. $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

解析：作圆 O：$x^2+y^2=1$ 和直线 $y=1$ 的图像如图 20.31 所示，设 $M(x_0,1)$，连接 OM，作 OM 的垂线 MP 及 $\angle OMP$ 的平分线与圆 O 交于 N_1，N_2 两点，则 $\angle OMN_1=\angle OMN_2=45°$.

如图可见：当 $-1<x_0<0$ 时，存在两个点 N 使得 $\angle OMN=45°$；当 $x_0=-1$ 或 $x_0=0$ 时，存在一个点 N 使得 $\angle OMN=45°$.

同理可得：当 $0<x_0<1$ 时，存在两个点 N 使得 $\angle OMN=45°$；当 $x_0=-1$ 或 $x_0=0$ 时，存在一个点 N 使得 $\angle OMN=45°$. 因此，x_0 的取值范围是 $[-1,1]$.

故选 A，不选 BCD.

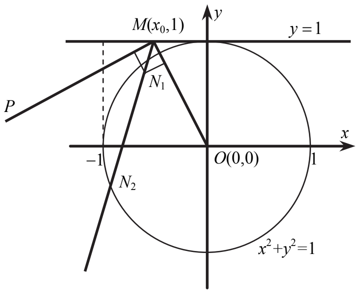


图 20.31

问题 13　证明类问题

证明 13.1　证明直线过定点

例 20.87（乙 1770-2）已知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，设直线 l 不经过点 $P_2(0,1)$ 且与 C 相交于 A，B 两点.若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为–1，证明：l 过定点.

分析：先设直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率分别为 k_1，k_2，再设直线 l 的方程，当 l 与 x 轴垂直时，通过计

算知此时 l 不满足题意，因此设 l：$y=kx+m(m\neq1)$，将 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，写出判别式，利用根与系数的关系表示出 x_1+x_2，x_1x_2，进而表示出 k_1+k_2，根据题设 $k_1+k_2=-1$ 列出 k 和 m 的关系式，从而判断出直线恒过定点.

证明：设直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率分别为 k_1，k_2，如果 l 与 x 轴垂直，设 l：$x=t$，由题设知 $t\neq0$，且 $|t|<2$，可得 A，B 的坐标分别为 $\left(t,\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right)$，$\left(t,-\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}\right)$.

$\because$ 题设 $k_1+k_2=-1$，$\therefore \frac{\sqrt{4-t^2}-2}{2t}-\frac{\sqrt{4-t^2}+2}{2t}=-1$，解得：$t=2$，不符合题设.

如果 l 与 x 轴不垂直，再设 l：$y=kx+m(m\neq1)$，将 $y=kx+m$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 可得：$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$.

由题设可知：$\Delta=16(4k^2-m^2+1)>0$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由韦达定理可得：$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}$.

又 $\because k_1+k_2=\frac{y_1-1}{x_1}+\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{kx_1+m-1}{x_1}+\frac{kx_2+m-1}{x_2}=\frac{2kx_1x_2+(m-1)(x_1+x_2)}{x_1x_2}$.

由题设 $k_1+k_2=-1$ 可得：$(2k+1)x_1x_2+(m-1)(x_1+x_2)=0$.

将由韦达定理所得结果代入上式可得：$(2k+1)\cdot\frac{4m^2-4}{4k^2+1}+(m-1)\cdot\frac{-8km}{4k^2+1}=0$，解得 $k=-\frac{(m+1)}{2}$.

当且仅当 $m>-1$ 时，$\Delta>0$，于是 l：$y=-\frac{(m+1)}{2}x+m$，即 $y+1=-\frac{(m+1)}{2}(x-2)$.

由 $\begin{cases}y+1=0\\x-2=0\end{cases}$ 得 $x=2$，$y=-1$，故无论 m 取何值，直线 l 恒过定点 $(2,-1)$.

> **经验总结**：证明直线过定点的关键是设出直线方程，通过一定关系的转化，找出两个参数之间的关系，从而可以判断过定点情况. 另外，在设直线方程之前，若题设中未告知是否对 x 轴垂直，则一定要讨论直线斜率不存在和存在两种情况，其通常的解法是联立方程，求判别式，利用根与系数的关系，再根据题设关系进行化简.

例 20.88（丙 1770-1）已知抛物线 C：$y^2=2x$，过点 $(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A，B 两点，圆 M 是以线段 AB 为直径的圆.证明：坐标原点 O 在圆 M 上.　相当于圆过坐标原点

证明：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，l：$x=my+2$.

由 $\begin{cases}x=my+2\\y^2=2x\end{cases}$ 可得：$y^2-2my-4=0$，由韦达定理可得：$y_1y_1=-4$.

又 $\because x_1=\frac{1}{2}y_1^2$，$x_2=\frac{1}{2}y_2^2$，$\therefore x_1x_2=\frac{1}{4}(y_1y_2)^2=4$.

因此，OA 的斜率与 OB 的斜率之积为 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{-4}{4}=-1$，所以 $OA\perp OB$. 故坐标原点 O 在圆 M 上.

证明 13.2　证明线线垂直

例 20.89（甲 1720-2/70-2）设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，动点 P 的轨迹方

程为$x^2+y^2=2$，设点Q在直线$x=-3$上，且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$．证明：过点$P$且垂直于$OQ$的直线$l$过$C$的左焦点$F$．

分析：证明两线垂直，一般的方法是以算代证：即通过计算出$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF}=0$来证明．先设$P(m,n)$，则需证$3+3m-tn=0$．因为根据条件$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$可得$-3m-m^2+tn-n^2=1$，而$m^2+n^2=2$，将其代入上式可得：$3+3m-tn=0$．

证明：由题意可知$F(-1,0)$，设$Q(-3,t)$，$P(m,n)$，则$\overrightarrow{OQ}=(-3,t)$，$\overrightarrow{PF}=(-1-m,-n)$，且$m^2+n^2=2$．

∵题设$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$，∴$-3m-m^2+tn-n^2=1$．

将$m^2+n^2=2$代入上式可得：$3+3m-tn=0$．即$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，亦即$OQ\perp PF$．

又∵过点P存在唯一一条直线垂直于OQ，∴过点P且垂直于OQ的直线l过椭圆C的左焦点F．

证明 13.3　证明线线平行

例 20.90（丙 1620-1/70-1）已知抛物线C：$y^2=2x$的焦点为F，平行于x轴的两条直线l_1，l_2分别交C于A，B两点，交C的准线于P，Q两点.若F在线段AB上，R是PQ的中点，证明：$AR\parallel FQ$．

证明：根据题意作图，如图 20.32 所示. 设直线l_1：$y=a$，l_2：$y=b$，且$ab\neq 0$，则$A\left(\frac{a^2}{2},a\right)$，$B\left(\frac{b^2}{2},b\right)$，$P\left(-\frac{1}{2},a\right)$，$Q\left(-\frac{1}{2},b\right)$，$R\left(-\frac{1}{2},\frac{a+b}{2}\right)$．

设过A，B两点的直线为l，则直线l的方程为$2x-(a+b)y+ab=0$．

∵题设：F在线段AB上，

∴将$F\left(\frac{1}{2},0\right)$坐标代入直线$l$的方程$2x-(a+b)x+ab=0$，

可得：$1+ab=0$．

∵$k_{FQ}=\dfrac{0-b}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=-b$，$k_{AR}=\dfrac{a-b}{1+a^2}=\dfrac{a^2-ab}{a(1+a^2)}=\dfrac{1}{a}=-b$，

两次用$1+ab=0$

∴$AR\parallel FQ$．

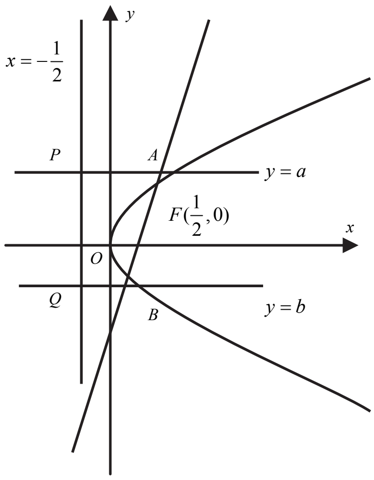


图 20.32

证明 13.4　证明定值问题

例 20.91（甲 1520-2）已知椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，直线$l$不经过原点$O$，且不平行于坐标轴，$l$与$C$有两个交点$A$，$B$，线段$AB$的中点为$M$，证明：直线$OM$的斜率与直线$l$的斜率乘积为定值.

证明：∵直线l不经过原点O，且不平行于坐标轴，

∴可设直线l的方程为$y=kx+b(k\neq 0,\ b\neq 0)$，且与椭圆$C$交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点，中点为$M(x_M,y_M)$．

将$y=kx+b$代入$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$可得$(2k^2+1)x^2+4kbx+2b^2-8=0$．由韦达定理可得：$x_1+x_2=-\frac{B}{A}=-\frac{4kb}{2k^2+1}$．由中点坐标公式可得：$x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{2kb}{2k^2+1}$，代入$y=kx+b$可得：$y_M=kx_M+b=\frac{b}{2k^2+1}$．由斜率定义公式可得：$k_{OM}=\frac{y_M-0}{x_M-0}=-\frac{1}{2k}$．因此，$k_{OM}\cdot k=-\frac{1}{2}$．即$k_{OM}\cdot k$为定值

（证毕）.

例 20.92 （甲 1570-1）已知椭圆 C ：$9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A ，B ，线段 AB 的中点为 M ．证明：直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值．

证明：设直线 l 的方程为 $y=kx+b$ ，且交于 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,\ y_B)$ 两点，中点为 $M(x_M,y_M)$ ．

∵题设直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，∴ $k\neq 0$，$b\neq 0$ ．

将 $y=kx+b$ 代入 $9x^2+y^2=m^2$ 可得 $(k^2+9)x^2+2kbx+b^2-m^2=0$ ．

由韦达定理可得 $x_A+x_B=-\dfrac{B}{A}=-\dfrac{2kb}{k^2+9}$ ．由中点坐标公式可得 $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=-\dfrac{kb}{k^2+9}$ ．代入直线方程可得 $y_M=kx_M+b=\dfrac{9b}{k^2+9}$ ．由斜率公式可得 $k_{OM}=\dfrac{y_M-0}{x_M-0}=-\dfrac{9}{k}$ ．即 $k_{OM}\cdot k=-9$ ，为定值，证毕．

例 20.93 （丙 1720-2）在直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A ，B 两点，点 C 的坐标为 $(0,1)$ ．当 m 变化时，证明过 A ，B ，C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值．

证明：设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$ 是 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴的两个交点，则由 $x^2+mx-2=0$ 可得：$x_1+x_2=-m$ ，$x_1x_2=-2$ ，且 B，C 的中点坐标为 $\left(\dfrac{x_2}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ ．

∵ $k_{BC}=\dfrac{1-0}{0-x_2}=-\dfrac{1}{x_2}$ ，∴ BC 中垂线的斜率为 x_2 ，因此，BC 中垂线的（点斜式）方程为 $y-\dfrac{1}{2}=x_2\left(x-\dfrac{x_2}{2}\right)$ ．

∵ $x_1+x_2=-m$ ，∴ AB 的中垂线方程为 $x=-\dfrac{m}{2}$ ．

联立 $\begin{cases}x=-\dfrac{m}{2}\\ y-\dfrac{1}{2}=x_2\left(x-\dfrac{x_2}{2}\right)\end{cases}$ ，并运用 $x_2^2+mx_2-2=0$ 可解得：$\begin{cases}x=-\dfrac{m}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ．

所以过 A ，B ，C 三点的圆的圆心坐标为 $\left(-\dfrac{m}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ ，半径 $r=\dfrac{\sqrt{m^2+9}}{2}$ ．

故圆在 y 轴上截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-\left(\dfrac{m}{2}\right)^2}=3$ ，即过 A ，B ，C 三点的圆在 y 轴上截得的弦长为定值．

> **经验总结**：定点、定值问题通常是通过设参数或取特殊值来确定“定点”是什么、“定值”是多少，或者将该问题涉及的几何式转化为代数式或三角问题，证明该式是恒成立的．定点、定值问题同证明问题类似，在求定点、定值之前已知该值的结果，因此求解时应设参数，运用推理，到最后参数必定能统消，定点、定值显现．

例 20.94 （乙 1869-2）设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F ，过 F 的直线 l 与 C 交于 A ，B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$ ．设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$ ．

证明 1：∵题设直线 l 过 F ，∴需要分两种情况进行证明．

①当直线 l 与 x 轴平行（即斜率为 0）时，∵点 $M(2,0)$ 也在 x 轴上，∴ $\angle OMA=\angle OMB=0^\circ$ ．

②当直线 l 与 x 轴不平行（即斜率 $k\neq 0$ ）时，设过右焦点 $F(1,0)$ 的直线 l ：$x=my+1$ 与椭圆交于点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则两交点坐标是椭圆方程与直线方程联立方程组的解．

解$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\x=my+1\end{cases}$可得$\left(m^2+2\right)y^2+2my-1=0$.

$\because \Delta=\left(2m\right)^2+4\left(m^2+2\right)>0$，$\therefore$对任意$m\in\mathbf{R}$都存在两个交点.

由韦达定理可得：$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$.

又$\because k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1-2}$，$k_{BM}=\dfrac{y_2}{x_2-2}$，假设命题成立，则应有$k_{AM}+k_{BM}=0$. 反证法明确证明方向

$\therefore k_{AM}+k_{BM}=\dfrac{y_1}{x_1-2}+\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{y_1}{my_1-1}+\dfrac{y_2}{my_2-1}=\dfrac{y_1\left(my_2-1\right)+y_2\left(my_1-1\right)}{\left(my_1-1\right)\left(my_2-1\right)}=\dfrac{2my_1y_2-\left(y_1+y_2\right)}{\left(my_1-1\right)\left(my_2-1\right)}$.

$\because$目标是证明：$k_{AM}+k_{BM}=0$，$\therefore$只需计算上式的分子.

$\because$已得：$y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$，

$\therefore 2my_1y_2-\left(y_1+y_2\right)=2m\left(-\dfrac{1}{m^2+2}\right)-\left(-\dfrac{2m}{m^2+2}\right)=\dfrac{-2m+2m}{m^2+2}=0$.

即$k_{AM}+k_{BM}=0$得证，亦即$\angle OMA=\angle OMB$成立.

综上所述，原命题得证.

证明 2：设直线方程为$y=k\left(x-1\right)$，代入椭圆公式可得：$x^2+2k^2\left(x-1\right)^2-2=0$，即$\left(1+2k^2\right)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$.

由韦达定理可得：$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$.

又$\because k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{k\left(x_1-1\right)}{x_1-2}$，$k_{BM}=\dfrac{y_2}{x_2-2}=\dfrac{k\left(x_2-1\right)}{x_2-2}$，

$\therefore k_{AM}+k_{BM}=\dfrac{k\left(x_1-1\right)\left(x_2-2\right)+k\left(x_2-1\right)\left(x_1-2\right)}{\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)}=\dfrac{2kx_1x_2-3k\left(x_1+x_2\right)+4k}{\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)}$，

$\because$已得：$x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$，

$\therefore$计算上式分子可得：

$$2kx_1x_2-3k\left(x_1+x_2\right)+4k=k\left[\frac{2\left(2k^2-2\right)}{1+2k^2}-\frac{3\times4k^2}{1+2k^2}+4\right]=k\left(\frac{4k^2-4-12k^2}{1+2k^2}+4\right)=0.$$

即$k_{AM}+k_{BM}=0$得证，亦即$\angle OMA=\angle OMB$成立.

综上所述，原命题得证.

例 20.95（乙 1820-2）设抛物线C：$y^2=2x$，点$A\left(2,0\right)$，$B\left(-2,0\right)$，过点A的直线l与C交于M，N两点．证明：$\angle ABM=\angle ABN$.

证明：当直线l与x轴垂直时，$\because AB$为MN的垂直平分线，$\therefore \angle ABM=\angle ABN$.

当直线l与x轴不垂直时，设直线l的斜率为$k\left(k\neq0\right)$（若$k=0$，则直线l与x轴重合，无两交点），则直线l的方程为$y=k\left(x-2\right)$.

设直线l与抛物线的两交点为$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，则满足方程组$\begin{cases}y=k\left(x-2\right)\\y^2=2x\end{cases}$.

（1）消去y可得：$k^2x^2-\left(4k^2+2\right)x+4k^2=0$，由韦达定理可得：$x_1+x_2=\dfrac{4k^2+2}{k^2}$，$x_1x_2=4$.

又$\because k_{BM}=\dfrac{y_1-0}{x_1+2}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，$k_{BN}=\dfrac{y_2}{x_2+2}$，

$\therefore k_{BM}+k_{BN}=\dfrac{y_1}{x_1+2}+\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{k(x_1-2)(x_2+2)+k(x_2-2)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{k(2x_1x_2-8)}{(x_1+2)(x_2+2)}=0$.

所以直线 BM 与 BN 的倾斜角互补，即 $\angle ABM=\angle ABN$.

（2）消去 x 可得：$ky^2-2y-4k=0$，由韦达定理可得：$y_1+y_2=\dfrac{2}{k}$，$y_1y_2=-4$.

又$\because k_{BM}=\dfrac{y_1-0}{x_1+2}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，$k_{BN}=\dfrac{y_2}{x_2+2}$，

$\therefore k_{BM}+k_{BN}=\dfrac{y_1}{x_1+2}+\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\dfrac{x_2y_1+x_1y_2+2(y_1+y_2)}{(x_1+2)(x_2+2)}$，

将 $x_1=\dfrac{y_1}{k}+2$，$x_2=\dfrac{y_2}{k}+2$ 代入上式分子，并运用 $y_1+y_2=\dfrac{2}{k}$，$y_1y_2=-4$ 可得：$x_2y_1+x_1y_2+2(y_1+y_2)=\dfrac{2y_1y_2+4k(y_1+y_2)}{k}=\dfrac{-8+8}{k}=0$.

所以 $k_{BM}+k_{BN}=0$，即直线 BM 与 BN 的倾斜角互补，即 $\angle ABM=\angle ABN$.

综合上述两种情形，归纳可得：原命题得证.

证明 13.5 证明线段长度成等差数列

例 20.96（丙 1820-2/70-2）已知斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 交于 A，B 两点．线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$．设 F 为 C 的右焦点，P 为 C 上一点，且 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=0$．证明：$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列，并求该数列的公差.

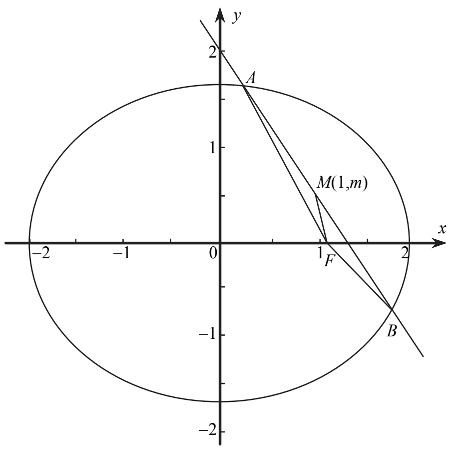


图 20.33

证明：如图 20.33 所示，$\because M(1,m)$ 是 AB 的中点，$\therefore \overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=2\overrightarrow{FM}$.

又$\because$题设：$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=0$，$\therefore \overrightarrow{FP}+2\overrightarrow{FM}=0$，即 $\overrightarrow{FP}=-2\overrightarrow{FM}$，故 $|\overrightarrow{FP}|=2|\overrightarrow{FM}|$.

又$\because a^2=4$，$b^2=3$，$\therefore c^2=a^2-b^2=4-3=1$，$c=1$

又$\because$点 $M(1,m)$，$\therefore MF\perp x$ 轴.

由 $\overrightarrow{FP}=-2\overrightarrow{FM}$ 可得：$P(1,-2m)$ 在椭圆上，即 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{4m^2}{3}=1$，

解得：$m=\dfrac{3}{4}$，　$\because$题设 $m>0$，$\therefore$舍负取正

代入（丙 1820-1/70-1）中的 $k=-\dfrac{3}{4m}$ 可得：$k=-1$.

因此，直线 l 的方程为 $y-\dfrac{3}{4}=-(x-1)$，即 $y=-x+\dfrac{7}{4}$.

解 $\begin{cases} y=-x+\dfrac{7}{4} \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 可得：$28x^2-56x+1=0$.

由韦达定理可得：$x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}=-\dfrac{-56}{28}=2$，　①

$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} = \frac{1}{28}$ ②

∵ $F(1,0)$，∴由勾股定理可得：$|FA|^2 = (1-x_1)^2 + y_1^2$，并运用 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$ 消去 y_1^2 可得：$\frac{|FA|^2}{3} = \frac{1}{3}(1-x_1)^2 + 1 - \frac{1}{4}x_1^2$，即 $4|FA|^2 = 4(1-x_1)^2 + 12 - 3x_1^2$，亦即 $4|FA|^2 = x_1^2 - 8x_1 + 16 = (x_1-4)^2$，从而 $|FA| = \frac{1}{2}(4-x_1) = 2 - \frac{1}{2}x_1$. ③

同理可得：$|FB|^2 = (x_2-1)^2 + y_2^2$，并运用 $\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$ 消去 y_1^2 可得：$\frac{|FB|^2}{3} = \frac{1}{3}(x_2-1)^2 + 1 - \frac{1}{4}x_2^2$，即 $4|FB|^2 = 4(x_2-1)^2 + 12 - 3x_2^2$，亦即 $4|FB|^2 = x_2^2 - 8x_2 + 16 = (x_2-4)^2$，从而 $|FB| = \frac{1}{2}(4-x_2) = 2 - \frac{1}{2}x_2$ ④

因此，$|FA| + |FB| = 4 - \frac{1}{2}(x_1+x_2) = 4 - \frac{1}{2}\times 2 = 3$.

又∵ $F(1,0)$，$P(1,-2m) = P\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ 已求得：$m=\frac{3}{4}$

∴由两点间距离公式可得：$|FP| = \sqrt{(1-1)^2 + \left(-\frac{3}{2}-0\right)^2} = \frac{3}{2}$.

即 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| = 2|\overrightarrow{FP}|$ 得证. 因此，$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$ 成等差数列.

又∵由等差数列定义可得：$2d = |FB| - |FA|$，将③④两式代入可得：$2d = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$.

如图 20.32 所示，若 $|FA| > |FB|$，即 $x_1 < x_2$，则 $d<0$. 亦即：

$d = \frac{1}{4}(x_1-x_2) = -\frac{1}{4}\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = -\frac{1}{4}\sqrt{2^2 - \frac{1}{7}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{7}} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} = -\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

反之，若两点对调，则 $d = \frac{3\sqrt{21}}{28}$，故 $d = \pm\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

问题 14 探究性问题

探究 14.1 探究“交点数量”问题

探究分析：探究“交点数量”问题一般可以通过解方程组求出所有可能的交点，然后进行讨论.

例 20.97（乙 1620-2）在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l：$y=t(t\neq 0)$ 交 y 轴于点 M，交抛物线 C：$y^2 = 2px(p>0)$ 于点 P，M 关于 P 的对称点为 N，连接 ON 并延长交 C 于点 H 使 $\frac{|OH|}{|ON|}=2$，除 H 以外，直线 MH 与 C 是否还有其他公共点？说明理由.

解析：为了探究直线 MH 与 C 的交点，所以需要确定 MH 的直线方程.

∵ $k_{MH} = \frac{y_H - y_M}{x_H - x_M} = \frac{2t-t}{\frac{2t^2}{p}-0} = \frac{p}{2t}$，∴ MH 所在直线方程为 $y - t = \frac{p}{2t}(x-0)$，即 $x = \frac{2t}{p}(y-t)$，代入 $y^2 = 2px$ 可得：$y^2 - 4ty + 4t^2 = 0$，解得：$y_1 = y_2 = 2t$.

即直线 MH 与 $y^2 = 2px$ 只有一个（公共）交点，且交点的纵坐标为 $2t$，因此，这个公共交点与 $H\left(\frac{2t^2}{p}, 2t\right)$

重合，所以，除 H 以外，直线 MH 与曲线 C 没有其他公共点.

探究 14.2　探究“线线垂直”问题

例 20.98 （丙 1720-1）在直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴交于 A，B 两点，点 C 的坐标为 $(0,1)$．当 m 变化时，能否出现 $AC\perp BC$ 的情况？说明理由.

解析：设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，则 x_1，x_2 满足 $x^2+mx-2=0$，所以由韦达定理可得：$x_1x_2=-2$.

又∵ C 的坐标为 $(0,1)$，∴ AC 的斜率与 BC 的斜率之积为 $\dfrac{-1}{x_1}\cdot\dfrac{-1}{x_2}=-\dfrac{1}{2}\neq-1$，所以不能出现 $AC\perp BC$ 的情况.

探究 14.3　探究“是否存在”问题

探究分析：探究“是否存在”问题一般都是假设“存在”，进而推出“符合”或“否定”条件的结果来进行探究.

例 20.99 （乙 1570-2）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C：$y=\dfrac{x^2}{4}$ 与直线 $y=kx+a(a>0)$ 交于 M，N 两点．y 轴上是否存在点 P，使得当 k 变动时，总有 $\angle OPM=\angle OPN$？说明理由.

解析：假设存在点 $P(0,b)$ 符合题意，且设直线 $y=kx+a(a>0)$ 与曲线 C：$y=\dfrac{x^2}{4}$ 交于 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 PM，PN 的斜率分别为 k_1，k_2.

将直线 $y=kx+a(a>0)$ 代入 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 可得：$x^2-4kx-4a=0$.

由韦达定理可得：$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4a$.

又∵ $k_1=\dfrac{y_1-b}{x_1-0}=\dfrac{kx_1+a-b}{x_1}$，$k_2=\dfrac{y_2-b}{x_2-0}=\dfrac{kx_2+a-b}{x_2}$.

∴ $k_1+k_2=\dfrac{2kx_1x_2+(a-b)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{-8ka+4k(a-b)}{-4a}=\dfrac{a+b}{a}k$.

当 $b=-a$ 时，$k_1+k_2=0$，直线 PM 的倾斜角与直线 PN 的倾斜角互补，即 $\angle OPM=\angle OPN$.

探究 14.4　探究“可能图形”问题

探究分析：探究“可能图形”问题一般都假设“可能图形”是存在的，进而根据“可能图形”存在的充要条件推出“符合”或“否定”条件的结果来加以论证，这与探究“是否存在”的思路基本是一致的.

例 20.100 （甲 1570-2）已知椭圆 C：$9x^2+y^2=m^2(m>0)$，直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，l 与 C 有两个交点 A，B，线段 AB 的中点为 M．若 l 过点 $\left(\dfrac{m}{3},m\right)$，延长线段 OM 与 C 交于点 P，四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形？若能，求此时 l 的斜率；若不能，说明理由.

解析：∵ l 过点 $\left(\dfrac{m}{3},m\right)$，∴代入直线 l 的方程 $y=kx+b$ 可得：$m=\dfrac{km}{3}+b$．即 $\left(1-\dfrac{k}{3}\right)m=b$.

∵题设直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴，即 $k\neq0$，$b\neq0$，且题设 $m>0$，

∴由 $\left(1-\dfrac{k}{3}\right)m=b$ 可见：$k\neq3$，且当 $k\in(3,+\infty)$ 时，$b<0$；当 $k\in(-\infty,3)$ 时，$b>0$.

∵延长线段 OM 与 C 交于点 P，∴设 $P(x_P,y_P)$，且 OP 的中点为 $N(x_N,y_N)$.

$\because k_{OM}=-\dfrac{9}{k}$，$\therefore OM$ 所在直线的方程为 $y=-\dfrac{9}{k}x$，代入 $9x^2+y^2=m^2$ 可得：$x^2=\dfrac{m^2k^2}{9\left(k^2+9\right)}$，解得：$x_P=\pm\dfrac{mk}{3\sqrt{k^2+9}}$（$k$ 可正可负），因此 $x_N=\pm\dfrac{mk}{6\sqrt{k^2+9}}$.

将点 $\left(\dfrac{m}{3},m\right)$ 代入 $y=kx+b$ 可得：$b=\dfrac{m(3-k)}{3}$，代入（甲 1570-1）中的 $x_M=-\dfrac{kb}{k^2+9}$ 可得：$x_M=-\dfrac{m(3-k)k}{3\left(k^2+9\right)}$.

四边形 $OAPB$ 成为平行四边形的充要条件是 $x_M=x_N$，即 $\dfrac{(k-3)mk}{3\left(k^2+9\right)}=\pm\dfrac{mk}{6\sqrt{k^2+9}}$，亦即 $2(k-3)=\pm\sqrt{k^2+9}$，两边平方可得：$3k^2-24k+27=0$，解得：$k_1=4-\sqrt{7}$，$k_2=4+\sqrt{7}$.

因此，当 $k_1=4-\sqrt{7}$，$k_2=4+\sqrt{7}$ 时，四边形 $OAPB$ 能成为平行四边形.

第 21 题　导数应用背景

21

背景知识

函数的平均变化率：如果函数 $y=f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的变化是从 $f(x_1)$ 到 $f(x_2)$，那么我们把 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 称为函数 $y=f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率．令 $\Delta x=x_2-x_1$，且 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$，则函数 $y=f(x)$ 的平均变化率可以表示为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$．

导数的定义：设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定义，且从 $x=x_0$ 到 $x'=x_0+\Delta x$ 的变化为 Δy，如果 $\Delta x\to 0$ 时，函数的平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋于某个常数，我们把这个极限值称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$．

导数的几何意义：函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$，表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率．如果该切线的倾斜角为 α，那么切线斜率为 $k=\tan\alpha=f'(x_0)$．

复合函数及其导数：一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，如果通过（中间）变量 u，y 可以表示成 x 的函数 $y=F(x)$，那么称函数 $y=F(x)$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，记作 $y=f(g(x))$．复合函数的求导法则为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积．

函数单调性与导数的关系：在某一区间上，若 $f'(x)>0$，则函数在该区间内单调递增；若 $f'(x)<0$，则函数在该区间内单调递减；若 $f'(x)=0$，则函数在该区间内为常数函数．

函数极值与导数的关系：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续且可导，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧单调递增，在点 x_0 的右侧单调递减，即 $f'(x)>0(x<x_0)$，$f'(x)<0(x>x_0)$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$．反之，若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧单调递减，在点 x_0 的右侧单调递增，即 $f'(x)<0(x<x_0)$，$f'(x)>0(x>x_0)$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$．

问题 1　求函数的导数

问题分析：求函数的导数最基本的方法是利用已知函数的导数进行求解.

条件 1.1　给定三角函数的复合函数解析式

条件分析：当给定三角函数的复合函数解析式时，既可以利用三角函数的导数进行求解，也可以利用

复合函数的导数计算方法进行求解.

例 21.1 （丙 1671-1）设函数 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$，其中 $a>0$，求 $f'(x)$.

解析 1：∵题设 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)=a(1-2\sin x\cdot\sin x)+(a-1)(\cos x+1)$，

∴利用 $(uv)'=u'v+v'u$ 可得：当 $u=v$ 时，$(u^2)'=2uu'$.

$$f'(x)=a(1-2\sin x\cdot\sin x)'_x+(a-1)(\cos x)'_x=-2a(\sin x\cos x+\cos x\sin x)-(a-1)\sin x$$
$$=-2a(2\sin x\cos x)-(a-1)\sin x=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x.$$

解析 2：∵题设 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$，

∴ $f'(x)=a(\cos 2x)'_{2x}\cdot(2x)'_x+(a-1)(\cos x+1)'_x$　　先对 $2x$ 求导，再对 x 求导

$=a(-\sin 2x)\times 2+(a-1)(-\sin x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$.

解析 3：∵题设 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)=a(2\cos^2 x-1)+(a-1)(\cos x+1)$，

∴ $f'(x)=a(2\cos^2 x-1)'_{\cos x}\cdot(\cos x)'_x+(a-1)(\cos x+1)'_{\cos x}\cdot(\cos x)'_x$　　先对 $\cos x$ 求导，再对 x 求导

$=a\times 2\times 2\cos x(-\sin x)+(a-1)\times 1\times(-\sin x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$.

经验总结：比较三种解析法我们可以发现：① 解析 1 运用了乘积函数的求导方法和正弦函数的导数；② 解析 2 运用了余弦函数的求导公式并将“$2x$”作为复合函数的“中间函数”；③ 解析 3 将“$\cos x$”作为中间函数并运用了余弦函数的求导公式.

问题 2 求函数的切线方程

问题分析：求函数的切线方程关键是确定切线通过的定点和切线的斜率.

条件 2.1　给定函数解析式及切点横坐标

条件分析：当给定函数解析式及切点横坐标时，可先将切点横坐标代入函数解析式求出切点纵坐标，然后再对函数解析式求导，并将切点横坐标代入“导函数”求出切点处的斜率，最后利用直线的点斜式方程求得函数在该点处的切线方程.

例 21.2 （甲 1620-1）已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$. 当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程.

解析：∵ $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$，∴当 $a=4$ 时，$f(x)=(x+1)\ln x-4(x-1)$，

显然，当 $x=1$ 时，$f(1)=0$，因此，问题转化为求曲线在 $(1,0)$ 处的切线.

∵ $f(x)=(x+1)\ln x-4(x-1)$，

∴ $f'(x)=(x+1)'\ln x+(x+1)(\ln x)'-4(x-1)'=\ln x+\dfrac{x+1}{x}-4=\ln x+\dfrac{1}{x}-3$，即 $f'(1)=-2$.

因此，曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 即 $(1,0)$ 处的切线（点斜式）方程为 $y-0=-2(x-1)$，

即 $2x+y-2=0$.

例 21.3 （丙 1821-1）已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{e^x}$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程.

解析：∵ $f'(x)=\dfrac{-ax^2+(2a-1)x+2}{e^x}$，∴ $f'(0)=2$.

因此曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线（点斜式）方程是 $y+1=2(x-0)$，即 $2x-y-1=0$.

问题 3 求含参函数的参数取值

问题分析：求含参函数的参数取值的关键是利用题设列关于参数的方程，并进行求解.

条件 3.1　给定含参函数在曲线上某点的切线的斜率

条件分析：当给定含参函数在曲线上某点的切线的斜率时，可先对含参函数进行求导，并将切点横坐标代入“导函数”获得用参数表示的切点斜率表达式，然后利用题设斜率列关于参数的方程，最后通过解关于参数的方程求出参数取值.

例 21.4（乙 1421-1）设函数 $f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-bx(a\neq1)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 0，求 b.

解析：$\because f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-bx$，$\therefore f'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-b$.

$\because$ 题设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 0，$\therefore f'(1)=0$.

即 $\frac{a}{1}+(1-a)\times1-b=0$，解得：$b=1$.

条件 3.2　给定含参函数在曲线上某点的切线方程

条件分析：当给定含参函数在曲线上某点的切线方程时，需要利用“切线与曲线在切点的函数值相等”与“曲线在切点的导数值等于切线的斜率”两个条件列方程进行求解.

例 21.5（乙 1471-1）设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 $y=e(x-1)+2$. 求 a，b.

解析：$\because f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，　零和负数无对数

且 $f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}e^x-\frac{b}{x^2}e^{x-1}+\frac{b}{x}e^{x-1}$.

$\because$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 $y=e(x-1)+2$，$\therefore f(1)=2$，且 $f'(1)=e$.

又 $\because f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$，$\therefore$ 由 $f(1)=2$ 可得：$ae^1\ln1+\frac{be^{1-1}}{1}=2$，解得：$b=2$.

又 $\because f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}e^x-\frac{b}{x^2}e^{x-1}+\frac{b}{x}e^{x-1}$，$\therefore$ 由 $f'(1)=e$ 可得：$ae^1\ln1+\frac{a}{1}e^1=e$，解得：$a=1$.

例 21.6（乙 1320-1）已知函数 $f(x)=e^x(ax+b)-x^2-4x$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=4x+4$，求 a，b 的值.

解析：$\because$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=4x+4$，$\therefore (0,f(0))$ 点在 $y=4x+4$ 上，即 $f(0)=4\times0+4=4$，且切线的斜率为 $f'(0)=4$.

$\because f(x)=e^x(ax+b)-x^2-4x$，$\therefore f(0)=e^0(a\times0+b)-0^2-4\times0=4$，解得 $b=4$.

$f'(x)=e^x(ax+b)'+(e^x)'(ax+b)-2x-4=e^x(ax+a+b)-2x-4$，由 $f'(0)=4$ 可得：$(a+b)-4=4$，将 $b=4$ 代入可解得：$a=4$. 因此，$a=b=4$.

条件 3.3　给定含参函数在曲线上某点的切线方程的其他条件

条件分析：当给定含参函数在曲线上某点的切线方程的其他条件时，需要先将参数视为“常数”求出

含有参数的切线方程，然后再利用切线方程的其他条件求出参数.

例 21.7 （甲 1421-1）已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 -2，求 a.

解析：$\because f(x)=x^3-3x^2+ax+2$，$\therefore f'(x)=3x^2-6x+a$，$f'(0)=a$.

因此，曲线在点 $(0,2)$ 处的切线方程为 $y-2=ax$. 又$\because$切线与 x 轴交点的横坐标为 -2，纵坐标为 0，

$\therefore$将 $x=-2$，$y=0$ 代入切线方程 $y-2=ax$ 可得：$a=1$.

或者由切点 $(0,2)$ 与交点 $(-2,0)$ 直接计算斜率可得：$a=\dfrac{0-2}{-2-0}=1$.

例 21.8 （乙 1371-1）已知函数 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=e^x(cx+d)$，若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P(0,2)$，且在点 P 处有相同的切线 $y=4x+2$. 求 a，b，c，d 的值.

解析：$\because$ 题设曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 都过点 $P(0,2)$，

$\therefore$由 $f(0)=2$ 可得：$b=2$；由 $g(0)=2$ 可得：$d=2$.

又$\because$曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 在点 $P(0,2)$ 处有相同的切线 $y=4x+2$.

$\therefore$由 $f'(0)=4$ 可得：$a=4$；由 $g'(0)=4$ 可得：$d+c=4$，解得：$c=2$. 因此，$a=4$，$b=c=d=2$.

条件 3.4　给定含参函数的切线方程

条件分析：当给定含参函数的切线方程时，往往先设切点坐标，再利用切点的导数与切线的斜率相等列方程，最后结合切点满足含参函数方程列方程组进行求解.

例 21.9 （乙 1571-1）已知函数 $f(x)=x^3+ax+\dfrac{1}{4}$，当 a 为何值时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线.

解析：设曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴切于 $(x_0,0)$，则 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=0$.　方程思想

$\because f(x)=x^3+ax+\dfrac{1}{4}$，$\therefore f'(x)=3x^2+a$，解 $\begin{cases} x_0^3+ax_0+\dfrac{1}{4}=0 \\ 3x_0^2+a=0 \end{cases}$ 可得：$x_0=\dfrac{1}{2}$，$a=-\dfrac{3}{4}$.

即当 $a=-\dfrac{3}{4}$ 时，x 轴为曲线 $y=f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 处的切线.

条件 3.5　给定含参函数的极值点

条件分析：当给定含参函数的极值点时，往往需要利用极值点的导数为 0 来列出关于参数的方程，进而通过解方程求出参数.

例 21.10 （甲 1371-1）已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$，设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性.

解析：$\because f(x)=e^x-\ln(x+m)$，$\therefore f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+m}$.

$\because$题设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，$\therefore f'(0)=0$.

将 $x=0$ 代入 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+m}$ 可得：$e^0-\dfrac{1}{0+m}=0$，解得：$m=1$.

所以，$f(x)=e^x-\ln(x+1)$. $\because$零和负数无对数，$\therefore x+1>0$，即函数的定义域为 $(-1,+\infty)$.

为讨论 $f(x)$ 的单调性，需研究 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{e^x(x+1)-1}{x+1}$.

$\because$题设 $x+1>0$，$\therefore$只需关注：$e^x(x+1)-1$.

因此，令 $g(x)=\mathrm{e}^x(x+1)-1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x(x+1)+\mathrm{e}^x>0$.　　$x+1>0$

所以 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

又∵ $g(0)=0$，∴当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减；

当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

例 21.11（乙 1821-1）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x-1$. 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点. 求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间.

解析：∵题设 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x-1$，∴函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.　　零和负数无对数

∵题设设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点. ∴ $f'(2)=0$　　据此列关于参数 a 的方程

又∵ $f'(x)=a\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$，∴由 $f'(2)=0$ 可得：$a\mathrm{e}^2-\dfrac{1}{2}=0$，解得：$a=\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$.

将 $a=\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}$ 代入 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x-1$ 可得：$f(x)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x-\ln x-1$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{2\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x-2}-\dfrac{2}{x}\right)$.

显然，当 $x=2$ 时，$f'(x)=0$；当 $0<x<2$ 时，$x-2<0$，$\mathrm{e}^{x-2}<1$，$\dfrac{2}{x}>1$，故 $f'(x)<0$；

当 $x>2$ 时，$\mathrm{e}^{x-2}>1$，$\dfrac{2}{x}<1$，故 $f'(x)>0$.

因此，函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增.

例 21.12（丙 1871-2）已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a.

解析 1：（分析法）

∵题设 $x=0$ 是函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$ 的极大值点，∴想到利用极点的导数为零列关于参数 a 的方程.

因此，先求导数：$f'(x)=(1+2ax)\ln(1+x)+\dfrac{(2+x+ax^2)}{1+x}-2$.

∵ $f'(0)\equiv0$，∴无法直接列方程求解.

对函数二次求导可得：$f''(x)=2a\ln(x+1)+\dfrac{x(3ax+4a+1)}{(x+1)^2}$，且 $f''(0)\equiv0$.

三次求导可得：$f'''(x)=\dfrac{2ax^2+(6a-1)x+6a+1}{(x+1)^3}$，解 $f'''(0)=0$ 可得：$a=-\dfrac{1}{6}$.

以下证明：当 $a=-\dfrac{1}{6}$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

∵当 $a=-\dfrac{1}{6}$ 时，$f'''(x)=-\dfrac{x(x+6)}{3(x+1)^3}$，∴当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'''(x)>0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'''(x)<0$.

即 $f''(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又∵ $f''(0)\equiv0$，∴ $f''(x)\leqslant0$，从而 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减.

又∵ $f'(0)\equiv0$，∴当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$.

即 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. 因此，$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

拓展知识：本解析方法运用了极大值点的第二充要条件：已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处各阶导数都存在且连续，$x=x_0$ 是函数的极大值点的一个充要条件是前 $2n-1$ 阶导数等于 0，第 $2n$ 阶导数小于 0.

解析 2：（参变分离法）

∵题设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，且 $f'(x)=(1+2ax)\ln(x+1)+\dfrac{(2+x+ax^2)}{x+1}-2$，$f'(0)\equiv0$，

$\therefore$存在充分接近于0的$\delta>0$，使得当$x\in(-\delta,0)$时，$f'(x)>0$，当$x\in(0,+\delta)$时，$f'(x)<0$.

将$f'(x)$中的a分离出来可得：$f'(x)=\left[2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}\right]a+\ln(x+1)+\dfrac{2+2x-x}{x+1}-2$，

即$f'(x)=\left[2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}\right]a+\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$.

$\because$当$x\in(-1,+\infty)$时，$x+1>0$，$2x\ln(x+1)>0$，$\therefore a$的系数$2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}>0$.

① 当$x\in(-\delta,0)$时，由$f'(x)>0$可得：$\left[2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}\right]a+\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}>0$，

即$a>\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}}$.

当$\delta\to0^+$时，

$$a\geqslant\lim_{x\to0^-}\frac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{2x\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{x+1}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\left[\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)\right]'}{\left[2x\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{x+1}\right]'}=\lim_{x\to0^-}\frac{\left[\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2-\dfrac{1}{1+x}\right]}{\left[2\ln(1+x)+\dfrac{2x}{1+x}+\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}\right]}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{2(x+1)^2\ln(x+1)+3x^2+4x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-1}{4(x+1)\ln(x+1)+2(x+1)+6x+4}=-\frac{1}{6},$$

②当$x\in(0,\delta)$时，由$f'(x)<0$可得：$\left[2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}\right]a+\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}<0$，

即$a<\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{2x\ln(x+1)+\dfrac{x^2}{x+1}}$.

当$\delta\to0^+$时，

$$a\leqslant\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)}{2x\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{x+1}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left[\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)\right]'}{\left[2x\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{x+1}\right]'}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left[\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2-\dfrac{1}{1+x}\right]}{\left[2\ln(1+x)+\dfrac{2x}{1+x}+\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}\right]}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{2(x+1)^2\ln(x+1)+3x^2+4x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{4(x+1)\ln(x+1)+2(x+1)+6x+4}=-\frac{1}{6},$$

综合①②可得：$a=-\dfrac{1}{6}$.

拓展知识：本题解析极限的计算运用了洛必达法则.

条件 3.6 给定含参函数不等式

条件分析：当给定含参函数不等式时，往往需要对这个含有参数的不等式进行研究和讨论.

例 21.13 （甲 1771-1）已知函数$f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且$f(x)\geqslant0$，求a.

解析：（参变分离，方程思想）

$\because$题设$f(x)=ax^2-ax-x\ln x=x(ax-a-\ln x)$，

从题设条件出发先确定函数定义域

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$\because$ 题设 $f(x)\geqslant 0$，即 $x(ax-a-\ln x)\geqslant 0$，　　从题设条件出发，列出函数不等式

又函数定义域为 $(0,+\infty)$，　　利用函数定义域列式

$\therefore$ 只需得出 $ax-a-\ln x\geqslant 0$ 即可.　　借助因式分解发现新的目标条件

①当 $a\leqslant 0$ 时，$\forall x>1$，$x-1>0,\ln x>0$，$ax-a-\ln x=a(x-1)-\ln x<0$，结论不成立.

②当 $a>0$ 时，令 $g(x)=ax-a-\ln x$，　　构造目标函数

则 $g'(x)=a-\dfrac{1}{x}$.　　求导研究单调性

令 $g'(x)=a-\dfrac{1}{x}=0$ 可得：$x=\dfrac{1}{a}$.　　求极点横坐标值

$\because$ 当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，　　确定函数先递减后递增

$\therefore g_{\min}(x)=g\left(\dfrac{1}{a}\right)$.　　极小值点的纵坐标即最小值

又 $\because$ 题设 $f(x)\geqslant 0$，$\therefore$ 需要 $g(x)\geqslant 0$，

为确保 $g(x)\geqslant 0$，令 $g\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$ 可得：$1-a-\ln\dfrac{1}{a}=0$，　　列极值方程

即 $\ln a=a-1$，解得：$a=1$.　　观察可得 a 的值

例 21.14　（丙 1771-1）已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$，若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的值.

解析： $\because$ 题设函数 $f(x)=x-1-a\ln x$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

①若 $a\leqslant 0$，知 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+a\ln 2<0$，不满足 $f(x)\geqslant 0$，　　检验思想：特殊值法

②若 $a>0$，由 $f'(x)=1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x-a}{x}$ 可知：

当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

故当 $x=a$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上取得唯一最小值 $f(a)$.　　数形结合：确定函数最值

$\because f(a)=a-1-a\ln a$，

$\therefore$ 当且仅当 $a=1$ 时，$f(a)=f(1)=0$，　　特殊值法

且 $f(x)\geqslant f(a)=0$，故满足 $f(x)\geqslant 0$ 条件的 $a=1$.

例 21.15　（甲 1871-2）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2$．若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点，求 a.

分析： $\because$ 题设 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax^2=\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{ax^2}{\mathrm{e}^2}\right)=x^2\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}-a\right)$，　　将 $f(x)$ 中不等于 0 的部分提取出来

$\therefore$ 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点，则只需 $g(x)=1-\dfrac{ax^2}{\mathrm{e}^x}$ 或 $h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}-a$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点即可.

解析 1： 由 $g(x)=1-\dfrac{ax^2}{\mathrm{e}^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点可作如下分析：

①当 $a<0$ 时，$g(x)=1-\dfrac{ax^2}{\mathrm{e}^x}>1$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点；

②当 $a=0$ 时，$g(x)=1$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点；

③当$a>0$时，$g(x)=1-\frac{ax^2}{e^x}$，$g'(x)=-\frac{a(2xe^x-e^x x^2)}{e^{2x}}=-\frac{ax(2-x)}{e^x}$.

当$x\in(0,2)$时，$g'(x)<0$，当$x\in(2,+\infty)$时，$g'(x)>0$. 即$g(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，因此，$g_{\max}(x)=g(2)=1-\frac{4a}{e^2}$.

由题意可知：仅当$g_{\max}(x)=g(2)=1-\frac{4a}{e^2}=0$时，

事实上，由$G_{\max}(x)=0$亦可求唯一零点

$g(x)=1-\frac{ax^2}{e^x}$在$(0,+\infty)$只有一个零点，解得：$a=\frac{e^2}{4}$.

评分标准是按照$g(2)>0$，$g(2)=0$和$g(2)<0$分别求解a的取值范围，并对零点的数量进行讨论后归纳得出只存在一个零点时a的取值范围.

解析 2：由$h(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$在$(0,+\infty)$上只有一个零点可作如下分析：

$\because h'(x)=\frac{e^x x^2-2xe^x}{x^4}=\frac{x(x-2)e^x}{x^4}$，当$0<x<2$时，$h'(x)<0$；当$x>2$时，$h'(x)>0$.

即$h(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增.

$\therefore$唯一零点是$h_{\min}(x)=h(2)=0$，即$\frac{e^2}{2^2}-a=0$，解得：$a=\frac{e^2}{4}$.

经验总结：当遇到函数存在零点条件时，可以将函数中不为 0 的部分先提取出来，然后转化为剩余部分存在零点的问题.

问题 4 讨论函数的单调性

问题分析：讨论函数的单调性主要是研究函数值随自变量的变化趋势，常用的方法是先求函数的导数，再通过研究导数的正负来确定函数的单调性.

条件 4.1 给定无参超越函数解析式

条件分析：高中期间遇到的“超越函数”是指由指数函数、对数函数或三角函数等初等函数与二次函数组合而成的函数，通常在超越函数解析式中至少应包含e^x，$\ln x$，$\sin x$，$\cos x$，$\tan x$之一，并与Ax^2+Bx+c进行加减或乘除运算.

例 21.16 （甲 1721-1）设函数$f(x)=(1-x^2)e^x$，讨论$f(x)$的单调性.

解析：$\because f(x)=(1-x^2)e^x$，

$\therefore$函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$， 首先明确函数定义域

且$f'(x)=-2xe^x+(1-x^2)e^x=(-x^2-2x+1)e^x$. 函数求导研究单调性

$\because e^x>0$，$\therefore f'(x)$的正负与$g(x)=-x^2-2x+1$的正负一致. 观察函数式，发现新目标

$\because g(x)=-x^2-2x+1$是一个开口向下的抛物线， 研究新目标

$\therefore$令$g(x)=0$可得：$-x^2-2x+1=0$， 设函数零点方程

解得：$x_1=-1-\sqrt{2}$，$x_2=-1+\sqrt{2}$. 求零点

当$x\in(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},+\infty)$时，$f'(x)<0$； 利用函数零点确定导函数正负

当 $x\in\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$． 利用导函数的正负确定函数单调性

因此，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)$ 和 $\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$ 上单调递减，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}\right)$ 上单调递增．

例 21.17 （丙 1621-1）设函数 $f(x)=\ln x-x+1$，讨论 $f(x)$ 的单调性．

解析： $\because f(x)=\ln x-x+1$，$\therefore$ 函数的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$．

当 $0<x<1$ 时，$\dfrac{1}{x}>1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1>0$，函数单调递增；

当 $1<x<+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}<1$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1<0$，函数单调递减．

例 21.18 （甲 1471-1）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$，讨论 $f(x)$ 的单调性．

解析： $\because f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，且

$f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2=\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}-2\geqslant 2\sqrt{\mathrm{e}^x\cdot\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}-2=0$（注意：$\mathrm{e}^x>0$），$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．

经验总结： 当遇到 $A^2+\dfrac{1}{A^2}$ 时，要能迅速想到并运用不等式 $A^2+\dfrac{1}{A^2}\geqslant 2A\times\dfrac{1}{A}=2$．

例 21.19 （乙 1320-2）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(4x+4)-x^2-4x$，讨论 $f(x)$ 的单调性，并求 $f(x)$ 的极大值．

解析： $\because$ 题设 $f(x)=\mathrm{e}^x(4x+4)-x^2-4x$，$f'(x)=\mathrm{e}^x(4x+4)+\mathrm{e}^x\cdot 4-2x-4$，$\therefore f'(x)=(x+2)\left(4\mathrm{e}^x-2\right)$．

令 $f'(x)=0$ 可解得：$x_1=-2$，$x_2=-\ln 2>\ln\mathrm{e}^{-2}=-2$，所以，当 x 变化时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化如表 21.1 所示．

表 21.1

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-\ln 2)$	$-\ln 2$	$(-\ln 2,+\infty)$
$f'(x)$	>0	$=0$	<0	$=0$	>0
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,-\ln 2)$ 上单调递减．当 $x=-2$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值，且极大值为 $f(-2)=4\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$．

例 21.20 （甲 1671-1）讨论函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x$ 的单调性，并证明当 $x>0$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0$．

解析： $\because f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x$，$\therefore$ 函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$，

且 $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2)\mathrm{e}^x-(x-2)\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\geqslant 0$．

当且仅当 $x=0$ 时，$f'(x)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 上单调递增．

分析 $(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0$ 可得：$(x-2)\mathrm{e}^x>-(x+2)$．

$\because x>0$，$\therefore x+2>0$，故两边同除以 $x+2$ 可得：$\dfrac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x>-1$，即 $f(x)>-1$．

因此，问题转化为证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>-1$．

又 $\because f(0)=-1$，$\therefore$ 问题进一步转化为证明：当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，至此发现可以利用函数的单调性进行证明．

∵函数$f(x)$在$(-\infty,-2)$和$(-2,+\infty)$上单调递增，∴当$x>0$时，$f(x)>f(0)$，即有$(x-2)e^x+x+2>0$.

例 21.21 （甲 1821-1）已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$. 若$a=3$，求$f(x)$的单调区间.

解析：∵题设$f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$，∴当$a=3$时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2-3x-3$.

又∵$f'(x)=x^2-6x-3$，

为了研究函数的单调性，可以先对函数进行求导

∴令$f'(x)=0$，解$x^2-6x-3=0$可得：$x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times(-3)}}{2}=3\pm2\sqrt{3}$.

将$f'(x)=x^2-6x-3$看成开口向上的抛物线，则当$x\in(-\infty,3-2\sqrt{3})\cup(3+2\sqrt{3},+\infty)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3})$时，$f'(x)<0$.

因此，$f(x)$在$(-\infty,3-2\sqrt{3})$上单调递增，在$(3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3})$上单调递减，在$(3+2\sqrt{3},+\infty)$上单调递增.

条件 4.2　给定含参的超越函数解析式

条件分析：对于给定含有参数的超越函数，在对其导数的正负进行判断的过程中，由于参数的存在，需要对参数进行分“类”讨论，分“类”的点一般都是会影响导数正负的临界值.

例 21.22 （甲 1521-1）已知$f(x)=\ln x+a(1-x)$，讨论$f(x)$的单调性.

解析：∵题设$f(x)=\ln x+a(1-x)$，∴$f(x)=\ln x+a(1-x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

若$a\leqslant0$，则$f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$，即$f(x)=\ln x+a(1-x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

若$a>0$，则当$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)>0$. 当$x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$.

因此，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减.

例 21.23 （丙 1721-1）已知函数$f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$，讨论$f(x)$的单调性.

解析：∵已知函数$f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$，

∴函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+2a+1=\frac{(x+1)(2ax+1)}{x}$.

∵$x>0$

函数的定义域

∴$f'(x)$的正负与$2ax+1$一致.

若$a\geqslant0$，则当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

若$a<0$，则当$x\in\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$时，$f'(x)>0$；当$x\in\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$.

故$f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$上单调递增，在$\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单调递减.

例 21.24 （乙 1721-1）已知函数$f(x)=e^x(e^x-a)-a^2x$，讨论$f(x)$的单调性.

解析：∵已知函数$f(x)=e^x(e^x-a)-a^2x$，

目标意识：从题设条件出发

∴函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，

条件意识：明确函数定义域，挖掘隐含条件

且$f'(x)=2e^{2x}-ae^x-a^2$

问题意识：选择方法

$=(2e^x+a)(e^x-a)$，

转化思想：因式分解

由于$f'(x)$的正负不仅与x有关，而且与参数a有关.

函数思想：对参数分段讨论

① 若 $a=0$，则 $f'(x)=2e^{2x}>0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.　应用意识：导数应用

② 若 $a>0$，$f'(x)=(2e^x+a)(e^x-a)$，　分类思想：分“项”讨论

$\because 2e^{2x}+a>0$，$\therefore f'(x)$ 的正负与 (e^x-a) 一致.　转化思想：问题转化

由 $f'(x)=0$ 可得：$x=\ln a$.　方程思想：求出“零点”

即当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$\because (e^x-a)<0$，$\therefore f'(x)<0$；

当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$\because (e^x-a)>0$，$\therefore f'(x)>0$.　分类思想：分段讨论

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增.　归纳思想：归纳函数单调性

③ 若 $a<0$，$f'(x)=(2e^x+a)(e^x-a)$，　分类思想：分“项”讨论

$\because (e^x-a)>0$，$\therefore f'(x)$ 的正负与 $(2e^x+a)$ 一致.　转化思想：问题转化

由 $f'(x)=0$ 可得：$x=\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$.　方程思想：求出“零点”

即当 $x\in\left(-\infty,\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)$ 时，$\because (2e^x+a)<0$，$\therefore f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right),+\infty\right)$ 时，$\because (2e^x+a)>0$，$\therefore f'(x)>0$.　分类思想：分段讨论

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right),+\infty\right)$ 上单调递增.　归纳思想：归纳函数单调性

例 21.25　（乙 1771-1）已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$，讨论 $f(x)$ 的单调性.

解析：$\because$ 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.　从题设条件出发

$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且　首先明确函数的定义域

$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^x-1=(ae^x-1)(2e^x+1)$.　转化思想，因式分解

$\because 2e^x+1>0$，$\therefore f'(x)$ 的正负只与 $g(x)=ae^x-1$ 一致.

为了确定 $g(x)=ae^x-1$ 的正负，需要对参数 a 进行讨论：

① 当 $a\leqslant 0$ 时，$\because g(x)=ae^x-1<0$，$\therefore f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

② 当 $a>0$ 时，$\because g'(x)=ae^x>0$，$\therefore g(x)$ 单调递增.

因此，当 $x\in\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 单调递增.

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增.

例 21.26　（乙 1621-1）已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$，讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

解析：$\because$ 题设 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$，$\therefore$ 为研究该函数的单调性，需计算其导数如下：

$f'(x)=(x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$.

$\because e^x>0$，$\therefore$ 为了确定 $f'(x)=(x-1)(e^x+2a)$ 的正负，需要对 a 进行分类分析：

（i）设 $a\geqslant 0$，则 $(e^x+2a)>0$，故当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 单调递增.

（ii）设$a<0$，令$f'(x)=0$，解得：$x_1=1$，$x_2=\ln(-2a)$．

为了确定$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)$的正负，需要确定$x_2=\ln(-2a)$与“1”的大小关系，令$x_2=\ln(-2a)=1$，解得：$a=-\frac{e}{2}$，因此，需要对a的取值范围进行讨论：

① 若$a=-\frac{e}{2}$时，则$f'(x)=(x-1)(e^x-e)$，无论x与“1”的大小关系如何，都有$f'(x)>0$，即函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递增；

② 若$-\frac{e}{2}<a<0$时，则$x_2=\ln(-2a)<1$，故当$x\in(-\infty,x_2)\cup(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；当$x\in(x_2,1)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减．

③ 若$a<-\frac{e}{2}$时，则$x_2=\ln(-2a)>1$，故当$x\in(-\infty,1)\cup(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；当$x\in(1,x_2)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减．

例 21.27 （甲 1571-1）设函数$f(x)=e^{mx}+x^2-mx$，证明：$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增．

证明：∵ $f(x)=e^{mx}+x^2-mx$，∴ $f'(x)=me^{mx}+2x-m$，

∵ $f''(x)=m^2e^{mx}+2>0$在$\mathbf{R}$上恒成立，∴ $f'(x)=me^{mx}+2x-m$在$\mathbf{R}$上单调递增．

又∵ $f'(0)=0$，∴当$x<0$时，$f'(x)<0$，即$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减；当$x>0$时，$f'(x)>0$，即$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增．

因此，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增．

例 21.28 （乙 1871-1）已知函数$f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$．讨论$f(x)$的单调性．

解析：∵题设函数$f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$，∴函数的定义域为$(0,+\infty)$．　研究函数问题的首要任务

为讨论$f(x)$的单调性，可对原函数求导：　导数性质运用意识

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}.$$　导数公式数学运算

∵上式分母$x^2>0$，∴$f'(x)$的正负与上式的分子一致．　数学观点观察问题：分解策略

故令$g(x)=-x^2+ax-1$是一个开口向下的抛物线，　数形想象：从函数表达式想象函数图像

且判别式$\Delta=a^2-4$．　判别式公式

由于a的不同取值会导致判别式的正负变化，从而决定$g(x)=0$是否有解，因此，需要对a进行讨论：

分类讨论思想运用

①当$|a|\leqslant 2$时，$g(x)=0$没有解，且因$g(x)=-x^2+ax-1$是开口向下的抛物线，故$g(x)\leqslant 0$，即$f'(x)\leqslant 0$．故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减．　直观想象：从图形想象性质

②当$a<-2$时，$\Delta=a^2-4>0$，$g(x)=0$有两解，且由韦达定理可得：$x_1+x_2=a<-2$，$x_1\cdot x_2=1>0$．

∵ $x_1\cdot x_2=1>0$，∴ x_1，x_2同号．

又∵ $x_1+x_2=a<-2$，∴ $x_1<0$，$x_2<0$．所以，在$(0,+\infty)$上$f'(x)>0$．故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增．

③当$a>2$时，$\Delta>0$，$g(x)=0$有两解：$x_1=\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}$，$x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}$．

当$0<x<x_1$时，$f'(x)<0$；当$x_1<x<x_2$时，$f'(x)>0$；当$x>x_2$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$分别在$(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$上单调递减，在(x_1,x_2)上单调递增．

问题 5 求函数的极值（最值）

问题分析：求函数的极值（最值）问题是在对函数的单调性研究的基础上，确定函数由递增“转向”递减的极大值点或由递减“转向”递增的极小值点，进而通过代入函数解析式求出极值. 函数单调性发生改变的“极值点”的重要特征是函数的导数既不为正，也不为负，而是为零.

条件 5.1 给定函数解析式

条件分析：当给定函数解析式时，为了求函数的极值（或者说确定函数单调性的拐点），首先必须对函数进行求导，然后再对导函数的正负进行讨论，进而确定函数的单调区间和单调性，最终确定函数的极小值点和（或）极大值点.

例 21.29 （甲 1321-1）已知函数 $f(x)=x^2e^{-x}$，求 $f(x)$ 的极小值和极大值.

解析：$\because f(x)=x^2e^{-x}$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-e^{-x}x(x-2)$.

$\because e^{-x}>0$，$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 或 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$.

因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

因此，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 时取得极小值，$f(0)=0$，在 $x=2$ 时取得极大值，$f(2)=4e^{-2}$.

> **经验总结**：本题所求是极小值与极大值，而不是最小值与最大值. 因此，极值是在函数定义域内局部范围的最大值或最小值，而不是整个定义域内或指定区间内的最大值或最小值.

例 21.30 （丙 1671-2）设函数 $f(x)=a\cos2x+(a-1)(\cos x+1)$，其中 $a>0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 A. 求 A.

解析：$\because$ 题设记 $|f(x)|$ 的最大值为 A，$\therefore$ 令 $A=|f(x)|_{\max}$， 将文字语言转化为代数式

由 $f(x)=a\cos2x+(a-1)(\cos x+1)=2a\cos^2x+(a-1)\cos x-1$ 及 $a>0$ 可见：$f(x)$ 的正负与 $(a-1)$ 的正负有关.

因此，需要分类讨论如下：

（1）当 $a\geqslant1$ 时，观察函数 $f(x)=2a\cos^2x+(a-1)\cos x-1$，$\because \Delta=(a-1)^2-4\times2a\times(-1)=(a-1)^2+8a>0$，

$\therefore$ $f(x)$ 无零点（将 $f(x)$ 视为关于 $\cos x$ 的二次函数），即 $f(x)>0$，亦即 $|f(x)|=f(x)=2a\cos^2x+(a-1)\cos x-1$.

又 $\because |f(x)|'_x=-4a\cos x\cdot\sin x-(a-1)\sin x$，$\therefore$ 当 $\sin x=0$，即 $\cos x=\pm1$ 时，$|f(x)|'_x=0$.

即 $A=|f(x)|_{\max}=2a+a-1-1=3a-2$.

（2）当 $0<a<1$ 时，$\because f(x)=2a\cos^2x+(a-1)\cos x-1$，

$\therefore$ 令 $t=\cos x$，则 $g(t)=2at^2+(a-1)t-1$，即 A 是 $|g(t)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值.

$\because$ 当 $t=-\dfrac{B}{2A}=-\dfrac{(a-1)}{4a}=\dfrac{1-a}{4a}$ 时，$g_{\min}(x)=g\left(\dfrac{1-a}{4a}\right)$.

$\therefore$ 解 $\dfrac{1-a}{4a}<1$ 可得：$a>\dfrac{1}{5}$. 即当 $a>\dfrac{1}{5}$ 时，$g(t)$ 在 $[-1,1]$ 内取得极小值；而当 $a\leqslant\dfrac{1}{5}$ 时，$g(t)$ 在 $[-1,1]$ 内无极点.

①当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{5}$ 时，$\because g(t)$ 在 $[-1,1]$ 内无极点，$\therefore A=\max\{|g(-1)|,|g(1)|\}$

$\because$ $|g(-1)|=a$，$|g(1)|=|3a-2|$，又 $a\leqslant\dfrac{1}{5}$，$\therefore$ $3a\leqslant\dfrac{3}{5}$，从而 $3a-2\leqslant\dfrac{3}{5}-2=-\dfrac{7}{5}$，

$\left|g(1)\right|=\left|3a-2\right|=2-3a\geqslant\frac{7}{5}$.

从而 $\left|g(-1)\right|-\left|g(1)\right|=a-(2-3a)=4a-2=4\left(a-\frac{1}{2}\right)<0$，故 $\left|g(-1)\right|<\left|g(1)\right|$.

因此，$A=\max\left\{\left|g(-1)\right|,\left|g(1)\right|\right\}=\left|g(1)\right|=2-3a$.

②当 $1>a>\frac{1}{5}$ 时，$\because g(t)$ 在 $[-1,1]$ 内取得极小值 $g_{\min}(x)=g\left(\frac{1-a}{4a}\right)$，且 $g(-1)-g(1)=2(1-a)>0$，

$\therefore$ 在 $[-1,1]$ 内 $g(-1)>g(1)>g\left(\frac{1-a}{4a}\right)$，$\therefore A=\min\left\{\left|g(-1)\right|,\left|g\frac{1-a}{4a}\right|,\left|g(1)\right|\right\}$.

又 $\because g\left(\frac{1-a}{4a}\right)=\frac{B^2}{4A}-C=-\frac{(a-1)^2}{8a}-1=-\frac{a^2+6a+1}{8a}=-\frac{\left[(a+3)^2-8\right]}{8a}$，

且 $g(-1)=2a\cdot(-1)^2+(a-1)\cdot(-1)-1=a>0$.

$\therefore\left|g\left(\frac{1-a}{4a}\right)\right|=\frac{(a+3)^2-8}{8a}$，从而 $\left|g\left(\frac{1-a}{4a}\right)\right|-\left|g(-1)\right|=\frac{(a+3)^2-8}{8a}-a=\frac{(1-a)(1+7a)}{8a}>0$，

得 $A=\left|g\left(\frac{1-a}{4a}\right)\right|=\frac{(a+3)^2-8}{8a}=\frac{a^2+6a+1}{8a}$，综上所述，$A=\begin{cases}2-3a,\ 0<a\leqslant\frac{1}{5}\\ \frac{a^2+6a+1}{8a},\ \frac{1}{5}<a<1\\ 3a-2,\ a\geqslant 1\end{cases}$.

经验总结：本题求解的关键是把将文字语言转化为代数式，进而建立“最值是参数 a 的函数”的思想，然后进行分类讨论，最终确定最值函数的分段解析式.

例 21.31 （甲 1671-2）已知函数 $f(x)=\frac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x>0$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x+x+2>0$．证明：当 $a\in[0,1)$ 时，函数 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-ax-a}{x^2}(x>0)$ 有最小值．设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$，求函数 $h(a)$ 的值域.

分析：本题虽然是证明题，但还要“求函数 $h(a)$ 的值域”．因此，本题可当作解答题来做，关键是要形成“最小值是参数 a 的函数”思想.

解析：$\because g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-ax-a}{x^2}(x>0)$，

从目标函数出发

$$\therefore g'(x)=\frac{(\mathrm{e}^x-a)x^2-2x(\mathrm{e}^x-ax-a)}{x^4}=\frac{x\mathrm{e}^x-ax-2\mathrm{e}^x+2ax+2a}{x^3}=\frac{(x-2)\mathrm{e}^x+ax+2a}{x^3}$$

$$=\frac{(x+2)\left[\frac{x-2}{x+2}\cdot\mathrm{e}^x\right]+a(x+2)}{x^3}=\frac{(x+2)f(x)+a(x+2)}{x^3}.$$

发现式中的 $(x-2)\mathrm{e}^x=(x+2)f(x)$

即 $g'(x)=\frac{x+2}{x^3}\left[f(x)+a\right]$，$\because$ 由题设可知：$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore F(x)=f(x)+a$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 上单调递增.

$\because F(x)=f(x)+a=\frac{x-2}{x+2}\mathrm{e}^x+a$，$\therefore$ 当 $a\in[0,1)$ 时，$F(0)=a-1<0$，$F(2)=a\geqslant 0$.

因此，函数 $F(x)=f(x)+a$ 在 $(0,2]$ 上存在零点 x_a，即 $F(0)<F(x_a)=0\leqslant F(2)$.

注意：此处 $x_a=u(a)$，即 x_a 是 a 的函数.

又∵在 $x\in(0,2)$ 上 $\frac{x+2}{x^3}>0$，∴ $g'(x)=\frac{x+2}{x^3}[f(x)+a]$ 在 $(0,2]$ 上存在零点 x_a，且当 $0<x<x_a$ 时，$g'(x)<0$；当 $x_a<x<2$ 时，$g'(x)>0$.

故函数 $g(x)$ 在 $x=x_a$ 处取得最小值，且 $g_{\min}(x)=g(x_a)=\frac{e^{x_a}-a(x_a+1)}{x_a^2}$.

又∵ $F(x_a)=0$，∴ $f(x_a)+a=0$，将 $-a=f(x_a)=\frac{x_a-2}{x_a+2}e^{x_a}$ 代入上式可得：$g(x_a)=\frac{e^{x_a}}{x_a+2}$.

由题设可得：$h(a)=\frac{e^{x_a}}{x_a+2}$.　　∵ $x_a=u(a)$，∴这是一个由 x_a 充当中间变量的复合函数

令 $v(x)=\frac{e^x}{x+2}$，则 $v_x'=\frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}>0$，因此，函数 $v(x)=\frac{e^x}{x+2}$ 在 $(0,2)$ 上单调递增.

∵ $x_a\in(0,2]$，∴ $h(0)<h(a)\leqslant h(2)$，即 $\frac{1}{2}<h(a)\leqslant\frac{e^2}{4}$，所以 $h(a)$ 的值域是 $\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right]$.

综上所述，当 $a\in[0,1)$ 时，函数 $g(x)$ 有最小值 $h(a)$，$h(a)$ 的值域是 $\left(\frac{1}{2},\frac{e^2}{4}\right]$.

经验总结: 本题首先证明含参函数 $g(x,a)$ 存在最小值 $h(a)$，进而发现最小值 $h(a)$ 是参数 a 的函数，最后通过研究最小值函数的单调性来确定其值域.

问题 6 研究函数的零点个数

问题分析： 研究函数的零点个数问题实际上是在对函数单调性的研究基础之上，结合对极值点（或端点）函数值正负的研究来确定零点的个数. 因此，函数“零点个数问题”是函数“单调性问题”与“极值点问题”的综合.

条件 6.1　给定含参的函数解析式

条件分析： 当给定含参的函数解析式时，为了研究函数的零点个数，首先需要对函数求导，然后再确定函数的单调性，在此基础上再来研究函数极值的正负，进而确定函数的零点.

例 21.32（乙 1521-1）设函数 $f(x)=e^{2x}-a\ln x$，讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数.

分析： ∵ $f(x)=e^{2x}-a\ln x$，∴ $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.　　函数问题首先要确定定义域

又∵ $f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}$，∴只需在 $x>0$ 时来讨论 $f'(x)$ 的正负：

当 $a\leqslant 0$ 时，∵ $x>0$，$e^{2x}>0$，$-\frac{a}{x}>0$，∴ $f'(x)>0$，即 $f'(x)$ 没有零点；

当 $a>0$ 时，∵ $x>0$，e^{2x} 单调递增，$-\frac{a}{x}$ 单调递增，∴ $f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

问题的关键是要研究 $f'(x)=2e^{2x}-\frac{a}{x}$ 在 $a>0$，$x>0$ 条件下的零点.

解析 1：（数形结合：一个函数的零点转化为两个函数的交点）

令 $f'(x)=0$，则 $2e^{2x}-\frac{a}{x}=0$，即 $2e^{2x}=\frac{a}{x}$；不妨设 $g(x)=2e^{2x}$，$h(x)=\frac{a}{x}$，研究两函数的交点.

画出函数图像如图 21.1 所示.

当 $x\to 0$ 时，$g(x)=2\mathrm{e}^{2x}\to 2$，$h(x)=\dfrac{a}{x}\to +\infty$；

当 $x\to +\infty$ 时，$g(x)=2\mathrm{e}^{2x}\to +\infty$，$h(x)=\dfrac{a}{x}\to 0$.

所以，两函数在 $(0,+\infty)$ 上必有一交点，即 $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.

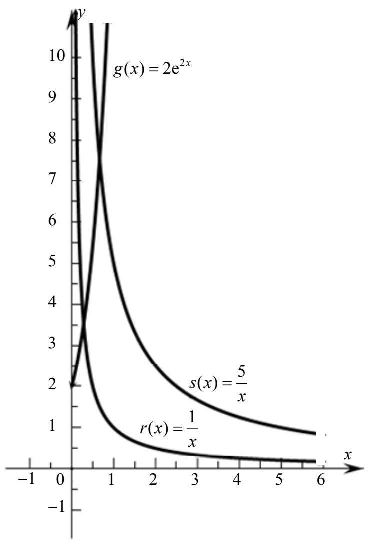


图 21.1

解析 2：（参变分离：一个函数的零点转化为一条参数直线与另一个函数的交点）

令 $f'(x)=0$，则 $2\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{a}{x}=0$，即 $a=2x\mathrm{e}^{2x}$.

令 $\varphi(x)=2x\mathrm{e}^{2x}$，则 $\varphi'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+4x\mathrm{e}^{2x}=(2+4x)\mathrm{e}^{2x}>0$，即 $\varphi(x)=2x\mathrm{e}^{2x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又∵ $\varphi(0)=2x\mathrm{e}^{2x}=0$，∴ $\varphi(x)\in(0,+\infty)$. 当 $a>0$ 时，直线 $y=a$ 与曲线 $\varphi(x)=2x\mathrm{e}^{2x}$ 存在唯一交点，即 $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一零点.

解析 3：（零点存在定理：若连续函数在某个区间两端的函数值异号，则在该区间存在零点）

∵ $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，∴寻找存在函数值异号的区间.

① $f'\left(\dfrac{a}{2}\right)=2\mathrm{e}^{a}-2=2(\mathrm{e}^{a}-1)>0(a>0)$，　　取特殊值获得右端点

②令 $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{a}{x}<0$ 可得：$2\mathrm{e}^{2x}<\dfrac{a}{x}$，即 $2x\mathrm{e}^{2x}<a$，　　列不等式求左端点

两边取对数可得：$\ln 2+\ln x+2x<\ln a$，　　∵ $a>0$，$x>0$，∴两边可以取对数

即 $2x<\ln a-\ln 2-\ln x$，当 $x>1$ 时，$2x<\ln a-\ln 2-\ln x<\ln a-\ln 2=\ln\dfrac{a}{2}$，解得：$x<\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}$.

因此，当 $1<x<\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2}$ 时，$f'(x)<0$.

所以，$f'(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$ 上存在唯一零点.　　零点存在定理

> **零点存在定理**：如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内至少有一个零点. 即至少存在一个 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$.

条件 6.2　给定含参函数的定义

条件分析：当给定含参函数的定义时，为了研究函数的零点个数，要充分利用该函数的定义，通过研究函数的极值来确定函数的零点.

例 21.33（乙 1571-2）已知函数 $f(x)=x^3+ax+\dfrac{1}{4}$，$g(x)=-\ln x$. 用 $\min\{m,n\}$ 表示 m，n 中的最小值，设函数 $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，讨论 $h(x)$ 零点的个数.

分析：①∵当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)=-\ln x<0$，∴ $h(x)=\min\{f(x),g(x)\}\leqslant g(x)<0$.

因此，$h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上无零点.

②∵当 $x=1$ 时，$f(1)=a+\dfrac{5}{4}$，$g(1)=0$，∴当 $a\geqslant -\dfrac{5}{4}$ 时，$f(1)=a+\dfrac{5}{4}\geqslant 0$.

此时，$h(x)=\min\{f(1),g(1)\}=g(1)=0$，故 $x=1$ 是 $h(x)$ 的零点；

当 $a<-\frac{5}{4}$ 时，$f(1)=a+\frac{5}{4}<0$，此时，$h(x)=\min\{f(1),g(1)\}=f(1)<0$，故 $x=1$ 不是 $h(x)$ 的零点.

③∵当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=-\ln x>0$，

∴只需要研究 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$ 在 $(0,1)$ 区间上的零点个数，且 $f(0)=\frac{1}{4}$，$f(1)=a+\frac{5}{4}$.

解析 1：∵ $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$，∴ $f'(x)=3x^2+a$，

（i）当 $a\geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，

∵ $x\in(0,1)$，∴ $a=0$ 时，$f'(x)>0$

即当 $a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，且 $f(0)=\frac{1}{4}>0$，故无零点.

（ii）当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$ 可得：$x_0=\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$，∵ $x\in(0,1)$，∴ $x_0=\sqrt{-\frac{a}{3}}$（舍负）.

当 $a\leqslant -3$ 时，$x=\sqrt{-\frac{a}{3}}>1$ 不符合 $x\in(0,1)$ 的要求. 只有当 $-3<a<0$ 时，解得 $x_0=\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 才符合要求. 将 $f'(x)=3x^2+a$ 看成是以 y 轴为对称轴，开口向上的抛物线，则 $f'(x)=3x^2+a$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增.

∵当 $x=x_0$ 时，$f'(x_0)=0$，∴当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$f'(x)>0$，

即 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增，即 $f(x)$ 在 $x=x_0=\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 处取得最小值，且最小值为 $f\left(x_0=\sqrt{-\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}$.

令 $f(x_0)=0$ 可得：$\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}=0$，解得：$a=-\frac{3}{4}$，即此时 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有 1 个零点.

令 $f(x_0)<0$ 可得：$\frac{2a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}}+\frac{1}{4}<0$，解得：$-3<a<-\frac{3}{4}$.

∵ $f(0)=\frac{1}{4}>0$，$f(1)=\frac{5}{4}+a$，

∴当 $-3<a\leqslant -\frac{5}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有 1 个零点；当 $-\frac{5}{4}<a\leqslant -\frac{3}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有 2 个零点.

综上所述，当 $a>-\frac{3}{4}$ 或 $a<-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有一个零点；当 $a=-\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{5}{4}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；

当 $-\frac{5}{4}<a<-\frac{3}{4}$ 时，$h(x)$ 有三个零点.

解析 2：为研究 $f(x)=x^3+ax+\frac{1}{4}$ 在区间 $(0,1)$ 上的零点个数，可以令 $f(x)=0$，即 $x^3+ax+\frac{1}{4}=0$，亦即 $x^3=-ax-\frac{1}{4}$.

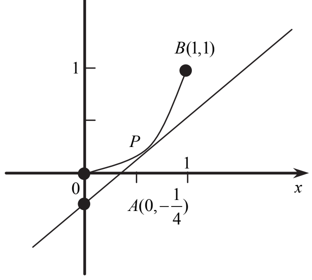


图 21.2

设 $u(x)=x^3$，$v(x)=-ax-\frac{1}{4}$，则问题转化为求两条曲线的交点个数问题：显然，$u(x)$ 是过点 $O(0,0)$ 和点 $B(1,1)$ 的三次函数曲线；$v(x)=-ax-\frac{1}{4}$ 是过点 $A\left(0,-\frac{1}{4}\right)$，斜率为 $-a$ 的直线. 在平面直角坐标系中，作出上述两函数在 $(0,1)$ 上的图像如图 21.2 所示，设 $P(x_0,y_0)$ 是直线 $v(x)=-ax-\frac{1}{4}$ 与曲线

$u(x)=x^3$ 的切点，则 $\because u'=3x^2$，$\therefore -a=3x_0^2$， ①

且 $y_0=-ax_0-\dfrac{1}{4}$， ②

$y_0=x_0^3$. ③

由②③两式联立（消去 y_0）可得：$x_0^3=-ax_0-\dfrac{1}{4}$.

将①式代入上式可得：$x_0^3=3x_0^3-\dfrac{1}{4}$，化简可得：$x_0^3=\dfrac{1}{8}$，解得：$x_0=\dfrac{1}{2}$.

将 $x_0=\dfrac{1}{2}$ 代回③式可得：$y_0=x_0^3=\dfrac{1}{8}$.

$\because k_{AP}=3x_0^2=\dfrac{3}{4}$，$k_{AB}=\dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)}{1-0}=\dfrac{5}{4}$，

$\therefore$ 当 $k_{AP}<-a<k_{AB}$，即 $\dfrac{3}{4}<-a<\dfrac{5}{4}$，亦即 $-\dfrac{5}{4}<a<-\dfrac{3}{4}$ 时，直线与曲线有两个交点.

问题 7 求含参函数的参数取值范围（极值）

问题分析： 求含参函数的参数取值范围（极值）问题，关键是要根据题设含参函数所满足的条件求解.

条件 7.1 给定含参函数的不等式

条件分析： 当给定含参函数的不等式时，通常需要对含有参数的函数不等式进行适当的变换，然后根据变换的结果形成解题思路.

例 21.34（甲 1620-2）已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$. 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围.

解析 1：（分析讨论法）

$\because f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$， 研究函数问题首先确定定义域

且 $f(x)=(x+1)\left[\ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}\right]$，

又 $\because$ 题设 $f(x)>0$，$\therefore \ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}>0$， 将目标转化为 $\ln x-\dfrac{a(x-1)}{x+1}>0$

令 $g(x)=\ln x-a\dfrac{x-1}{x+1}$，则 $g(x)>0$. 构造新的目标函数 $g(x)$，形成新的条件：$g(x)>0$

以下讨论满足 $g(x)>0$ 的 a 的取值范围.

$\because g(x)=\ln x-a\dfrac{x-1}{x+1}$，$\therefore g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2a}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$，且 $g(1)=0$.

$\because$ 题设 $x\in(1,+\infty)$，$\therefore$ 导函数的分母 $x(x+1)^2>0$.

因此，主要研究导函数的分子 $x^2+2(1-a)x+1$ 的正负. 发现新目标

令 $h(x)=x^2+2(1-a)x+1$， 构造新的目标函数 $h(x)$

则 $h'(x)=2x+2(1-a)=2(x+1-a)$，$\because$ 题设 $x\in(1,+\infty)$，$\therefore (x+1)>2$.

因此，当 $a\leqslant 2$ 时，$h'(x)=2(x+1-a)>0$，即函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又∵ $h(1)=2(2-a)\geqslant 0$，∴在 $a\leqslant 2$ 时，$h(x)>0$．即当 $a\leqslant 2$ 时，$g'(x)>0$，

又∵ $g(1)=0$，∴当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，符合题设条件．

故 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$．

以上探求了 $g(x)>0$ 的必要条件

验证：

以下证明 $a>2$ 不是 $g(x)>0$ 的充分条件

当 $a>2$ 时，令 $g'(x)=0$，即 $h(x)=x^2+2(1-a)x+1=0$ 可以解得：$x_1=a-1-\sqrt{(a-1)^2-1}$，$x_2=a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}$．

∵ $a>2$，∴ $a-1>1$，∴ $x_2=a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}>1$，$x_1=\dfrac{1}{x_2}<1$．

∵题设 $x\in(1,+\infty)$，∴当 $x\in(1,x_2)$ 时，$g'(x)<0$．∵ $g(1)=0$，∴当 $x\in(1,x_2)$ 时，$g(x)<0$．

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，且∵ $g(x_2)<0$，∴无法判定 $g(x)$ 的正负．

综合上述探究和检验可以得：当 $x\in(1,+\infty)$ 时，满足 $f(x)>0$ 的 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$．

分析讨论法的理论依据：分析探究命题（必要性），证明逆否命题（充分性）．

解析 2：（数形结合法：将一个含参函数的不等式转化为对两个函数的大小进行比较）

已知 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$，且题设当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，

令 $g(x)=(x+1)\ln x$，$h(x)=a(x-1)$，则 $h(x)=a(x-1)$ 表示过点 $(1,0)$，斜率为 a 的直线，如图 21.3 所示．

∵ $g(x)=(x+1)\ln x$ 过点 $(1,0)$，∴求出过点 $(1,0)$ 的曲线 $g(x)$ 的切线即可．

∵ $g'(x)=(x+1)'\ln x+(x+1)(\ln x)'=\ln x+\dfrac{x+1}{x}$，

∴当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}>1>0$．即 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增．

又∵ $g'(1)=2$，∴只要 $a\leqslant 2$ 即可满足当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)>h(x)$，亦即 $f(x)>0$．故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，满足 $f(x)>0$ 的 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$．

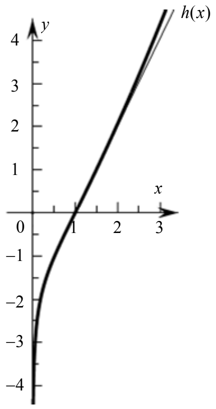


图 21.3

解析 3：（函数思想，待定参数法）

∵题设 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$，∴ $f(1)=0$．

又∵当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，

∴欲使 $f(x)>0$，需满足 $f(x)\geqslant 0$．

值得注意：这仅仅是一个充分条件，但不是必要条件

又∵ $f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}-a=\ln x+\dfrac{1}{x}+1-a$，∴ $\ln x+\dfrac{1}{x}+1-a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1+\ln x+\dfrac{1}{x}$．

令 $g(x)=1+\ln x+\dfrac{1}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}>0\,(x>1)$，故 $g_{\min}(x)=g(1)=2$，即 $a\leqslant 2$．

故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，满足 $f(x)>0$ 的充分条件是 $a\leqslant 2$．

再证明，当 $a>2$ 时，结论不成立（即必要条件）：

∵当 $a=2+\dfrac{1}{\mathrm{e}}>2$，$x\in(1,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1-a<0$，∴不能满足 $f(x)>0$．

综上所述，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，满足 $f(x)>0$ 的 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$．

经验总结：比较本题的三种解法可见，分析讨论法需要验证，数形结合法需要作图，待定参数法简便易行，参变分离法计算比较复杂．

例 21.35 （乙 1721-2）已知函数 $f(x)=e^x(e^x-a)-a^2x$，且①若 $a=0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；②若 $a>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增；③若 $a<0$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right),+\infty\right)$ 上单调递增．若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围．

解析：∵已知函数 $f(x)=e^x(e^x-a)-a^2x$，且题设 $f(x)\geqslant 0$， 目标意识：从题设条件出发

由于 $f(x)$ 的正负不仅与 x 有关，而且与参数 a 有关． 函数思想：对参数分段讨论

∴需要对在不同范围内的 a 进行分别研究：

（i）若 $a=0$，则 $f(x)=e^x(e^x-a)-a^2x=e^{2x}>0$， 函数思想：计算 $a=0$ 时的 $f(x)$

∴ $f(x)\geqslant 0$ 成立，即 $a=0$ 满足题意．

（ii）若 $a>0$，则由已知条件②可得：当 $x=\ln a$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f(\ln a)=-a^2\ln a$，

从而当且仅当 $-a^2\ln a\geqslant 0$，即 $a\leqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 0$． 将 $f(x)\geqslant 0$ 转化为 $f_{\min}(x_0)\geqslant 0$

即 $0<a\leqslant 1$ 满足题意．

（iii）若 $a<0$，则由已知条件③可得：当 $x=\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)$ 时，$f(x)$ 取得最小值，$f\left(\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right)=a^2\left[\dfrac{3}{4}-\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right]$．

从而当且仅当 $a^2\left[\dfrac{3}{4}-\ln\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right]\geqslant 0$，即 $a\geqslant -2e^{\frac{3}{4}}$ 时，$f(x)\geqslant 0$．即 $-2e^{\frac{3}{4}}\leqslant a<0$ 满足题意．

综上所述，a 的取值范围是 $\left[-2e^{\frac{3}{4}},1\right]$ 归纳思想：归纳参数的取值范围

经验总结：本题关键在于反复运用“题设”条件进行求解．对于既包含参数一次项，又包含参数二次项的含参函数，由于无法确定参数的几何意义，因此不能利用数形结合进行求解，也不便进行参变分离，通常只能借助题设条件进行分析讨论．

例 21.36 （甲 1521-2）已知 $f(x)=\ln x+a(1-x)$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最大值；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{a}$ 时取得最大值，且 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}+a\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a+a-1$．当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于 $2a-2$ 时，求 a 的取值范围．

解析：由题设可知：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无最大值；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{a}$ 时取得最大值，且 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}+a\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a+a-1$．

由题设最大值大于 $2a-2$ 可得：$-\ln a+a-1>2a-2$，即 $\ln a+a-1<0$．

函数思想：将不等式视为函数值小于 0；解题方法为转换主元：将变量 a 看作自变量 x

令 $g(x)=\ln x+x-1$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1$．

∵ $x>0$，∴ $g'(x)>0$．即 $g(x)=\ln x+x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

令 $g(x)=0$ 可得 $\ln x+x-1=0$，解得：$x=1$．∴当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)=\ln x+x-1<0$．

即当 $a\in(0,1)$ 时，$\ln a+a-1<0$，亦即 a 的取值范围是 $(0,1)$．

例 21.37 （甲 1721-2）设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1-\sqrt{2})$ 和 $(-1+\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递减，在区间 $(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$ 上单调递增．当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$，求 a 的取值范围．

解析 1：（分析归纳思想，分析讨论法）

∵题设 $f(x)=(1-x^2)e^x$， 将超越函数中的二次函数进行因式分解

$\therefore f(x)=(1+x)(1-x)e^x$.　　对两个因式进行讨论

题设当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$，　　从问题中间接确定条件：$x\geqslant 0$

为了确定 $f(x)$ 的取值范围，令 $h(x)=(1-x)e^x$，　　根据上述函数不等式构造新函数

则 $h'(x)=-xe^x<0(x>0)$，即函数 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减．又$\because h(0)=1$，$\therefore h(x)\leqslant 1$.

$\because f(x)=(1+x)h(x)$，$\therefore f(x)\leqslant(1+x)$.　　将 $f(x)$ 放大到 $(1+x)$

欲使 $f(x)\leqslant ax+1$，只需 $x+1\leqslant ax+1$，解得：$a\geqslant 1(x>0)$.

由此可得：当 $a\geqslant 1$ 时，满足题意：$f(x)\leqslant ax+1(x>0)$.

即"$a\geqslant 1$"是"$f(x)\leqslant ax+1(x>0)$"的充分条件

下面讨论 $0<a<1$ 和 $a\leqslant 0$ 的情形：　　即探究"$f(x)>ax+1(x>0)$"的必要条件

①$\because$ 当 $0<a<1$ 时，$ax+1<x+1(x>0,\ a<1)$，

$\therefore$ 欲使 $f(x)\leqslant ax+1$，即 $(1-x^2)e^x\leqslant ax+1$，联想：$e^x\geqslant x+1$.

目标：将含参函数 $ax+1$ 缩放在两个函数之间

令 $g(x)=e^x-(x+1)$，　　构造含参函数两段函数的"差函数"

则 $g'(x)=e^x-1>0(x>0)$，即 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增．　　求导确定单调性

$\because g(0)=0$，$\therefore g(x)\geqslant 0$，即 $e^x>x+1(x>0)$.　　列极值不等式作为新的条件

当 $0<x<1$ 时，$f(x)=(1-x^2)e^x>(1-x)(1+x)^2$，　　将上述条件转化为新条件

$\because (1-x)(1+x)^2-ax-1=x(1-a-x-x^2)$，　　作差获得新的代数式作为目标函数式

$\therefore$ 令 $-x^2-x-a+1=0$，

解得：$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\times(-a+1)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5-4a}}{2}$.　　求"差式"的零点

$\because$ 题设 $x>0$，$\therefore$ 取 $x_0=\dfrac{\sqrt{5-4a}-1}{2}>0$，

则 $x_0\in(0,1)$，且 $(1-x_0)(1+x_0)^2-ax_0-1=0$，

故 $f(x_0)>ax_0+1$，不满足 $f(x)\leqslant ax+1$ 条件．　　特殊值思想：个别代替一般

②当 $a\leqslant 0$ 时，取 $x_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $x_0\in(0,1)$，$f(x_0)>(1-x_0)(1+x_0)^2=1\geqslant ax_0+1$，

不满足 $f(x)\leqslant ax+1$.　　特殊值思想：个别代替一般

综上所述，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.　　归纳思想：将各种可能的结果进行归纳

解析 2：（整体思想，构造函数法：将函数不等式转化为"整体函数"不等式，构造"整体函数"）

$\because$ 题设当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$，　　从题设条件发现构造函数的目标

$\therefore$ 设 $g(x)=(ax+1)-f(x)=ax+1-(1-x^2)e^x$，　　作差构造新函数作为研究目标

则 $g'(x)=a-\left[-2xe^x+(1-x^2)e^x\right]$　　由于参数 a 的存在不便研究，继续求导

$=a+(x^2+2x-1)e^x=a+\left[(x+1)^2-2\right]e^x$，

$\because g(0)=0$，且 $g'(0)=a-1$，$\therefore$ 分 $g'(0)=a-1<0$ 或 $g'(0)=a-1\geqslant 0$ 进行讨论：

① $a<1$ 时，$\because$ 无法判定 $g'(x)$ 的正负，

$\therefore g''(x)=-(-2e^x-2xe^x-2xe^x+e^x-x^2e^x)$，

$=(x^2+4x+1)e^x=\left[(x+2)^2-3\right]e^x>0$.　　利用二次函数极值进行判断

因此，$g'(x)=a+(x^2+2x-1)e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增． 利用导数判断单调性

取 $x_1=\ln(e+|a|)>1$（也可取 $x_1=\ln(e+a)$，或取 $x_1=\ln(1+|a|)$），则 $x_1^2+2x_1-1=(x_1+1)^2-2>4-2>1$，$(x_1^2+2x_1-1)e^{x_1}>e^{x_1}=e+|a|$，$a+(x_1^2+2x_1-1)e^{x_1}>e+|a|+a>e>0$，即 $g'(x_1)\geqslant 0$．

又∵ $g'(0)=a-1<0$，且 $g'(x_1)\geqslant 0$，$x_1>1$，∴ $\exists x_0\in(0,x_1)$ 使得 $g'(x_0)=0$．

即当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$．

因此，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)$ 单调递减，且 $g(0)=0$，不满足 $g(x)\geqslant 0$．

② $a\geqslant 1$ 时，∵ $g'(0)=a-1\geqslant 0$，且 $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，∴当 $x\geqslant 0$ 时，$g'(x)\geqslant g'(0)\geqslant 0$，从而函数 $g(x)=(ax+1)-f(x)=ax+1-(1-x^2)e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又∵ $g(0)=0$，∴ $g(x)=(ax+1)-f(x)\geqslant 0$，即 $f(x)\leqslant ax+1$ 成立．

综上所述，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$．

解析 3：（数形结合法：将题设函数不等式视为比较两个函数的大小）

∵题设当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$， 从题设条件发现构造函数的目标

∴设 $g(x)=(ax+1)$， 构造新函数作为研究目标

则 $g(x)\geqslant f(x)$． 将题设条件进行转化

即函数 $f(x)$ 的图像应该在函数 $g(x)=(ax+1)$ 的下方． 数形结合：由数向形转化

显然，$g(x)=(ax+1)$ 是过点 $(0,1)$，斜率为 a 的直线． 先易后难，逐个突破

又∵ $f(x)=(1-x^2)e^x$，

∴ $f'(x)=(1-2x-x^2)e^x$，$f''(x)=(-1-4x-x^2)e^x$． 求导函数的单调性

再令 $h(x)=-x^2-4x-1=-(x+2)^2+3$， 关注主要因素，构造新目标

这是一个以点 $(-2,3)$ 为顶点，开口向下的抛物线， 数形结合：由数向形转化

即当 $x>-2$ 时，函数 $h(x)$ 递减． 数形结合：由形向数转化

又∵上述抛物线过点 $(0,-1)$，∴当 $x\geqslant 0>-2$ 时，$h(x)\leqslant h(0)=-1<0$． 单调性应用

∵当 $x\geqslant 0$ 时，$f''(x)\leqslant 0$，∴ $f'(x)=(1-2x-x^2)e^x$ 在 $[0,-\infty)$ 上递减， 求导函数的单调性

又∵ $f'(0)=1>0$，$f'(1)=-2e<0$， 特殊值思想证明导函数存在零点

∴ $\exists x_0\in(0,1)$ 使得：$f'(x_0)=0$．

即当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$． 分段确定导函数的正负

即 $f(x)=(1-x^2)e^x$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减． 分段确定函数单调性

至此可以画出下凸函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$ 草图如图 21.4 所示．

又∵ $f'(0)=1$，∴ $f(x)$ 在点 $(0,1)$ 的切线为 $h(x)=x+1$．

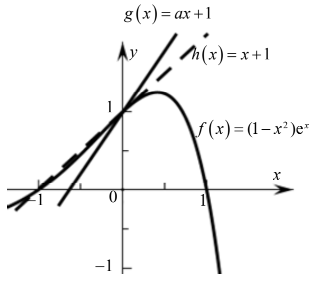


图 21.4

欲使 $f(x)\leqslant g(x)$，即当 $x>0$ 时，$g(x)$ 在 $f(x)$ 上方，必须使 $g(x)$ 在下凸函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 点的切线上方．

因此，由 $g(x)\geqslant f(x)$ 可得：$ax+1\geqslant x+1$．

解得：当 $x\geqslant 0$ 时，$a\geqslant 1$．故 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$．

解析 4：（参变分离法：将题设含参函数不等式中的参数分离出来看成是自变量的函数）

∵当 $x=0$ 时，$f(0)=1\leqslant ax+1$ 对任意 a 都成立；且当 $x>0$ 时，由题设

$f(x)\leqslant ax+1$ 可得 $a\geqslant\dfrac{f(x)-1}{x}$.

∴设 $g(x)=\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{\left(1-x^2\right)e^x-1}{x}$, 从题设条件发现构造函数的目标

则 $g'(x)=\dfrac{\left(-x^3-x^2+x-1\right)e^x+1}{x^2}$, ∵分母 $x^2>0$ ，∴发现新目标：分子

令 $h(x)=\left(-x^3-x^2+x-1\right)e^x+1$, 构造新函数

则 $h'(x)=\left(-3x^2-2x+1-x^3-x^2+x-1\right)e^x$. 求导研究单调性

$=\left(-x^3-4x^2-x\right)e^x=-x\left(x^2+4x+1\right)e^x\leqslant 0$. 利用二次函数性质确定正负

因此，$h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，即 $h(x)\leqslant h(0)=0$, 函数单调性的应用

从而 $g'(x)\leqslant 0$ ，即 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减. 再次根据导数确定单调性

所以 $a\geqslant g(x)_{\max}=\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.

由洛必达法则可得：$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(1-x^2\right)e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(-x^2-2x+1\right)e^x}{1}=1$. 求极限

故 $a\geqslant 1$，即 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

洛必达法则：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 或者 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ ，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

经验总结：从求参数范围的四种方法中我们可以发现：①分析讨论法有时很难想到从何下手；②构造函数法思路清晰但计算量大；③数形结合法对绘制函数图像有较高的要求；④参变分离法往往需要借助（高中尚未学到）洛必达法则来求极限.

例 21.38 （甲 1471-2）已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$ ，且函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$ ，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$ ，求 b 的最大值.

解析 1：∵题设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$ ，∴ $g(x)=e^{2x}-e^{-2x}-4x-4b\left(e^x-e^{-x}-2x\right)$,

$g'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-4-4b\left(e^x+e^{-x}-2\right)=2\left[\left(e^x+e^{-x}\right)^2-4-2b\left(e^x+e^{-x}\right)+4b\right]$

$=2\left(e^x+e^{-x}-2\right)\left(e^x+e^{-x}+2-2b\right)$. 将导函数分解成两个因式的乘积

∵ $g(0)=0$ ，∴欲使 $g(x)>0$ ，需当 $x>0$ 时，$g'(x)\geqslant 0$. 充分条件

∵ $e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$, 利用基本不等式，先确定第一项为正

∴由 $g'(x)\geqslant 0$ 可得：$\left(e^x+e^{-x}+2-2b\right)\geqslant 0$, 再确定第二项也必须为正

即 $2b-2\leqslant e^x+e^{-x}$. 建立含有参数 b 的简单的函数不等式

又∵ $e^x+e^{-x}>2$ ，∴ $2b-2\leqslant 2$ ，解得：$b\leqslant 2$. 利用基本不等式，建立参数 b 的不等式

因此，b 的最大值为 2. 即“$b\leqslant 2$”是“$x>0$ 时 $g(x)>0$”的充分条件

以下再证：当 $b>2$ 时，结论 $g(x)>0(x>0)$ 不成立. 即证明条件的必要性

证明如下：∵题设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$ ，∴ $g(x)=e^{2x}-e^{-2x}-4x-4b\left(e^x-e^{-x}-2x\right)$,

$g'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-4-4b\left(e^x+e^{-x}-2\right)=2\left[\left(e^x+e^{-x}\right)^2-4-2b\left(e^x+e^{-x}\right)+4b\right]$

$=2\left(e^x+e^{-x}-2\right)\left(e^x+e^{-x}+2-2b\right)$ 将导函数分解成两个因式的乘积

① 当 $b\leqslant 2$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ ，等号仅当 $x=0$ 时成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 而 $g(0)=0$ ，所

以对任意 $x>0$， $g(x)>0$；

② 当 $b>2$ 时，若 x 满足 $2<e^x+e^{-x}<2b-2$，即 $0<x<\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$ 时， $g'(x)<0$. 而 $g(0)=0$，因此当 $0<x<\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$ 时， $g(x)<0$.

综上所述，b 的最大值为 2.

解析 2：∵题设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f(0)=0$，∴当 $x>0$ 时， $f(x)>0$.

∵题设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，

∴由当 $x>0$ 时， $g(x)>0$ 可得： $f(2x)-4bf(x)>0$，即 $f(2x)>4bf(x)$.

∵已证： $f(x)>0$，∴ $b<\dfrac{f(2x)}{4f(x)}$，令 $F(x)=\dfrac{f(2x)}{4f(x)}$，则 $F'(x)=\dfrac{2f'(2x)f(x)-f'(x)f(2x)}{4f^2(x)}$.

令 $F'(x)=0$ 可得： $2f'(2x)f(x)-f'(x)f(2x)=0$（求 $F_{\max}(x)$），即 $\dfrac{f(2x)}{f(x)}=\dfrac{2f'(2x)}{f'(x)}$.

获得等量关系：将 $b<\dfrac{f(2x)}{4f(x)}$ 转化为 $b<\dfrac{f'(2x)}{2f'(x)}$

因此， $b<\dfrac{f'(2x)}{2f'(x)}=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{2(e^x+e^{-x}-2)}=\dfrac{(e^x+e^{-x})^2-4}{2[(e^x+e^{-x})-2]}=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}+2)$.

∵ $e^x+e^{-x}>2$，∴ $b\leqslant\dfrac{1}{2}(2+2)=2$. 因此，$b$ 的最大值为 2.

经验总结：本题没有采用分析讨论法，解析 1 采用了待定参数法，解析 2 采用了参变分离法. 两种方法都是将参数视为自变量的函数.

例 21.39（乙 1371-2）已知函数 $f(x)=x^2+4x+2$， $g(x)=2e^x(x+1)$，若 $x\geqslant-2$ 时， $f(x)\leqslant kg(x)$，求 k 的取值范围.

解析 1：∵题设若 $x\geqslant-2$ 时， $f(x)\leqslant kg(x)$， $f(x)-kg(x)\leqslant0$ 或 $kg(x)-f(x)\geqslant0$.

∴设（构造）函数 $F(x)=kg(x)-f(x)=2ke^x(x+1)-x^2-4x-2(x\geqslant-2)$，

则由题设 $F(x)\geqslant0(x\geqslant-2)$ 可得： $F(0)\geqslant0$， 运用特殊值

即 $2k-2\geqslant0$，解得： $k\geqslant1$. 又∵ $F'(x)=2ke^x(x+2)-2x-4=2(x+2)(ke^x-1)$.

∴解 $F'(x)=0$ 可得： $x_1=-\ln k$， $x_2=-2$.

令 $x_1=x_2$，解得： $k=e^2>1$. 因此，需要对 k 的取值在 $[1,e^2)$， $[e^2,e^2]$， $(e^2,+\infty)$ 三个区间分别讨论进行，以确定是否符合条件 $F(x)\geqslant0(x\geqslant-2)$：

（1）若 $1\leqslant k<e^2$，则 $-2<x_1=-\ln k\leqslant0$.

∵当 $x\in(-2,x_1)$ 时， $F'(x)<0$；当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时， $F'(x)>0$. ∴ $F(x)$ 在 $(-2,x_1)$ 上单调递减，在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增，即 $F(x)$ 在 $x=x_1$ 处取得最小值 $F(x_1)$.

又∵将 $x_1=-\ln k$ 代入 $F(x)=2ke^x(x+1)-x^2-4x-2(x\geqslant-2)$ 可得： $F(x_1)=2ke^{-\ln k}(x_1+1)-x_1^2-4x_1-2$ $=-x_1(x_1+2)$，其中， $1\leqslant k<e^2$， $-2<x_1=-\ln k\leqslant0$， ∴ $F(x_1)=-x_1(x_1+2)\geqslant0$.

即当 $x\geqslant-2$ 时， $F(x)\geqslant0$ 恒成立，亦即 $f(x)\leqslant kg(x)$ 恒成立.

（2）若 $k=e^2$，则 $F'(x)=2e^2(x+2)(e^x-e^{-2})$， ∵当 $x\geqslant-2$ 时， $F'(x)=2e^2(x+2)(e^x-e^{-2})\geqslant0$，

∴函数 $F(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增.

又∵当 $k=e^2$ 时， $F(-2)=0$， ∴当 $x\geqslant-2$ 时， $F(x)\geqslant0$，即 $f(x)\leqslant kg(x)$ 恒成立.

（3）若 $k>\mathrm{e}^2$，则 $F(-2)=-2k\mathrm{e}^{-2}+2=-2\mathrm{e}^{-2}(k-\mathrm{e}^2)<0$．　这里是用特殊值作反证！

当 $x\geqslant -2$ 时，$f(x)\leqslant kg(x)$ 不可能恒成立．

综上所述，k 的取值范围为 $[1,\mathrm{e}^2]$．

解析 2：∵题设：若 $x\geqslant -2$ 时，$f(x)\leqslant kg(x)$，即 $f(x)-kg(x)\leqslant 0$，∴ $kg(x)\geqslant f(x)$．

∵当 $x\neq -1$ 时，$g(x)=2\mathrm{e}^x(x+1)\neq 0$，且 $\mathrm{e}^x>0$，

∴当 $x\in(-2,-1)$ 时，$g(x)=2\mathrm{e}^x(x+1)<0$，$k\leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)}$；

当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$g(x)=2\mathrm{e}^x(x+1)>0$，$k\geqslant \dfrac{f(x)}{g(x)}$．

因此，设 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2+4x+2}{2\mathrm{e}^x(x+1)}$，

则 $F'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(2x+4)\mathrm{e}^x(x+1)-(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x(x+2)}{\mathrm{e}^{2x}(x+1)^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(x+2)(2x+2-x^2-4x-2)}{\mathrm{e}^x(x+1)^2}=-\dfrac{x(x+2)^2}{2\mathrm{e}^x(x+1)^2}$．

（1）∵当 $x\geqslant 0$ 时，$F'(x)\leqslant 0$，∴ $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数；

又∵ $F(0)=1$，∴由当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$k\geqslant \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可得：$k\geqslant 1$．

（2）∵当 $x\leqslant 0$ 时，$F'(x)\geqslant 0$，∴ $F(x)$ 在 $(-2,-1)$，$(-1,0]$ 上是增函数．

∵题设 $x\geqslant -2$，且当 $x\in[-2,-1)$ 时，$k\leqslant F(x)$；当 $x\in(-1,0)$ 时，$k\geqslant F(x)$．

∴下面分别讨论：

当 $x\in[-2,-1)$ 时，∵ $F(x)$ 是增函数，∴ $F_{\min}(x)=F(-2)=\mathrm{e}^2$，且 $k\leqslant \mathrm{e}^2$；

当 $x\in(-1,0]$ 时，∵ $F(x)$ 是增函数，∴ $F_{\max}(x)=F(0)=1$，且 $k\geqslant 1$．

由上可知：当 $-2\leqslant x\leqslant 0$ 且 $x\neq -1$ 时，k 的取值范围为 $[1,\mathrm{e}^2]$．

事实上，当 $x=-1$ 时，∵ $f(-1)=-1$，$g(-1)=0$，∴对任意 $k\in\mathbf{R}$ 都有 $f(-1)\leqslant kg(-1)$．

因此，综上所述，当 $x\geqslant -2$ 时，k 的取值范围为 $[1,\mathrm{e}^2]$．　归纳思想

条件 7.2　给定含参函数有两个零点

条件分析：当给定含参函数有两个零点时，既可以通过研究整个含参函数的单调性来解题，也可以将含参函数“看成”是两个函数相交来处理，还可以将参数进行分离转化成“参数横线”与函数的交点来解决．

例 21.40（乙 1771-2）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增．若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围．

解析 1：（归纳思想，分段讨论：对参数可能的取值区域进行分段讨论）

∵由题设可知：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 单调递减，

∴从函数图像上可得：$f(x)$ 有一个零点或者没有零点（最多有一个零点），而不可能有两个零点．因此，“$a\leqslant 0$”不属于“$f(x)$ 有两个零点”的取值范围．

又∵由题设可知：当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增．即当 $x=\ln\dfrac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=1+\ln a-\dfrac{1}{a}$．

由于函数 $f(x)$ 的图像从左向右的变化趋势是“先递减后递增”，因此“ $f(x)$ 有两个零点”的条件是最小值 $f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)<0$，由于 $f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 的值与 a 有关，因此，需对 a 进行分段讨论：

① 当 $a=1$ 时，$\because f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=1+\ln a-\dfrac{1}{a}=1+0-1=0$，$\therefore f(x)$ 只有一个零点；

② 当 $a>1$ 时，$\because f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=1+\ln a-\dfrac{1}{a}>\ln a>0$，$\therefore f(x)$ 没有零点；

③ 当 $a<1$ 时，$\because f\left(\ln\dfrac{1}{a}\right)=1+\ln a-\dfrac{1}{a}<\ln a<0$，$\therefore f(x)$ 有两个零点，即函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 和 $\left(\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上可能各有一个零点.

即探求“有两个零点”的必要条件

为证明确实存在零点，还必须在区间 $\left(-\infty,\ln\dfrac{1}{a}\right)$ 和 $\left(\ln\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上分别“找” x_1，x_2 两点，使得 $f(x_1)>0$ 和 $f(x_2)>0$，

即证明“有两个零点”的充分条件

$\because 0<a<1$，$\therefore \dfrac{1}{a}>1$，从而 $\ln\dfrac{1}{a}>0$，$\therefore$ 可取 $x_1<0$， $x_2>\ln\dfrac{1}{a}>0$.

令 $x_1=-1$，则 $f(x_1)=f(-1)=ae^{-2}+(a-2)e^{-1}+1=a\left(e^{-2}+e^{-1}\right)+1-\dfrac{2}{e}>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(-1,\ln\dfrac{1}{a}\right)(0<a<1)$ 上必有一个零点.

令正整数 $x_2>\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)$，则 $f(x_2)=e^{x_2}\left(ae^{x_2}+a-2\right)-x_2>e^{x_2}-x_2>0$，由于 $\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)=\ln\dfrac{(3-a)}{a}>\ln\dfrac{1}{a}$，因此，$f(x)$ 在 $\left(\ln\dfrac{1}{a},\ln\left(\dfrac{3}{a}-1\right)\right)(0<a<1)$ 上必有一个零点.

综上所述，a 的取值范围是 $(0,1)$.

解析 2：（参变分离法，数形结合）

由 $f(x)=0$ 可得：$ae^{2x}+(a-2)e^x-x=0$，即有 $a=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$.

函数思想，参变分离法：利用“零点”，构造参数是变量的函数

令 $g(x)=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$， $y=a$，则条件转化为 $y=a$ 与 $g(x)=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$ 有两个交点.

$$\because g'(x)=\frac{\left(2e^x+x\right)'\left(e^{2x}+e^x\right)-\left(2e^x+x\right)\left(e^{2x}+e^x\right)'}{\left(e^{2x}+e^x\right)^2}=\frac{\left(2e^x+1\right)\left(e^x+1\right)e^x-\left(2e^x+x\right)\left(2e^x+1\right)e^x}{e^{2x}\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(2e^x+1\right)\left(1-e^x-x\right)}{e^x\left(e^x+1\right)^2}.$$

$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$e^x<1$，$g'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$e^x<1$，$g'(x)<0$.

即函数 $g(x)=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

且在 $x=0$ 处，$g(x)=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$ 取得最大值 $g(0)=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}=\dfrac{2+0}{1+1}=1$，如图 21.5 所示.

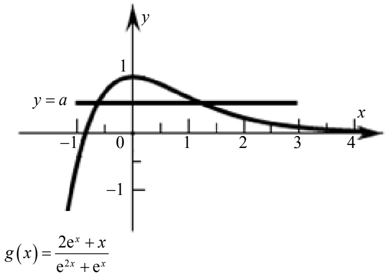


图 21.5

显然，当 $a>1$ 时，$y=a$ 与 $g(x)=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$ 没有交点，不符合题意；

当 $a=1$ 时，$y=a$ 与 $g(x)=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$ 只有一个交点，不符合题意；

因此，存在两个交点的条件只可能是 $a<1$，且交点在 y 轴两侧.

又∵当 $x>0$ 时，$g(x)=\dfrac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}>0$，

∴ $y=a=g(x)>0$，即 a 的取值范围是 $(0,1)$.

解析 3：（参变部分分离法）

由 $f(x)=0$ 可得：$ae^{2x}+(a-2)e^x-x=0$，即有 $a(e^{2x}+e^x)=x+2e^x$，亦即 $a(e^x+1)=\dfrac{x}{e^x}+2$.

令 $g(x)=a(e^x+1)$，$h(x)=\dfrac{x}{e^x}+2$，则 $g'(x)=ae^x$，$h'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$.

显然，$h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且 $h_{\max}(x)=h(1)=2+\dfrac{1}{e}>2$.

对于 $g'(x)=ae^x$：

（1）当 $a<0$ 时，$g(x)=a(e^x+1)$ 在 $(+\infty,-\infty)$ 上单调递减，且 $g(x)<0$. 故 $g(x)<0$ 与 $h(x)>0$ 在 $x>0$ 处无交点；

事实上，有一个交点在 $x<0$ 处

（2）当 $a\geqslant 1$ 时，$g(x)=a(e^x+1)\geqslant e^x+1$.

下面证明：$e^x+1\geqslant h(x)=\dfrac{x}{e^x}+2$.

即证明 $e^{2x}>e^x+x$

证法 1：令 $F(x)=e^{2x}-e^x-x$，

这样构造辅助函数简单

$F'(x)=2e^{2x}-e^x-1=(e^x-1)(2e^x+1)$，由 $F'(x)>0$ 可得：$x>0$，

因此，$F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调递减，在 $(0,+\infty)$ 内单调递增. 即 $F(x)\geqslant F(x)_{\min}=F(0)=0$.

证法 2：令 $F(x)=e^x+1-\left(2+\dfrac{x}{e^x}\right)=e^x-\dfrac{x}{e^x}-1$.

作差构造辅助函数目标明确

则 $F'(x)=\dfrac{e^{2x}+x-1}{e^x}$. 再令 $k(x)=e^{2x}+x-1$，则 $k'(x)=2e^{2x}+1>0$.

即 $k(x)=e^{2x}+x-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 令 $k(x)=0$ 可得：$e^{2x}+x-1=0$，解得：$x=0$.

因此，$F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 即 $F_{\min}(x)=F(0)=0$.

所以，$e^x+1\geqslant 2+\dfrac{x}{e^x}$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，所以两函数不可能有两个交点.

（3）当 $0<a<1$ 时，$g(0)=2a<h(0)=2$，$g(-2)=\left(1+\dfrac{1}{e^2}\right)a>h(-2)=2(1-e^2)$.

当 $x\to+\infty$ 时，显然 $g(x)>h(x)$. 因此，两函数有两个交点.

综上所述，当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点.

解析 4：（整体思想，换元法）令 $t=e^x>0$，则 $x=\ln t$.

从而 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$ 转化为 $F(t)=at^2+(a-2)t-\ln t$.

由 $F(t)=0$ 可得：$at^2+(a-2)t-\ln t=0$.

上式按照参变完全分离、参变部分分离和参变不分离可以有如下三种变换形式：

① $a=\dfrac{2}{t+1}+\dfrac{\ln t}{t(t+1)}$；② $a(t+1)=2+\dfrac{\ln t}{t}$；③ $at^2+(a-2)t-\ln t=0$.

可以分别仿照本题解析 1 至解析 3 进行求解.

经验总结：含有指数 e^x 的超越函数，通过换元转化为含有对数 $\ln x$ 的超越函数会使计算更为简便.

例 21.41 （乙 1671-1/21-2）已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点，求 a 的取值范围.

解析 1：（分析讨论法）

$\because f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点，$\therefore$需要讨论函数的单调性.

为此计算该函数的导数为 $f'(x)=(x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'+2a(x-1)$，即 $f'(x)=(x-1)(e^x+2a)$.

$\because e^x>0$，$\therefore$为了确定 $f'(x)=(x-1)(e^x+2a)$ 的正负，需要对 a 分三类进行分析：

（1）设 $a=0$，则 $f'(x)=(x-1)e^x$，即 $f(x)$ 只有一个零点：$x=2$，不符合题意.

（2）设 $a>0$，则 $e^x+2a>0$，故当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)>0$. 因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\because f(1)=-e<0$，$f(2)=a>0$ 且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$函数 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上存在一个零点.

$\because f(1)=-e<0$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，

$\therefore$只要 $\exists x_0\in(-\infty,1)$，使得 $f(x_0)>0$，即可说明 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上存在一个零点.

$\because f(0)=a-2$，$\therefore$当 $a>2>0$ 时，$f(0)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上存在一个零点.

由此猜想：对于任意的 $a>0$，$\exists x_0\in(-\infty,1)$，使得：$f(x_0)>0$.

为此，需要解函数不等式 $f(x)>0$ 来确定对于任意的 $a>0$ 时，x_0 的取值范围.

观察 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2>0$ 可见：当 $x_0=\ln\frac{a}{2}<0$，即 $0<a<2$ 时，

$$f(x_0)=(x_0-2)\frac{a}{2}+a(x_0-1)^2=a\left(x_0^2-\frac{3}{2}x_0\right)=ax_0\left(x_0-\frac{3}{2}\right).$$

$\because a>0$，且当 $x_0<0$ 或 $x_0>\frac{3}{2}$ 时，$x_0\left(x_0-\frac{3}{2}\right)>0$，　视为开口向上的抛物线

$\therefore$当 $x_0=\ln\frac{a}{2}<0$ 时，$f(x_0)=ax_0\left(x_0-\frac{3}{2}\right)>0$. 即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上存在一个零点.

综上所述，当 $a>0$ 时，函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

（3）设 $a<0$，令 $f'(x)=(x-1)(e^x+2a)=0$，解得：$x_1=1$ 或 $x_2=\ln(-2a)$.

若 $a\geqslant-\frac{e}{2}$，则 $x_2=\ln(-2a)\leqslant1$. 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)<0$，函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 不存在两个零点.

若 $a<-\frac{e}{2}$，则 $x_2=\ln(-2a)>1$.

当 $x\in(1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

因此，函数 $f(x)$ 在 $(1,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增.

又$\because$当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f(x)<0$，

$\therefore$函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 不存在两个零点.

综上所述，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 不存在两个零点.

解析 2：（转化思想，数形结合法）

$\because f(1)=(1-2)e^1+a(1-1)^2=-e\neq0$，$\therefore x=1$ 不是函数 $f(x)$ 的零点.

令 $f(x)=0$ 可得：$(x-2)e^x+a(x-1)^2=0$，　将条件转化为含参等式

即 $-a(x-1)^2=(x-2)e^x$.　变形转化为两条曲线的交点

设 $g(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$，$h(x)=-a(x-1)^2$，　　构造两个函数

则 $g'(x)=\mathrm{e}^x+(x-2)\mathrm{e}^x=(x-1)\mathrm{e}^x$．　　对不确定性质的函数求导

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$g'(x)<0$．

即 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．

在平面直角坐标系中画出 $g(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$ 和 $h(x)=-a(x-1)^2$ 的图像，如图 21.6 所示．

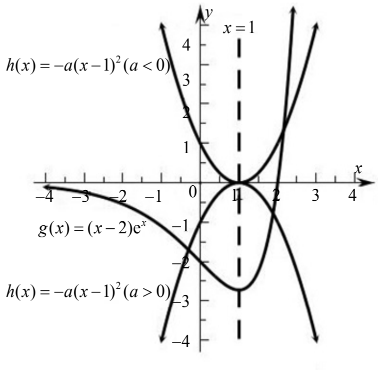


图 21.6

显然，当 $a<0$ 时，$h(x)=-a(x-1)^2$ 是开口向上的抛物线，与 $g(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$ 只有一个交点；

当 $a=0$ 时，$h(x)=0$ 是 x 轴，它与 $g(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$ 也只有一个交点；

当 $a>0$ 时，$h(x)=-a(x-1)^2$ 是开口向下的抛物线，与 $g(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$ 有两个交点．

因此，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$．

解析 3：（参变分离法，转化思想，数形结合）

$\because f(1)=(1-2)\mathrm{e}^1+a(1-1)^2=-\mathrm{e}\neq 0$，$\therefore x=1$ 不是函数 $f(x)$ 的零点．

令 $f(x)=0$ 可得：$(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2=0$，即 $-a(x-1)^2=(x-2)\mathrm{e}^x$．　　将条件转化为含参等式

当 $x\neq 1$ 时，$a=-\dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$，设 $g(x)=-\dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$，$h(x)=a$，　　变形转化为两条曲线的交点

则 $g'(x)=-\dfrac{(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}\mathrm{e}^x=-\dfrac{(x-2)^2+1}{(x-1)^3}\mathrm{e}^x$．

画出 $g(x)=-\dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$，$h(x)=a$ 的函数图像如图 21.7 所示．

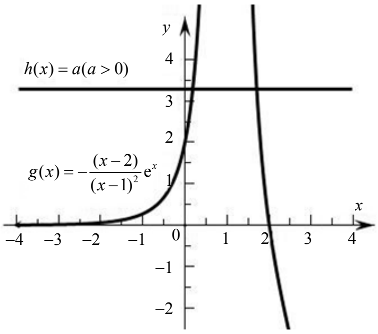


图 21.7

显然，当 $h(x)=a>0$ 时，$h(x)=a$ 与 $g(x)=-\dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$ 有两个交点．

因此，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$．

解析 4：（分离参数法，转化思想，数形结合）

$\because f(1)=(1-2)\mathrm{e}^1+a(1-1)^2=-\mathrm{e}\neq 0$，

$\therefore x=1$ 不是函数 $f(x)$ 的零点．

令 $f(x)=0$ 可得：$(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2=0$，　　将条件转化为含参等式

即 $-a(x-1)^2=(x-2)\mathrm{e}^x$．

当 $x\neq 1$ 时，$-a=\dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$．　　变形转化为两条曲线的交点

设 $g(x)=\dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}\cdot\mathrm{e}^x=\dfrac{(x-2)^2+1}{(x-1)^3}\cdot\mathrm{e}^x$．

显然，当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 递减，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 递增．

又$\because$当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$g(x)\in(-\infty,0)$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)\in\mathbf{R}$．　　这是关键！

$\therefore$当 $-a\in(-\infty,0)$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点．

即存在 $x_1\in(-\infty,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$ 满足 $g(x_1)=-a$，$g(x_2)=-a$．因此，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$．

条件 7.3 存在性问题

条件分析：当给定存在性问题 $f(x_0)<m$ 或 $f(x_0)>n$ 时，关键是要将函数值不等式转化为某个区间上的函数极值不等式 $f_{\min}(x)<m$ 或 $f_{\max}(x)>n$.

例 21.42 （乙 1421-2）设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-x$，若存在 $x_0\geqslant 1$，使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$，求 a 的取值范围.

解析 1：（分析讨论法，导函数因式分解） ∵零和负数无对数，∴函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

又∵题设 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-x$，

∴ $f'(x)=\dfrac{a}{x}+(1-a)x-1=\dfrac{1-a}{x}\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)(x-1)$.

因式分解不易想到！

（1）若 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{a}{1-a}\leqslant 1$.

将 a 的取值分为三段更难想到！

故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以，存在 $x_0\geqslant 1$，使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$ 的充要条件为 $f(1)<\dfrac{a}{a-1}$.

即 $\dfrac{1-a}{2}-1<\dfrac{a}{a-1}$，解得：$-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$.

（2）若 $\dfrac{1}{2}<a<1$，则 $\dfrac{a}{1-a}>1$，故当 $x\in\left(1,\dfrac{a}{1-a}\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{a}{1-a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$.

$f(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{a}{1-a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{a}{1-a},+\infty\right)$ 上单调递增.

所以，存在 $x_0\geqslant 1$，使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{1-a}$ 的充要条件为 $f\left(\dfrac{a}{1-a}\right)<\dfrac{a}{a-1}$.

又∵ $f\left(\dfrac{a}{1-a}\right)=a\ln\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a^2}{2(1-a)}+\dfrac{a}{1-a}>\dfrac{a}{a-1}$，∴不符合题意.

（3）若 $a>1$，则∵ $f(1)=\dfrac{1-a}{2}-1=\dfrac{-1-a}{2}<\dfrac{a}{a-1}$.

左边负，右边正，心中要有与 $\dfrac{a}{a-1}$ 比较的意识

∴取 $x_0=1$ 即可满足条件.

综上所述，满足 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}(x_0\geqslant 1)$ 条件的 a 的取值范围为 $(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)\cup(1,+\infty)$.

解析 2：（分析讨论法，导函数通分看分子）

∵零和负数无对数，∴函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

又∵题设 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-x$，

∴ $f'(x)=\dfrac{a}{x}+(1-a)x-1=\dfrac{(1-a)x^2-x+a}{x}$.

∵目标讨论 $x>1$，∴通分求和关注分子

∵题设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，∴只需关注上式分子的正负.

令 $g(x)=(1-a)x^2-x+a$，则当 $a<1$ 时，$g(x)$ 是开口向上的抛物线，当 $a>1$ 时，$g(x)$ 是开口向下的抛物线. 下面分两种情形来讨论：（由题意可知：$a\neq 1$）

（1）当 $a<1$ 时，抛物线 $g(x)=(1-a)x^2-x+a$ 开口向上.

解 $(1-a)x^2-x+a=0$ 可得：$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a(1-a)}}{2(1-a)}=\dfrac{1\pm\sqrt{(2a-1)^2}}{2(1-a)}$.

① 当$a<\frac{1}{2}$时，$2a-1<0$，解得：$x_1=\frac{1+(2a-1)}{2(1-a)}=\frac{a}{1-a}$，$x_2=\frac{1-(2a-1)}{2(1-a)}=1$.

∵抛物线开口向上，∴当$x>x_2=1$时，$g(x)>0$，即$f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-x$单调递增.

∵$f(1)=\frac{1-a}{2}-1=-\frac{(a+1)}{2}$，∴欲使$f(x_0)<\frac{a}{a-1}$，需使$f(1)<f(x_0)<\frac{a}{a-1}$，即$-\frac{(a+1)}{2}<\frac{a}{a-1}$.

∵此时$a<\frac{1}{2}$，∴$a-1<-\frac{1}{2}<0$，两边同乘$2(a-1)$可得：$-(a+1)(a-1)>2a$，化简可得：$a^2+2a-1<0$，解得：$-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$.

符合$a<\frac{1}{2}$

因此，a的第一个取值范围应该是$-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$，即$a\in\left(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right)$.

② 当$\frac{1}{2}\leqslant a<1$时，$2a-1\geqslant 0$，解得：$x_1=\frac{1-(2a-1)}{2(1-a)}=1$，$x_2=\frac{1+(2a-1)}{2(1-a)}=\frac{a}{1-a}>1$.

∵抛物线开口向上，∴当$x_1<x<x_2$时，$g(x)<0$，即$f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-x$单调递减；当$x>x_2$时，$g(x)>0$，即$f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-x$单调递增．即当$x>x_1=1$时，$f_{\min}(x)=f(x_2)$.

若当$x>x_1=1$时，∃$f(x_0)<\frac{a}{a-1}$，需使$f(x_2)<\frac{a}{a-1}$.

即$a\ln\left(\frac{a}{1-a}\right)+\frac{1-a}{2}\times\left(\frac{a}{1-a}\right)^2-\frac{a}{1-a}<\frac{a}{a-1}$，亦即$\ln\left(\frac{a}{1-a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1-a}\right)<0$.

∵当$\frac{1}{2}\leqslant a<1$时，$\frac{a}{1-a}>1$，∴上述不等式无解，即a在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$上无取值.

（2）当$a>1$时，抛物线$g(x)=(1-a)x^2-x+a$开口向下.

解$(1-a)x^2-x+a=0$可得：$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4a(1-a)}}{2(1-a)}=\frac{1\pm\sqrt{(2a-1)^2}}{2(1-a)}$.

∵$2a-1>0$，∴解得：$x_1=\frac{1+(2a-1)}{2(1-a)}=\frac{a}{1-a}<0$，$x_2=\frac{1-(2a-1)}{2(1-a)}=1$.

即当$x>x_1$时，函数$f(x)$在(x_1,x_2)上单调递增，在$(x_2,+\infty)$上单调递减，即$f_{\max}(x)=f(x_2)$.

故当$x>x_2=1$时，存在$f(x_0)<\frac{a}{a-1}$.

因此，a的第二个取值范围应该是$a>1$，即$a\in(1,+\infty)$.

综上所述，满足$f(x_0)<\frac{a}{a-1}(x_0\geqslant 1)$的$a$的取值范围为$\left(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1\right)\cup(1,+\infty)$.

条件 7.4　给定含参函数的两点函数差值不等式

条件分析：当给定含参函数的两点函数差值不等式$f(x_2)-f(x_1)<m$或$f(x_2)-f(x_1)>n$时，关键是要利用函数的单调性将函数的两点差值不等式转化为某个区间两端的最值之差不等式.

例 21.43（甲 1571-2）设函数$f(x)=\mathrm{e}^{mx}+x^2-mx$，且$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，若对于任意$x_1,x_2\in[-1,1]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant \mathrm{e}-1$，求$m$的取值范围.

解析：∵题设$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

∴对于任意的m取值，$f_{\min}(x)=f(0)=1$.

∵题设对于任意$x_1,x_2\in[-1,1]$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant \mathrm{e}-1$，

$\therefore \begin{cases} f(1)-f(0)\leqslant e-1 \\ f(-1)-f(0)\leqslant e-1 \end{cases}$.

利用函数单调性将一般性条件转化为特殊值条件

$\because f(0)=1$，$\therefore \begin{cases} f(1)-e\leqslant 0 \\ f(-1)-e\leqslant 0 \end{cases}$，亦即$\begin{cases} e^m-m-e+1\leqslant 0 \\ e^{-m}+m-e+1\leqslant 0 \end{cases}$，

代入题设函数表达式中

设$g(t)=e^t-t-e+1$，则$g'(t)=e^t-1$.

构造目标函数

当$t<0$时，$g'(t)=e^t-1<0$，$g(t)=e^t-t-e+1$在$(-\infty,0)$上单调递减；

当$t>0$时，$g'(t)=e^t-1>0$，$g(t)=e^t-t-e+1$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又$\because g(-1)=e^{-1}+2-e<0$，$g(1)=0$，$\therefore$当$t\in[-1,1]$时，$g(t)\leqslant 0$.

因此，当$m\in[-1,1]$时，$g(m)\leqslant 0$，且$g(-m)\leqslant 0$，即原充要条件成立.

当$m>1$时，$\because g(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore g(m)>g(1)$，即有$e^m-m>e-1$.

当$m<-1$时，$\because g(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore g(-m)>g(1)$，即有$e^{-m}+m>e-1$.

综上所述，m的取值范围是$[-1,1]$.

条件 7.5　给定数列前 n 项乘积不等式

条件分析：当给定数列前 n 项乘积的不等式时，关键是要利用“乘积的对数等于对数之和”将“乘积不等式”转化为“求和不等式”.

例 21.44　（丙 1771-2）已知函数$f(x)=x-1-a\ln x$，且当$a=1$时，$f(x)\geqslant 0$. 设m为整数，且对于任意正整数n，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$，求$m$的最小值.

解析 1：$\because$题设当$a=1$时，$f(x)\geqslant 0$，即$x-1-\ln x\geqslant 0$，亦即$\ln x\leqslant x-1$.

令$x=1+\frac{1}{2^n}$，则代入上式可得：$\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant\frac{1}{2^n}$.

从题设条件发现要令$x=1+\frac{1}{2^n}$

从而$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$.

$\because$由等比数列前n项和公式可得：$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$

缩放一次

$\therefore \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<1$，

即$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\ln e$，

反用对数的乘法运算法则

亦即$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e$.

利用对数函数的性质可得

$\because$当$n=1$时，$\left(1+\frac{1}{2}\right)=1.5>1$；当$n=2$时，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=1.5\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\approx 1.5+0.4=1.9>1$；

当$n=3$时，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=1.9\times\left(1+\frac{1}{8}\right)\approx 1.9+0.2=2.1>2$. 且对于任意正整数$n$，满足$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<e<m$，$\therefore m$的最小值为3.

解析 2：题设当$a=1$时，$f(x)=x-1-\ln x\geqslant 0$，即$\ln x\leqslant x-1$，亦即$\ln(x+1)\leqslant x$，当且仅当$x=0$时，等号成立. 令$x=\frac{1}{2^n}(k\in\mathbf{N}^*)$，则$\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant\frac{1}{2^n}$.

从题设条件发现要$x=\frac{1}{2^n}$

一方面，$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$，

即 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}$.　反用对数的乘法运算法则和对数函数性质可得

另一方面，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)>\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=\frac{135}{64}>2$.

综上所述，当 $n\geqslant 3$ 时，$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}$.

因此，对于任意正整数 n，若使 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$ 恒成立，必须满足 $m\geqslant 3$.

所以，m 的最小值为 3.

条件 7.6　给定函数的切线斜率求切线截距的取值范围

条件分析：当给定函数的切线斜率时，关键是利用“函数的导数等于切线的斜率”来建立导函数不等式.

例 21.45（甲 1321-2）已知函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$，当曲线 $y=f(x)$ 的切线 l 的斜率为负数时，求 l 在 x 轴上截距的取值范围.

解析：$\because f'(x)=2x\mathrm{e}^{-x}-x^2\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^{-x}x(x-2)$，且当 $x\in(-\infty,0)$ 或 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore$ 满足切线 l 的斜率为负数的切点必在 $(-\infty,0)$ 或 $(2,+\infty)$ 内.

设满足条件的切点为 $(t,f(t))$，则 $t\in(-\infty,0)$ 或 $t\in(2,+\infty)$.

切线方程为 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$，令 $y=0$ 可解得：$x=t-\frac{f(t)}{f'(t)}=t+\frac{t}{t-2}$，即切线 l 在 x 轴上的截距 $D(t)$ 为 $D(t)=t+\frac{t}{t-2}=t-2+\frac{t}{t-2}+2$.

$\because t\in(-\infty,0)$ 或 $t\in(2,+\infty)$，$\therefore$ 问题转化为求上述函数的值域.

当 $t\in(-\infty,0)$ 时，$\because D'(t)=1-\frac{2}{(t-2)^2}>0$，$\therefore D(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，即 $D(t)<D(0)=0$；

当 $t\in(2,+\infty)$ 时，$\because t-2>0$，$\therefore D(t)=t-2+\frac{2}{t-2}+3\geqslant 2\sqrt{2}+3$，即 $D(t)\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

因此，直线 l 在 x 轴上截距的取值范围为 $(-\infty,0)\cup\left[3+2\sqrt{2},+\infty\right)$.

问题 8　证明问题

证明分析：利用导数证明与函数有关的问题，关键是要将所求证的结论利用函数的性质或问题本身的几何意义转化为相应的函数问题.

证明 8.1　证明两个函数只有一个交点

证明分析：证明两个函数只有一个交点的问题，既可以转化为两个函数对应的曲线存在交点的问题，也可以转化为一个函数存在零点的问题.

例 21.46（甲 1421-2）已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+x+2$，证明：当 $k<1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.

证明 1：$\because$ 题证：当 $k<1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.　从关键条件出发

$\therefore$ 设 $f(x)=kx-2$，　方程思想：将两个函数有交点转化为方程的解

则 $k=\dfrac{f(x)+2}{x}$.　　函数思想：分离参数 k，利用题设 $k<1$，构造新函数

设 $g(x)=\dfrac{f(x)+2}{x}=x^2-3x+1+\dfrac{4}{x}$，　　构造新函数，依据 $k<1$ 想到研究其单调性

则 $g'(x)=2x-3-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{2x^3-3x^2-4}{x^2}$，　　分母 $x^2>0$，转移目标到分子

再令 $h(x)=2x^3-3x^2-4$，　　以分子为整体构造新函数

则 $h'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$.　　发现导函数是开口向上的抛物线

由抛物线图像 21.8 所示，可知：当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 从 $h(0)=-4$ 递减到 $h(1)=-5$，

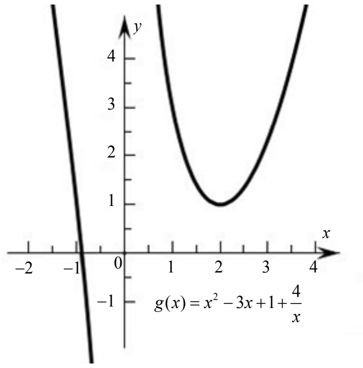


图 21.8

当 $x\in(-\infty,0)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 从 $h(1)=-5$ 开始递增.

令 $h(x)=0$，即 $2x^3-3x^2-4=0$，解得：$x=2$.

即当 $(-\infty,0)\cup(0,2)$ 时，$g'(x)<0$，亦即 $g(x)$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 和 $(0,2)$ 上递减；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，即 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上递增.

因此，当 $x\in(0,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 时，$g(x)\geqslant g(2)=1$

当 $x\in(-1,0)$ 时，$g(x)<1$ 且单调递减.

即当 $k<1$ 时，$k=g(x)$ 有唯一零点，即曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点，且交点横坐标 $x\in(-1,0)$.

证明 2：$\because$ 题证：当 $k<1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.　　从关键条件出发

$\therefore$ 设 $f(x)=kx-2$，　　方程思想：将两个函数有交点转化为方程的解

即 $f(x)-(kx-2)=0$.　　条件转化：将两个函数的交点转化为一个函数零点

设 $g(x)=f(x)-(kx-2)=x^3-3x^2+(1-k)x+4$，　　构造零点函数

则 $g'(x)=3x^2-6x+(1-k)$.　　求导研究单调性

由题设知：$1-k>0$，当 $x\leqslant0$ 时，$g'(x)=3x^2-6x+(1-k)>0$，$g(x)$ 单调递增.

又 $\because$ $g(-1)=k-1<0$，$g(0)=4>0$，$\therefore$ $g(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 上有唯一实根.

当 $x>0$ 时，令 $h(x)=x^3-3x^2+4$，则 $g(x)=h(x)+(1-k)x>h(x)$，

$\because$ $h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，$\therefore$ $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，即有 $g(x)>h(x)\geqslant h(2)=0$，亦即 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有实根.

综上所述，$g(x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上有唯一实根，即曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点.

例 21.47（甲 1821-2）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$，证明：$f(x)$ 只有一个零点.

分析：设 $f(x)=0$，则 $\dfrac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)=0$，即 $a(x^2+x+1)=\dfrac{1}{3}x^3$. 据此可以有如下三种证法.

证明 1：（基于 $\dfrac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)=0$）

$\because$ $x^2+x+1>0$，$\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$. 令 $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}-3a$，则 $g'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+x+1)-x^3(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$=\dfrac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2}\geqslant0$.

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且仅当 $x=0$ 时，$g'(x)=0$，因此，函数 $g(x)$ 至多有一个零点，即函数 $f(x)$ 至多有一个零点．

包括没有零点

又 $\because$ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)=\frac{1}{3}(x^3-1+1)-a(x^2+x+1)=(x^2+x+1)\left[\frac{1}{3}(x-1)-a\right]+\frac{1}{3}$，

即 $f(x)=\frac{(x^2+x+1)[x-(3a+1)]}{3}+\frac{1}{3}$．且 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0$，$\therefore$ 当 $x\geqslant 3a+1$ 时，$f(x)\geqslant\frac{1}{3}>0$．

令 $f(x)<0$ 可得：$\frac{(x^2+x+1)[x-(3a+1)]}{3}+\frac{1}{3}<0$，即 $(x^2+x+1)[x-(3a+1)]<-1$．且 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，解 $\frac{3}{4}[x-(3a+1)]<-1$ 可得：$x<(3a+1)-\frac{4}{3}=3a-\frac{1}{3}$．

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x\in\left(-\infty,3a-\frac{1}{3}\right)$ 时，$f(x)<0$；当 $x\in(3a+1,+\infty)$ 时，$f(x)>\frac{1}{3}>0$．因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上只有唯一零点．

证明 2：（基于 $a(x^2+x+1)=\frac{1}{3}x^3$，分离参数 a）

将 $a(x^2+x+1)=\frac{1}{3}x^3$ 变为 $a=\frac{x^3}{3(x^2+x+1)}$．

前提是 $x^2+x+1\neq 0$

设 $x^2+x+1=0$，$\because$ $\Delta=B^2-4AC=1-4=-3<0$，$\therefore$ $x^2+x+1=0$ 无解，即 $x^2+x+1\neq 0$．

或设 $y=x^2+x+1$，则当 $x=-\frac{B}{2A}=-\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=C-\frac{B^2}{4A}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>0$，即 $x^2+x+1\neq 0$．

$\because$ $x^2+x+1\neq 0$，$\therefore$ 由 $a(x^2+x+1)=\frac{1}{3}x^3$ 可得：$a=\frac{x^3}{3(x^2+x+1)}$．

对此式可作两种处理：①令 $y_1=a$，$y_2=\frac{x^3}{3(x^2+x+1)}$，研究 $y_2=\frac{x^3}{3(x^2+x+1)}$ 的单调性，确定它与 $y_1=a$ 的交点个数．②直接将参数 a 看成是变量 x 的函数，研究 $a(x)$ 的单调性．两种处理方案的最终结果都是需要研究函数 $\varphi(x)=\frac{x^3}{3(x^2+x+1)}$ 具有单调性．

单调递增或递减均可

$$\because\ \varphi'(x)=\frac{3x^2(x^2+x+1)-x^3(2x+1)}{3(x^2+x+1)^2}=\frac{x^2(3x^2+3x+3-2x^2-x)}{3(x^2+x+1)^2}=\frac{x^2\left[(x+1)^2+2\right]}{3(x^2+x+1)}>0,$$

$\therefore$ $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增．即 $y_1=a$ 与 $y_2=\frac{x^3}{3(x^2+x+1)}$ 有唯一交点，或者理解为：对于任意 $a\in(-\infty,+\infty)$，存在唯一 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 满足 $a=\frac{x_0^3}{3(x_0^2+x_0+1)}$．从而证明：函数 $f(x)$ 有唯一零点．

证明 3：（基于 $a(x^2+x+1)=\frac{1}{3}x^3$，转化为两个函数的相交问题）

当 $x=0$ 时，两函数交于点 $(0,0)$．

当 $x\neq 0$ 时，将 $a(x^2+x+1)=\frac{1}{3}x^3$ 两边同除以 x 可得：$a\left(x+\frac{1}{x}+1\right)=\frac{1}{3}x^2$．

令 $g(x)=\frac{1}{3}x^2$，$h(x)=a\left(x+\frac{1}{x}+1\right)$，则问题转化为两函数的交点数量问题．

$\because g(x)=\frac{1}{3}x^2$ 是过点 $(0,0)$ 开口向上的抛物线，而 $h(x)=a\left(x+\frac{1}{x}+1\right)$ 的函数图像是双“对勾”，如图 21.9 所示.

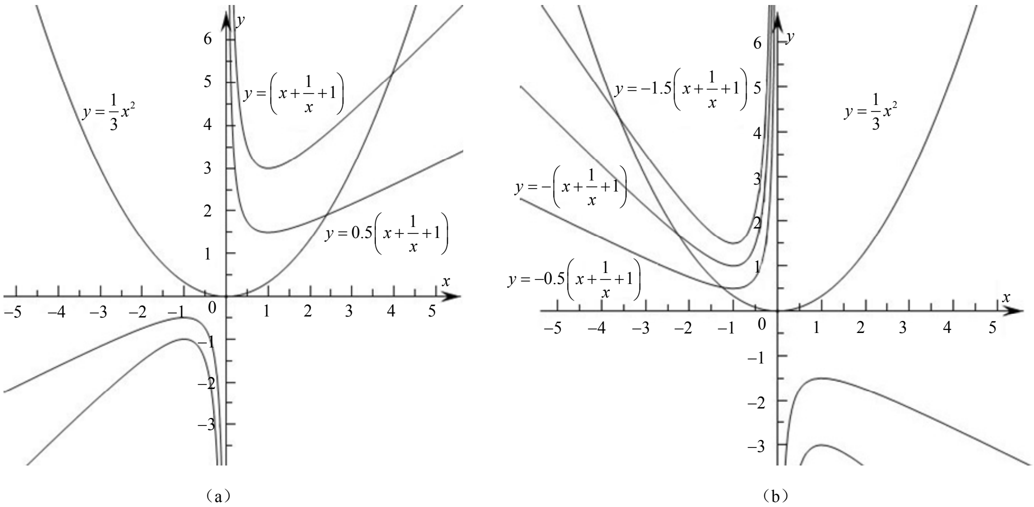


图 21.9

当 $a>0$ 时，双“对勾”函数图像在 1、3 象限，$\therefore$ 两函数图像在第 1 象限有一个交点，如图 21.9（a）所示；

当 $a<0$ 时，双“对勾”函数图像在 2、4 象限，$\therefore$ 两函数图像在第 2 象限有一个交点，如图 21.9（b）所示；

当 $a=0$ 时，两函数在点 $(0,0)$ 交于一点.

综上所述，函数 $g(x)=h(x)$ 有唯一解，即函数 $f(x)$ 有唯一零点.

证明 8.2　证明函数的零点横坐标不等式

证明分析：所谓函数的“零点”通常是函数值为 0 的点，因此，当令函数值等于 0 时，即可获得关于零点横坐标的方程，据此，在特定的条件限制下可能会形成有关零点横坐标的不等式. 因此，解决问题的关键就是研究形成不等式的限制条件.

例 21.48（乙 1671-2）已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 在 $a>0$ 时有两个零点，设 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$.

证明 1：（分析讨论法）$\because$ 题设 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$，

$\therefore f'(x)=e^x+(x-2)e^x+2a(x-1)=(x-1)(e^x+2a)$.

$\because e^x>0$，且题设 $a>0$，$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$.

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\because f(1)=-e<0$，$\therefore$ 函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点.

设两个零点：$x_1<x_2$，则 $x_1\in(-\infty,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$.

$\because$ 欲证：$x_1+x_2<2$，需证：$x_1<2-x_2$.　将求证目标转化为坐标不等式，发现新目标

为了便于利用函数的单调性根据函数值的大小来推断自变量的大小，需要确定 $2-x_2$ 的范围.

$\because x_2\in(1,+\infty)$，$\therefore 1<x_2$，即 $1-x_2<0$，两边再加 1 可得：$2-x_2<1$，　加 1 的目的是凑出 $2-x_2$

$\because x_1\in(-\infty,1)$，$2-x_2\in(-\infty,1)$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，

$\therefore$ 目标转化为证明：$f(x_1)>f(2-x_2)$.

又∵ $f(x_1)=0$（x_1 是两个零点之一），∴目标进一步转化为证明：$f(2-x_2)<0$．

至此发现新目标：需要计算 $f(2-x)$．

∵ $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$，　①

∴ $f(2-x)=-x\mathrm{e}^{2-x}+a(1-x)^2$．　②

由于从②式无法直接计算出 $f(2-x)$，比较①②两式可见：$a(x-1)^2=a(1-x)^2$．

因此②–①可得：$f(2-x)-f(x)=-x\mathrm{e}^{2-x}-(x-2)\mathrm{e}^x$．　发现新的研究对象

令 $g(x)=f(2-x)-f(x)=-x\mathrm{e}^{2-x}-(x-2)\mathrm{e}^x$，　构造新的目标函数

则 $g'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^{2-x}-\mathrm{e}^x)$．

当 $x>1$ 时，∵ $(x-1)>0$，$(2-x)<1$，$\mathrm{e}^{2-x}-\mathrm{e}^x<0$，∴ $g'(x)<0$．

即当 $x>1$ 时，$g(x)=f(2-x)-f(x)$ 单调递减，且 $g(1)=f(2-1)-f(1)=0$．

又∵ $x_2\in(1,+\infty)$，∴ $g(x_2)=f(2-x_2)-f(x_2)<0$，

即 $f(2-x_2)<f(x_2)=0$（x_1 是两个零点之一），故 $f(2-x_2)<f(x_1)$．

∵ $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，且 $x_1\in(-\infty,1)$，$2-x_2<1$，

∴ $2-x_2>x_1$，即 $2>x_2+x_1$，亦即 $x_1+x_2<2$．　证毕

证明 2：（转化思想，构造法）

∵求证目标是：$x_1+x_2<2$，即 $x_1<2-x_2$，　问题转化

∴基于利用函数的单调性考虑，可以想到构造函数 $g(x)=f(x)-f(2-x)$，

则 $g(x)=\left[(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2\right]-\left[-x\mathrm{e}^{2-x}+a(1-x)^2\right]=(x-2)\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{2-x}$，

$g'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+(1-x)\mathrm{e}^{2-x}=(x-1)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2-x})\geqslant 0$，因此，$g(x)$ 是增函数，且 $g(1)=-\mathrm{e}+\mathrm{e}=0$．

不妨设 $x_1<1<x_2<2$，则 $2-x_1>1$，即 $x_1<1<2-x_1$．

∵ $g(x)$ 是增函数，∴ $g(x_1)<g(1)=0$，即 $f(x_1)-f(2-x_1)<0$；

又∵ $f(x_2)=f(x_1)=0$，∴ $f(x_2)-f(2-x_1)<0$，即 $f(x_2)<f(2-x_1)$．

又∵ $f'(x)=\mathrm{e}^x+(x-2)\mathrm{e}^x+2a(x-1)=(x-1)(\mathrm{e}^x+2a)$，且题设 $a>0$，

∴当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增．

又∵ $1<x_2<2$，$1<2-x_1$，且 $f(x_2)<f(2-x_1)$，∴ $x_2<2-x_1$，即 $x_2+x_1<2$．

> **经验总结：**当求证函数的两个零点横坐标不等式时，①可以将求证结果转化为不等号的一侧只有一个零点横坐标，而将另一侧整体作为横坐标进行研究；②可以构造两边坐标的函数差值函数．

例 21.49（乙 1871-2）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$，当且仅当 $a>2$ 时，函数 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1x_2=1>0$．证明：$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<a-2$．

证明：∵ $f(x)=\dfrac{1}{x}-x+a\ln x$，

∴ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{x_2-x_1}\left(\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}-x_2+x_1+a\ln x_2-a\ln x_1\right)=-2+a\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$．

∵ $a>0$，∴欲证：$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<a-2$，只需证明：$\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}<1$．

将 $x_2=\dfrac{1}{x_1}>1$ 代入 $\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$ 可得：$\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-2\ln x_1}{\dfrac{1}{x_1}-x_1}(0<x_1<1)$． 目的是确保 $x\in(0,1)$

令 $g(x)=\dfrac{-2\ln x}{\dfrac{1}{x}-x}(0<x<1)$，则 $g'(x)=\dfrac{\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x^2}+1}=\dfrac{2x}{1+x^2}>0(0<x<1)$．因此，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

又∵ $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{x^2+1}=1$，∴ $g(x)<1$．故原式得证. 洛必达法则

经验总结：当遇到双变量不等式时，往往需要利用双变量之间的约束条件转化为只含有一个变量的不等式，然后再构造函数求导，结合函数的单调性进行证明.

证明 8.3　证明函数的极值不等式

证明分析：证明函数的极值不等式，需要在研究函数单调性确定函数极值点的基础上，寻找与所证目标相对应的自变量.

例 21.50（甲 1771-2）已知函数 $f(x)=x^2-x-x\ln x$，且 $f(x)\geqslant0$，证明：$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$．

证明 1：（评分标准详解，分析讨论法）

∵题设 $f(x)=x^2-x-x\ln x$，

∴ $f'(x)=2x-1-(\ln x+1)=2x-\ln x-2$，令 $h(x)=f'(x)=2x-\ln x-2$，则 $h'(x)=2-\dfrac{1}{x}$．

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$．

所以，$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，$h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

∵ $h(e^{-2})=2e^{-2}-\ln e^{-2}-2=2e^{-2}>0$，$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\times\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{1}{2}-2=\ln2-1<0$，

∴ $\exists x_0\in\left(e^{-2},\dfrac{1}{2}\right)$ 使得：$h(x_0)=0$．又∵ $h(1)=0$，∴在 $(2^{-1},+\infty)$ 上存在另一个零点“1”.

∵ $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，且 $h(x_0)=0$，

∴当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(x_0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

又∵ $h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，且 $h(1)=0$，

∴当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时，$h(x)<0$，即 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上所述，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因此，$x=x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一极大值点．故由 $f'(x_0)=0$ 可得：$\ln x_0=2(x_0-1)$．

又∵ $f(x)=x^2-x-x\ln x$，∴ $f(x_0)=x_0^2-x_0-2x_0(x_0-1)=x_0(1-x_0)=-\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$．

$\because$ 前证：$x_0\in\left(e^{-2},\dfrac{1}{2}\right)$，$\therefore f(x_0)<\dfrac{1}{4}$.　①

$\because f(x_0)$ 是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上的最大值，且 $\dfrac{1}{e}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\therefore f\left(\dfrac{1}{e}\right)<f(x_0)$.

又 $\because f(x)=x^2-x-x\ln x$，$\therefore f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\left(\dfrac{1}{e}\right)^2-\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}\ln\dfrac{1}{e}=e^{-2}$，故 $e^{-2}<f(x_0)$，　②

综合①②两式可得 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

证明 2：（函数思想）

$\because$ 题设 $f(x)=x^2-x-x\ln x$，$\therefore f'(x)=2x-1-(\ln x+1)=2x-\ln x-2$.

令 $h(x)=f'(x)=2x-\ln x-2$，则 $h'(x)=2-\dfrac{1}{x}$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$.

所以，$h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

$\because h\left(e^{-2}\right)=2e^{-2}-\ln e^{-2}-2=2e^{-2}>0$，$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\times\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{1}{2}-2=\ln 2-1<0$，

$\therefore \exists x_0\in\left(e^{-2},2^{-1}\right)$ 使得 $h(x_0)=0$. 即 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值.

一方面，$f(x)$ 在 $\left(e^{-2},x_0\right)$ 上单调递增，因此有 $f(x_0)>f\left(e^{-2}\right)=e^{-2}+e^{-4}>e^{-2}$；

另一方面，$\because$ 由 $h(x_0)=0$ 可得：$2x_0-2-\ln x_0=0$，且 $x_0<\dfrac{1}{2}$，

$\therefore f(x_0)=x_0^2-x_0-x_0(2x_0-2)=-x_0^2+x_0=\dfrac{1}{4}-\left(x_0-\dfrac{1}{2}\right)^2<\dfrac{1}{4}=2^{-2}$.

综上所述，$e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$.

证明 8.4　证明函数不等式

证明分析： 证明函数不等式，实际上只要求出函数的最值即可，因此关键是通过研究函数的单调性来确定函数的极值点，并求出极值.

例 21.51（乙 1471-2）设函数 $f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}$，证明：$f(x)>1$.

分析： 由求证目标 $f(x)>1$ 可得：$e^x\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}>1$，即 $e^x\ln x>1-\dfrac{2e^{x-1}}{x}$.

证明： $\because$ 函数的定义域为 $x\in(0,+\infty)$，且 $e^x>0$，

$\therefore f(x)>1$ 两边同乘以 x，并除以 e^x 可得：$x\ln x>xe^{-x}-2e^{-1}$.

目标是使不等式两边分别包含对数或指数函数，然后来比较两种超越函数的大小.

设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x$. 令 $g'(x)=0$，解得：$x_0=\dfrac{1}{e}\in(0,1)$.

因此，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增.

因此，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g(x_0)$，且 $g(x_0)=x_0\ln x_0=-\dfrac{1}{e}<1$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-2e^{-1}$，则 $h'(x)=(1-x)e^{-x}$.

因此，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$.

故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

从而 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 $h(1)$，且 $h(1)=-\frac{1}{e}$. 故 $h(x)\leqslant-\frac{1}{e}$，

函数 $g(x)$，$h(x)$ 的单调性如表 21.2 所示.

表 21.2

x	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\frac{1}{e}$	$\left(\frac{1}{e},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$g(x)$	递减	$-\frac{1}{e}$	递增	0	递增
$h(x)$	递增	$\frac{1}{e}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}-2\right)$	递增	$-\frac{1}{e}$	递减
$g(x)-h(x)$	>0	>0	>0	>0	>0

综上所述，当 $x>0$ 时，$g(x)-h(x)>0$，即 $f(x)>1$.

例 21.52 （丙 1621-2）设函数 $f(x)=\ln x-x+1$，且当 $0<x<1$ 时，$\frac{1}{x}>1$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1>0$，函数单调递增，当 $1<x<+\infty$ 时，$\frac{1}{x}<1$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，函数单调递减. 证明：当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$1<\frac{x-1}{\ln x}<x$.

分析：将求证目标 $1<\frac{x-1}{\ln x}<x$ 等价转换为 $\begin{cases}1<\frac{x-1}{\ln x}\\ \frac{x-1}{\ln x}<x\end{cases}$.

先分析 $1<\frac{x-1}{\ln x}$：当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x>0$，即 $\ln x<x-1$，亦即 $f(x)<0=f(1)$.

再分析 $\frac{x-1}{\ln x}<x$：当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x>0$，即 $\frac{x-1}{x}<\ln x$，亦即 $\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1$.

证明：∵当 $x=1$ 时，$f'(x)=0$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ∴ $f_{\max}(x)=f(1)=0$. 因此，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，由 $f(x)<f(1)$ 可得：$\ln x-x+1<0$，即 $\ln x<x-1$，亦即 $1<\frac{x-1}{\ln x}$；由 $f\left(\frac{1}{x}\right)<f(1)$ 可得：$\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+1<0$，即 $\frac{x-1}{x}<-\ln\frac{1}{x}$，亦即 $\frac{x-1}{x}<\ln x$，故 $\frac{x-1}{\ln x}<x$.

综上所述，$1<\frac{x-1}{\ln x}<x$.

例 21.53 （乙 1821-2）已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$. 证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant0$.

证明 1：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)=ae^x-\ln x-1\geqslant\frac{1}{e}e^x-\ln x-1$. ∵ $x>0$，∴ $e^x>1>0$.

设 $g(x)=\frac{1}{e}e^x-\ln x-1$，则 $g'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$. 显然，当 $x=1$ 时，$g'(1)=0$.

当 $0<x<1$ 时，$x-1<0$，$e^{x-1}<1$，而 $\frac{1}{x}>1$，$g'(x)<0$；

当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$e^{x-1}>1$，而 $\frac{1}{x}<1$，$g'(x)>0$.

因此，函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，即在 $x=1$ 处取得最小值，且 $g_{\min}(x)=g(1)=0$，故 $f(x)\geqslant0$.（证毕）

证明 2：$\because f(x)=ae^x-\ln x-1$，$\therefore$要证：$f(x)\geqslant 0$，只需证：$ae^x-\ln x-1\geqslant 0$，即 $ae^x\geqslant \ln x+1$.

又$\because e^x>1>0$，　　题设函数定义域是 $x>0$

$\therefore a\geqslant \dfrac{\ln x+1}{e^x}$.　　$\because$只有 $a\geqslant h_{\max}(x)$ 才能保证 $a\geqslant h(x)$，$\therefore$猜想函数 $h(x)$ 在定义域上先递增后递减

设 $h(x)=\dfrac{\ln x+1}{e^x}$，则问题转化为求函数 $h(x)$ 的最大值.

$\because h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot e^x-(\ln x+1)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}-(\ln x+1)}{e^x}$，且设 $\phi(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x-1(x>0)$，则 $\phi'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{(1+x)}{x^2}<0(x>0)$，$\therefore$函数 $\phi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

又$\because \phi(1)=0$，　　发现导函数分子的零点至关重要

$\therefore$函数 $\phi(x)$ 在 $(0,1)$ 上为正，在 $(1,+\infty)$ 上为负.

因此，函数 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，即在 $x=1$ 处取得最大值 $h_{\max}(x)=h(1)$.

又$\because$前设 $h(x)=\dfrac{\ln x+1}{e^x}$，$\therefore h_{\max}(x)=h(1)=\dfrac{1}{e}$. 求得：$a\geqslant \dfrac{1}{e}$.（证毕）

证明 3：$\because f(x)=ae^x-\ln x-1$，$\therefore$要证：$f(x)\geqslant 0$，只需证：$ae^x-\ln x-1\geqslant 0$，即 $ae^x\geqslant \ln x+1$.

又$\because$题设函数定义域是 $x>0$，$\therefore$两边同除以 x 可得：$\dfrac{ae^x}{x}\geqslant \dfrac{\ln x+1}{x}$.

设 $g(x)=\dfrac{ae^x}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{axe^x-ae^x}{x^2}=\dfrac{a(x-1)e^x}{x^2}$.　　①

设 $h(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{x}+0\right)\cdot x-1\times(\ln x+1)}{x^2}=-\dfrac{\ln x}{x^2}$.　　②

$\because$由②可见：当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，亦即 $h_{\max}(x)=h(1)=1$.

又$\because$由①可见：$g'(1)=0$，$\therefore$为了确保 $g(x)\geqslant h(x)$，需使当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$. 即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $g_{\min}(x)=g(1)=1$.

由当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，或当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$ 可得：$a>0$.

由 $g_{\min}(x)=g(1)=1$ 可得：$\dfrac{a_{\min}e^1}{1}=1$，解得：$a_{\min}=\dfrac{1}{e}$.

综合 $a>0$ 和 $a_{\min}=\dfrac{1}{e}$ 可得：$a\geqslant \dfrac{1}{e}$.（证毕）

经验总结：证明 1 是用演绎的方法直接证明，证明 2 和证明 3 是用综合法进行证明，其实质是假设 $f(x)\geqslant 0$ 成立，求出参数 a 的取值范围是 $a\geqslant \dfrac{1}{e}$，只是证明 2 和证明 3 假设 $f(x)\geqslant 0$ 的变形方式不同而已. 因此，这种证法相当于是将证明题转化为已知结果求参数取值范围的计算题.

例 21.54　（甲 1871-1）已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$. 若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$.

分析：$\because$题设：$f(x)=e^x-ax^2$，$\therefore$当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x^2$.

欲证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$，即 $e^x-x^2\geqslant 1$，需证明① $e^x-x^2-1\geqslant 0$ 或② $e^x\geqslant x^2+1$.

证明 1：证明①可设：$g(x)=e^x-x^2-1$，则 $g'(x)=e^x-2x$.

又$\because g''(x)=e^x-2$，$\therefore$令 $g''(x)=0$ 可得：$e^x-2=0$，解得：$x=\ln 2$.

因此，当 $x\in(0,\ln 2)$ 时，$g''(x)<0$；当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$g''(x)>0$.

即 $g'_{\min}(x)=g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$.

因此，$g''(x)>0$ ，即 $g(x)=e^x-x^2-1$ 在 $x\geqslant 0$ 时单调递增.

又∵ $g(0)=0$ ，∴ $g(x)=e^x-x^2-1\geqslant 0$ ，即 $e^x-x^2\geqslant 1$ ，亦即 $f(x)\geqslant 1$.

当由② $e^x\geqslant x^2+1$ 出发时，∵ $e^x>0$ ，$x^2+1>0$ ，

∴ $e^x\geqslant x^2+1$ 可以化为③ $\dfrac{x^2+1}{e^x}\leqslant 1$ （$\dfrac{x^2+1}{e^x}-1\leqslant 0$ ）或④ $\dfrac{e^x}{x^2+1}\geqslant 1$ （$\dfrac{e^x}{x^2+1}-1\geqslant 0$ ）.

即 $e^x-x^2\geqslant 1$ ，原命题得证.

证明 2：证明②可设 $g(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ ，

∵ $e^x>0$ ，∴ $e^x\geqslant x^2+1$ 两边可除 e^x

则 $g'(x)=\dfrac{2xe^x-e^x\left(x^2+1\right)}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{-\left(x^2-2x+1\right)}{e^x}=-\dfrac{(x-1)^2}{e^x}\leqslant 0$.

即 $g(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ 在 $x\geqslant 0$ 时，单调递减，即 $g(x)\leqslant g(0)=1$ ，故原命题得证.

证明 3：证明②可设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ ，

∵ $x^2+1>0$ ，∴ $e^x\geqslant x^2+1$ 两边可除 x^2+1

则 $g'(x)=\dfrac{e^x\left(x^2+1\right)-2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{(x-1)^2e^x}{\left(x^2+1\right)^2}\geqslant 0$.

即 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ 在 $x\geqslant 0$ 时，单调递增，即 $g(x)\geqslant g(0)=1$ ，故原命题得证.

例 21.55 （丙 1871-1）已知函数 $f(x)=\left(2+x+ax^2\right)\ln(1+x)-2x$ ，若 $a=0$ ，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$ ；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

证明 1：∵ $f(x)=\left(2+x+ax^2\right)\ln(1+x)-2x$ ，∴当 $a=0$ 时，$f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$.

要证当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$ ；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$ ，实际上就是研究函数在两个区间的值域，或者研究函数在两个不同区间的最值，因此可先对函数进行求导，再研究其单调性.

∵ $f'(x)=\ln(1+x)+\dfrac{2+x}{1+x}-2=\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}-1$. ①

因上式不便直接求零点，故再次求导可得：$f''(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1+x)^2}=-\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2+\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$. ②

∴将 $f''(x)$ 看成是关于 $\dfrac{1}{1+x}$ 的二次函数：令 $f''(x)=0$ 可得：$\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)=0$ ，解得：$x=0$.

按题证目标，分为 $-1<x<0$ 和 $x>0$ 两种情形进行讨论：

①当 $-1<x<0$ 时，$0<1+x<1$ ，$\dfrac{1}{1+x}>1>0$ ，$f''(x)=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)<0$ ，$f'(x)$ 单调递减.

又∵ $f'(0)=0$ ，∴ $f'(x)<0$ ，即 $f(x)$ 单调递减.

又∵ $f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$ ，∴ $f(0)=0$ ，即 $f(x)<0$.

②当 $x>0$ 时，$1+x>1$ ，$0<\dfrac{1}{1+x}<1$ ，$f''(x)=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\left(1-\dfrac{1}{1+x}\right)>0$ ，$f'(x)$ 单调递增.

又∵ $f'(0)=0$ ，∴ $f'(x)>0$ ，即 $f(x)$ 单调递增.

又∵ $f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$ ，∴ $f(0)=0$ ，即 $f(x)>0$.

证明 2：∵ $f(x)=\left(2+x+ax^2\right)\ln(1+x)-2x$ ，∴当 $a=0$ 时，$f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$.

∵求证：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$ ；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$. 而当 $x>-1$ 时，$2+x>1>0$ ，

$\therefore f(x)$ 的正负与 $2+x$ 无关，为此将 $f(x)$ 化为 $f(x)=(2+x)\left[\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x}\right]$.

再令 $g(x)=\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}(x>-1)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\geqslant 0$.

即 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\because g(0)=0$，

$\therefore$ 当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<g(0)=0$，即 $f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，即 $f(x)>0$.

> **经验总结：** 当函数解析式中包含多项式与基本超越函数（指数函数或对数函数）的乘积时，可以将多项式从函数解析式中提取出来，再构造基本超越函数与多项式相加的函数进行研究.

例 21.56（丙 1821-2）已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{e^x}$，证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+e\geqslant 0$.

分析： 证明当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+e\geqslant 0$ 的思路有两条．一是演绎法直接证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+e\geqslant 0$；二是分析法：假设 $f(x)+e\geqslant 0$，解得 $a\geqslant 1$.

证明 1：（演绎法）

$\because$ 题设 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{e^x}$，$\therefore f(x)+e=\dfrac{ax^2+x-1+e^{x+1}}{e^x}=\left(ax^2+x-1+e^{x+1}\right)e^{-x}$.

又 $\because a$ 是 $x^2\geqslant 0$ 的系数，$\therefore$ 当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+e\geqslant\left(x^2+x-1+e^{x+1}\right)e^{-x}$.　　*$a$ 取最小值 1*

令 $g(x)=x^2+x-1+e^{x+1}$，　　*欲证 $f(x)+e\geqslant 0$，而 $e^{-x}>0$，需证 $g(x)=x^2+x-1+e^{x+1}>0$*

则 $g'(x)=2x+1+e^{x+1}$.

又 $\because g''(x)=2+e^{x+1}>0$，$\therefore g'(x)=2x+1+e^{x+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

又 $\because g'(-1)=2\times(-1)+1+e^{-1+1}=0$，$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$. 因此，$g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增．即 $g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值，$g_{\min}(x)=g(-1)=(-1)^2+-1-1+e^{-1+1}=0$．故 $f(x)+e\geqslant 0$.（证毕）

证明 2：（演绎法）

由证明 1 可得：当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+e\geqslant\left(x^2+x-1+e^{x+1}\right)e^{-x}$.

令 $g(x)=\left(x^2+x-1+e^{x+1}\right)e^{-x}$，则 $g'(x)=\left(2x+1+e^{x+1}\right)e^{-x}+\left(x^2+x-1+e^{x+1}\right)e^{-x}(-1)=\left(-x^2+x+2\right)e^{-x}=-(x+1)(x-2)e^{-x}$.

$\because e^{-x}>0$，$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in(-1,2)$ 时，$g'(x)>0$.

因此，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

又 $\because g(-1)=0$，$g(2)=\dfrac{5}{e^2}+e>g(-1)=0$，$\therefore$ 当 $x\leqslant 2$ 时，$g(x)\geqslant 0$.

又 $\because g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上递减，

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-1+e^{x+1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1+e^{x+1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+e^{x+1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x+1}}{e^x}=e>0$，

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$g(x)>0$.

综上所述，当 $a\geqslant 1$ 时，$g(x)\geqslant 0$（仅当 $x=-1$ 时等号成立）．即当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+e\geqslant 0$（仅当 $a=1$，$x=-1$ 时等号成立）.

证明 3：（分析法，参变分离求极值）

假设：$f(x)+e\geqslant 0$，则 $f(x)+e=\dfrac{ax^2+x-1+e^{x+1}}{e^x}\geqslant 0$.

又∵ $e^x>0$，∴ $ax^2+x-1+e^{x+1}\geqslant 0$，即 $ax^2\geqslant 1-x-e^{x+1}$，亦即 $a\geqslant\frac{1-x-e^{x+1}}{x^2}$.

设 $g(x)=\frac{1-x-e^{x+1}}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{(-1-e^{x+1})x^2-2x(1-x-e^{x+1})}{x^4}=-\frac{x+xe^{x+1}+2-2x-2e^{x+1}}{x^3}=\frac{(x-2)(1-e^{x+1})}{x^3}$.

令 $g'(x)=0$ 可得：$x_1=-1$，$x_2=2$.

当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，∵ $x-2<0$，$1-e^{x+1}>0$，$x^3<0$，∴ $g'(x)>0$；

当 $x\in(-1,0)$ 时，∵ $x-2<0$，$1-e^{x+1}<0$，$x^3<0$，∴ $g'(x)<0$；

当 $x\in(0,2)$ 时，∵ $x-2<0$，$1-e^{x+1}<0$，$x^3>0$，∴ $g'(x)>0$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，∵ $x-2>0$，$1-e^{x+1}<0$，$x^3>0$，∴ $g'(x)<0$.

因此，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减．即函数 $g(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=2$ 两处取得极大值.

又∵ $g(x)=\frac{1-x-e^{x+1}}{x^2}$，∴ $g(-1)=1$，$g(2)=-\frac{1+e^3}{4}<1$.

因此，$g_{\max}(x)=\max\{g(-1),g(2)\}=1$，即 $g(x)\leqslant 1$．故由 $a\geqslant g(x)=\frac{1-x-e^{x+1}}{x^2}$ 可解得 $a\geqslant 1$.

证明 8.5　证明含参函数不等式

证明分析：证明含参函数不等式，实际上只要求出含参函数在参数约束条件下的极值即可，因此关键是需要通过研究含参函数在参数约定范围内的单调性来确定函数的极值点，并求出极值.

例 21.57（甲 1371-2）已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$，当 $m\leqslant 2$ 时，证明：$f(x)>0$.

证明：∵ $f(x)=e^x-\ln(x+m)$，∴函数的定义域为 $x+m>0$，即 $x\in(-m,+\infty)$.

∵题设 $m\leqslant 2$，∴ $x+m\leqslant x+2$，当 $x\in(-m,+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\leqslant\ln(x+2)$，亦即 $-\ln(x+m)\geqslant-\ln(x+2)$，亦即 $f(x)\geqslant e^x-\ln(x+2)$．欲证 $f(x)>0$，只需证明当 $m=2$ 时，$f(x)>0$.

∵当 $m=2$ 时，$f(x)=e^x-\ln(x+2)$，$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(-1)=\frac{1}{e}-1<0$，$f'(0)=1-\frac{1}{2}>0$．∴ $\exists x_0\in(-1,0)$，使得 $f'(x_0)=0$.

当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

因此，当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

由 $f'(x_0)=0$ 可得：$e^{x_0}-\frac{1}{x_0+2}=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$，两边取对数可得：$x_0=-\ln(x_0+2)$.

∵ $f_{\min}(x)=f(x_0)=e^{x_0}-\ln(x_0+2)$　　运用函数定义解析式求函数值

$=e^{-\ln(x_0+2)}+x_0$　　前后两项分别用 $x_0=-\ln(x_0+2)$ 代换

$=(x_0+2)^{-1}+x_0$　　运用对数计算公式 $e^{-\ln A}=e^{\ln A^{-1}}=A^{-1}$

$=\frac{1}{x_0+2}+x_0+2-2$　　∵ $x_0\in(-1,0)$，∴ $x_0+2\in(1,2)$

$>2\sqrt{\dfrac{1}{2+x_0}\times(2+x_0)}-2=0$． ∵当 $x_0\in(-1,0)$ 时，$\dfrac{1}{2+x_0}\neq 2+x_0$，∴用“>”

∴ $f(x)>0$．

例 21.58 （乙 1521-2）设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-a\ln x$，当 $a>0$ 时，$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，存在 x_0 使 $f'(x_0)=0$．证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$．

证明 1：∵题设当 $a>0$ 时，$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f'(x_0)=0$．

∴当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增．

所以，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值，即 $f_{\min}(x)=f(x_0)=\mathrm{e}^{2x_0}-a\ln x_0$．

因此，问题转化为证明：$\mathrm{e}^{2x_0}-a\ln x_0\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$．

因为目标结果不含 x_0，所以必须先求出上式中的 x_0 或替换掉 x_0．

∵由 $f'(x_0)=0$ 可得：$2\mathrm{e}^{2x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$，即 $\mathrm{e}^{2x_0}=\dfrac{a}{2x_0}$，且两边取对数可得：$2x_0=\ln a-\ln 2-\ln x_0$，解得：$\ln x_0=\ln\dfrac{a}{2}-2x_0$．

将 $\mathrm{e}^{2x_0}=\dfrac{a}{2x_0}$，$\ln x_0=\ln\dfrac{a}{2}-2x_0$ 代入 $f_{\min}(x)=f(x_0)=\mathrm{e}^{2x_0}-a\ln x_0$ 可得：

$f_{\min}(x)=f(x_0)=\dfrac{a}{2x_0}-a\ln\dfrac{a}{2\mathrm{e}^{2x_0}}=\dfrac{a}{2x_0}+2ax_0-a\ln\dfrac{a}{2}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{2x_0}\cdot 2ax_0}-a\ln\dfrac{a}{2}=2a+a\ln\dfrac{2}{a}$，因此，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$．

证明 2：∵由 $f'(x_0)=0$ 可得 $2\mathrm{e}^{2x_0}-\dfrac{a}{x_0}=0$，即 $\mathrm{e}^{2x_0}=\dfrac{a}{2x_0}$ 或 $x_0=\dfrac{a}{2\mathrm{e}^{2x_0}}$，代入 $f_{\min}(x)=f(x_0)=\mathrm{e}^{2x_0}-a\ln x_0$ 可得：$f_{\min}(x)=f(x_0)=\dfrac{a}{2x_0}-a\ln\dfrac{a}{2\mathrm{e}^{x_0}}=\dfrac{a}{2x_0}+2ax_0-a\ln\dfrac{a}{2}$，即 $f_{\min}(x)=f(x_0)=\dfrac{a}{2x_0}+2ax_0-a\ln\dfrac{a}{2}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{a}{2x_0}\cdot 2ax_0}-a\ln\dfrac{a}{2}=2a+a\ln\dfrac{2}{a}$，因此，$f(x)\geqslant 2a+a\ln\dfrac{2}{a}$．

例 21.59 （丙 1721-2）已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$，且函数 $f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减．证明：当 $a<0$ 时，$f(x)\leqslant-\dfrac{3}{4a}-2$．

证明：∵题证目标：当 $a<0$ 时，$f(x)\leqslant-\dfrac{3}{4a}-2$．

∴由题设可知：当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $x=-\dfrac{1}{2a}$ 处取得最大值，且最大值为 $f(x)_{\max}=f\left(-\dfrac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\dfrac{1}{2a}\right)-1-\dfrac{1}{4a}$．

题证 $f(x)\leqslant-\dfrac{3}{4a}-2$ 等价于证明 $\ln\left(-\dfrac{1}{2a}\right)-1-\dfrac{1}{4a}\leqslant-\dfrac{3}{4a}-2$， 等价思想：转换命题

即 $\ln\left(-\dfrac{1}{2a}\right)+\dfrac{1}{2a}+1\leqslant 0$． 整体思想：将 $-\dfrac{1}{2a}$ 看成整体，基本不等式：$\ln x\leqslant x-1$

设 $g(x)=\ln x-x+1$， 函数思想：将参数不等式证明转化为函数求极值

则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$． 极限思想：为求极值先求导

令 $g'(x)=0$，解得 $x=1$． 方程思想：为求极点构造方程并求解

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$． 函数思想：确定导数正负

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减． 函数思想：用导数确定函数的单调性

故当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 取得最大值，且最大值 $g(1)=0$． 数形结合：确定函数最值

所以，当 $x>0$ 时，$g(x)\leqslant 0$． 数形结合：利用最值构造函数不等式

即 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2a}+1\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant -\frac{3}{4a}-2$． 代数思想：等量代换

例 21.60 （丙 1621-3）设函数 $f(x)=\ln x-x+1$．设 $c>1$，证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$1+(c-1)x>c^x$．

分析：将求证目标 $1+(c-1)x>c^x$ 转化为 $1+(c-1)x-c^x>0$，构造函数求证最小值等于零.

证明：设 $g(x)=1+(c-1)x-c^x$，则 $g'(x)=(c-1)-c^x\ln c$．

令 $g'(x)=0$，解得：$c^{x_0}=\frac{c-1}{\ln c}$．

$\because c>1$，$\therefore$ 由（丙 1621-2）可得：当 $x=c>1$ 时，$1<\frac{c-1}{\ln c}<c$，$\therefore 1<c^{x_0}<c$，从而 $0<x_0<1$．

又 $\because g(0)=0$，$g(1)=0$，$\therefore$ 当 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)>0$．

所以，当 $x\in(0,1)$ 时，$1+(c-1)x>c^x$．

例 21.61 （丙 1671-3）设函数 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$，其中 $a>0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 A．证明：$|f'(x)|\leqslant 2A$．

证明：$\because$ 题设 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$，$\therefore f'(x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$．

故 $|f'(x)|=|2a\sin 2x+(a-1)\sin x|\leqslant|2a\sin 2x|+|(a-1)\sin x|\leqslant 2a+|a-1|$．

当 $0<a<\frac{1}{5}$ 时，$|a-1|=1-a$，$|f'(x)|\leqslant 1+a$．

又 $\because A=2-3a$，$\therefore |f'(x)|-2A\leqslant 1+a-2\times(2-3a)=7a-3<0$，即 $|f'(x)|\leqslant 2A$．

当 $\frac{1}{5}<a<1$ 时，$|a-1|=1-a$，$|f'(x)|\leqslant 1+a$，又 $\because A=\frac{a^2+6a+1}{8a}$，

$\therefore |f'(x)|-2A\leqslant 1+a-\frac{a^2+6a+1}{4a}=\frac{3a^2-2a-1}{4a}=\frac{(3a+1)(a-1)}{4}<0$，即 $|f'(x)|\leqslant 2A$．

当 $a\geqslant 1$ 时，$|f'(x)|\leqslant 3a-1$，且 $A=3a-2$，因此，$|f'(x)|-2A\leqslant 3a-1-2(3a-2)=3-3a<0$，即 $|f'(x)|\leqslant 2A$．

综上所述：当 $a>0$ 时，恒有 $|f'(x)|\leqslant 2A$．

证明 8.6　估计无理数的近似取值范围

证明分析：利用函数不等式估计无理数的近似取值范围时，关键是要分别对函数不等式成立的条件在极值附近进行取值作估算.

例 21.62 （甲 1471-3）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$，在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，已求得 b 的最大值为 2，已知 $1.1413<\sqrt{2}<1.4142$，估计 $\ln 2$ 的近似值.（精确到 0.001）

解析：$\because$ 题设：$g(x)=f(2x)-4bf(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}-4x-4b\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x\right)$，

$\therefore g(\ln\sqrt{2})=\mathrm{e}^{2\ln\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-2\ln\sqrt{2}}-4\ln\sqrt{2}-4b\left(\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\ln\sqrt{2}}-2\ln\sqrt{2}\right)$

$$=2-\frac{1}{2}-4\ln\sqrt{2}-4b\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-2\ln\sqrt{2}\right)=\frac{3}{2}-2\ln 2-2\sqrt{2}b+4b\ln 2.$$

∵当 $x=\ln\sqrt{2}>0$ 时，$g(x)=f(2x)-4bf(x)>0$，b 的最大取值为 2.

∴① 当 $b=2$ 时.

取满足 $g(x)>0$ 的 b 可能取的最大值

由 $g\left(\ln\sqrt{2}\right)=\frac{3}{2}-2\ln 2-2\sqrt{2}b+4b\ln 2>0$ 可得：$\frac{3}{2}-2\ln 2-4\sqrt{2}+8\ln 2>0$，

解得：$\ln 2>\frac{8\sqrt{2}-3}{12}>0.6928$；

② 当 $b=1+\frac{3\sqrt{2}}{4}>1+\frac{3\times 1.4}{4}=1+\frac{4.2}{4}>2$ 时.

尽可能取满足 $g(x)<0$ 的 b 的较小值

由 $g\left(\ln\sqrt{2}\right)=\frac{3}{2}-2\ln 2-2\sqrt{2}b+4b\ln 2<0$ 可得：$\frac{3}{2}-2\ln 2-2\sqrt{2}\times\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)}{4}+4\times\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)}{4}\ln 2<0$，

解得：$\ln 2<\frac{18+\sqrt{2}}{28}<0.6934$.

综上所述，$0.6928<\ln 2<0.6934$，因此，$\ln 2\approx 0.693$，即 $\ln 2$ 的近似值为 0.693.

第 22 题　坐标系与参数方程背景

22

背景知识

极坐标系：在平面上取一个定点O，由点O发出的一条射线Ox、一个长度单位及计算角度的正方向（通常取逆时针方向），合称为一个极坐标系．点O称为极点，Ox称为极轴．平面上任一点M的位置可以用线段OM的长度ρ和从Ox到OM的角度θ（弧度制）来表示，这两个实数组成的有序实数对(ρ,θ)称为点M的极坐标，ρ称为极径，θ称为极角．

极坐标与直角坐标的互化：若以直角坐标系的坐标原点为极点，以x轴的正方向为极轴建立极坐标系，则平面内任一点M的直角坐标与极坐标满足下列关系：

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}\text{或}\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\ \tan\theta=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)\end{cases}.$$

极坐标的几何意义：$\rho=r$表示以O为圆心，r为半径的圆；$\theta=\theta_0$表示过极点倾斜角为θ_0的直线，$\theta=\theta_0(\rho\geqslant 0)$表示射线；$\rho=2a\cos\theta$表示以$(a,0)$为圆心，$|a|$为半径（即过$O$点）的圆：$\rho=2a\cos\theta\Rightarrow\rho^2=2a\rho\cos\theta\Rightarrow x^2+y^2=2ax\Rightarrow(x-a)^2+y^2=a^2$．

直线的参数方程：直线$y-y_0=k(x-x_0)(k=\tan\alpha)$的参数方程可以表示为$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数，$\alpha$为倾斜角）．参数$t$的绝对值表示直线上动点$M(x,y)$到定点$M_0(x_0,y_0)$的距离．

圆的参数方程：若圆心为点$M_0(x_0,y_0)$，半径为r，则圆的参数方程为$\begin{cases}x=x_0+r\cos\theta\\ y=y_0+r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数，$0\leqslant\theta<2\pi$）．

椭圆的参数方程：椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数，$0\leqslant\theta<2\pi$）．

双曲线的参数方程：双曲线C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos^{-1}\theta\\ y=b\tan\theta\end{cases}$（$\theta$为参数，$\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$）．

抛物线的参数方程：抛物线C：$y^2=2px$的参数方程为$\begin{cases}x=2pt^2\\ y=2pt\end{cases}$（$t$为参数，其几何意义为抛物线上的点与顶点连线斜率的倒数）．

问题 1　化为直角坐标方程

问题分析：将其他方程化为直角坐标方程问题主要包括：将参数方程化为直角坐标方程和将极坐标方程化为直角坐标方程.

条件 1.1　给定曲线的参数方程和极坐标方程

条件分析：当给定参数方程需要化为直角坐标方程时，通常利用“消元法”将表示x，y的两个方程中

的参数消去来获得包含x，y的二元方程，即直角坐标方程，特别是当参数以正弦和余弦函数的形式出现时，往往需要利用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$来消元；当给定曲线的极坐标方程时，往往需要利用$\begin{cases}\rho\cos\theta=x\\ \rho\sin\theta=y\end{cases}$及$\rho^2=x^2+y^2$来进行转化.

例 22.1（丙 1623-1）在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），以坐标原点为极点，以$x$轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$. 写出$C_1$的普通方程和$C_2$的直角坐标方程.

解析：∵曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），　　参数方程为非普通方程

$\therefore\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\\ \sin\theta=y\end{cases}$　　当既有正弦又有余弦时，利用$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$消去参数$\theta$

代入$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$可得：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$.

又∵曲线C_2的极坐标方程为$\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$，　　从题设极坐标方程出发

即$\rho\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$，　　利用正弦和角公式将$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$展开

化简可得：$\rho\sin\theta+\rho\cos\theta-4=0$，　　凑出$\rho\cos\theta$，$\rho\sin\theta$

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入可得：$x+y-4=0$.　　利用直角坐标与极坐标关系式

例 22.2（乙 1822-1）在直角坐标系xOy中，曲线C_1的方程为$y=k|x|+2$. 以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的极坐标方程为$\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$. 求$C_2$的直角坐标方程.

解析：∵题设曲线C_2的极坐标方程为$\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$，∴由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$可得：$x^2+y^2+2x-3=0$，即$(x+1)^2+y^2=4$.

例 22.3（甲 1822-1）在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），直线$l$的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数）. 求$C$和$l$的直角坐标方程.

解析：∵曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=4\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），　　由正余弦参数方程想到三角函数公式

∴利用$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$可得：$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{4}\right)^2=1$，即$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

又∵直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数），　　关注一次参数$t$，忽略常量$\alpha$

$\therefore\begin{cases}x-1=t\cos\alpha\\ y-2=t\sin\alpha\end{cases}$.　　变形的目的是为了两式相除能消除参数$t$

当$\sin\alpha\neq0$，$\cos\alpha\neq0$时，两式相除可得：$\dfrac{x-1}{y-2}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$，即$y=\tan\alpha(x-1)+2$.　①

当$\cos\alpha=0$时，$\sin\alpha=\pm1$，$\begin{cases}x=1\\y=2\pm t\end{cases}$，直线$l$的直角坐标方程为$x=1$． ②

当$\sin\alpha=0$时，$\cos\alpha=\pm1$，$\begin{cases}x=1\pm t\\y=2\end{cases}$，直线$l$的直角坐标方程为$y=2$． ③

归纳①③可得：当$\cos\alpha\neq0$时，直线l的直角坐标方程为$y=\tan\alpha(x-1)+2$． 包括$\alpha=0$

由②可得：当$\cos\alpha=0$时，直线l的直角坐标方程为$x=1$．

问题 2 化为极坐标方程

问题分析：将其他形式的方程化为极坐标方程问题主要包括：将直角坐标方程化为极坐标方程和将参数方程化为极坐标方程.

条件 2.1 给定曲线的直角坐标方程

条件分析：当给定曲线的直角坐标方程时，通常是将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入曲线的直角坐标方程，将直角坐标$x$，$y$转化为极坐标$\rho$，$\theta$从而获得极坐标方程.

条件 2.2 给定曲线的直角坐标方程

例 22.4 （乙 1523-1）在直角坐标系xOy中，直线C_1：$x=-2$，圆C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，以坐标原点为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，求C_1，C_2的极坐标方程.

解析：将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$分别代入$C_1$，$C_2$的直角坐标方程可得：$C_1$的极坐标方程为$\rho\cos\theta=-2$，$C_2$的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$．

例 22.5 （甲 1623-1）在直角坐标系xOy中，圆C的方程为$(x+6)^2+y^2=25$．以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求C的极坐标方程.

解析：将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入$(x+6)^2+y^2=25$可得：$(\rho\cos\theta+6)^2+(\rho\sin\theta)^2-25=0$，

即$\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+12\rho\cos\theta+11=0$， 利用$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

亦即圆C的极坐标方程为$\rho^2+12\rho\cos\theta+11=0$．

条件 2.2 给定曲线的（直角坐标）参数方程

条件分析：当给定曲线的（直角坐标）参数方程时，通常需要先利用“消元法”消去参数将参数方程转化为直角坐标普通方程，再将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入曲线的直角坐标普通方程，将直角坐标转化为极坐标从而获得极坐标方程.

例 22.6 （乙 1323-1）已知曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4+5\cos t\\y=5+5\sin t\end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，把$C_1$的参数方程化为极坐标方程.

解析：∵曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4+5\cos t\\y=5+5\sin t\end{cases}$， 将参数方程化为直角坐标方程

$\therefore$将$\begin{cases}\cos t=\dfrac{x-4}{5}\\ \sin t=\dfrac{y-5}{5}\end{cases}$代入$\sin^2 t+\cos^2 t=1$，消去参数$t$可得：$(x-4)^2+(y-5)^2=5^2$.

即可得曲线C_1的直角坐标方程为$x^2+y^2-8x-10y+16=0$.

将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入上式，并利用$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$可得：$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

故曲线C_1的极坐标方程为$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

例 22.7（乙 1623-1）在直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=1+a\sin t\end{cases}$（$t$为参数，$a>0$）. 再以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，说明曲线$C_1$是哪一种曲线，并将$C_1$的方程化为极坐标方程.

解析：$\because$曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=1+a\sin t\end{cases}$，

t为参数，$a>0$

$\therefore$利用$\sin^2 t+\cos^2 t=1$消去参数t可得曲线C_1的普通方程为：$x^2+(y-1)^2=a^2$.

由此可见：曲线C_1是以$(0,1)$为圆心，a（题设$a>0$）为半径的圆.

再将$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入$C_1$的直角坐标（普通）方程，可得$C_1$的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$.

问题 3 化为参数方程

问题分析：将其他形式的方程化为参数方程问题主要包括：将直角坐标方程化为参数方程和将极坐标方程化为参数方程.

条件 3.1 给定曲线的直角坐标方程

条件分析：当给定曲线（通常是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$）的直角坐标方程时，往往借助三角公式$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，令$\begin{cases}x=a\sin\alpha\\ y=b\cos\alpha\end{cases}$或$\begin{cases}x=a\cos\alpha\\ y=b\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数）作为该曲线的参数方程.

例 22.8（乙 1423-1）已知曲线C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，直线$l$：$\begin{cases}x=2+t\\ y=2-2t\end{cases}$（$t$为参数），写出曲线$C$的参数方程，直线$l$的普通方程.

解析：对于类似圆（椭圆）的曲线方程C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，

借用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$可令：$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\cos\theta\\ \dfrac{y}{3}=\sin\theta\end{cases}$或$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\sin\theta\\ \dfrac{y}{3}=\cos\theta\end{cases}$，

借用三角函数公式

化简可得：曲线C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}$或$\begin{cases}x=2\sin\theta\\ y=3\cos\theta\end{cases}$.

将直线l的参数方程组$\begin{cases}x=2+t\\ y=2-2t\end{cases}$消去参数$t$，可得直线$l$的普通方程为$2x+y-6=0$.

条件 3.2 给定曲线的极坐标方程

条件分析：当给定曲线的极坐标方程时，往往需要先利用$\begin{cases}\rho\cos\theta = x\\ \rho\sin\theta = y\end{cases}$及$\rho^2 = x^2 + y^2$将极坐标方程转化为直角坐标方程，再借用三角函数公式$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$将直角坐标方程转化为参数方程.

例 22.9 （甲 1423-1）在直角坐标系xOy中，以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，半圆C的极坐标方程为$\rho = 2\cos\theta$，$\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，求$C$的参数方程.

解析：∵题设半圆C的极坐标方程为$\rho = 2\cos\theta$，$\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，

∴方程两边同乘以ρ可得：$\rho^2 = 2\rho\cos\theta$，

目的是凑出ρ^2，$\rho\cos\theta$，$\rho\sin\theta$

将$\rho\cos\theta = x$，$\rho^2 = x^2 + y^2$代入可得：$x^2 + y^2 = 2x$，

化简可得：$(x-1)^2 + y^2 = 1$．这是一个以$(1,0)$为圆心，半径为 1 的圆.

又∵题设$\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$，∴曲线$C$应该位于第一象限，即$0 \leqslant y \leqslant 1$．亦即曲线$C$是以$(1,0)$为圆心，半径为 1（在$x$轴上方）的半圆．根据$(x-1)^2 + y^2 = 1$，借用$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$，可得曲线$C$的参数方程可以设为$\begin{cases}x - 1 = \cos t\\ y = \sin t\end{cases}$，即$\begin{cases}x = 1 + \cos t\\ y = \sin t\end{cases}$．∵$0 \leqslant y \leqslant 1$，∴$0 \leqslant t \leqslant \pi$，故曲线$C$的参数方程为$\begin{cases}x = 1 + \cos t\\ y = \sin t\end{cases}$（其中$t$为参数，$0 \leqslant t \leqslant \pi$）.

问题 4 求直线斜率

问题分析：求直线斜率的核心是求直线倾斜角的正切.

条件 4.1 给定直线与圆的相交弦长

条件分析：当给定直线与圆的相交弦长时，关键是要利用由相交弦的一半、弦心距和半径构成的直角三角形解题.

例 22.10 （甲 1623-2）在直线坐标系xOy中，圆C的普通方程为$(x+6)^2 + y^2 = 25$，圆C的极坐标方程为$\rho^2 + 12\rho\cos\theta + 11 = 0$，直线$l$的参数方程是$\begin{cases}x = t\cos\alpha\\ y = t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数），$l$与$C$交于$A$，$B$两点，$|AB| = \sqrt{10}$，求$l$的斜率.

解析：∵题设直线l的参数方程是$\begin{cases}x = t\cos\alpha\\ y = t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数），

∵t为参数，∴α为常数

∴两式相除，消去参数t可得：直线的普通方程为$y = x\tan\alpha$.

显然，直线l是过坐标原点，倾斜角为α的直线.

由于题设目标是求l的斜率，因此写出直线l的极坐标方程为$\theta = \alpha\,(\rho \in \mathbf{R})$.

保留θ

将直线l的极坐标方程$\theta = \alpha\,(\rho \in \mathbf{R})$代入圆$C$的极坐标方程$\rho^2 + 12\rho\cos\theta + 11 = 0$可得：$\rho^2 + 12\rho\cos\alpha + 11 = 0$，设$A$，$B$两点的极径分别为$\rho_1$，$\rho_2$，则解上述方程，由韦达定理可得：$\rho_1 + \rho_2 = -12\cos\alpha$，$\rho_1\rho_2 = 11$.

根据极径的几何意义可得：$|AB| = |\rho_2 - \rho_1| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2} = \sqrt{144\cos^2\alpha - 44}$.

又∵题设$|AB| = \sqrt{10}$，∴$\sqrt{144\cos^2\alpha - 44} = \sqrt{10}$.

利用题设条件列方程

解得：$\cos^2\alpha=\dfrac{54}{144}=\dfrac{3}{8}$，再由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$可得：$\sin^2\alpha=1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$.

由三角函数公式可得：$\tan^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{5}{3}$，解得：$\tan\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，所以直线$l$的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

例 22.11　（乙 1822-2）在直角坐标系xOy中，曲线C_1的方程为$y=k|x|+2$．以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的极坐标方程为$\rho^2+2\rho\cos\theta-3=0$，直角坐标方程为$(x+1)^2+y^2=4$．若$C_1$与$C_2$有且仅有三个公共点，求$C_1$的方程.

解析：∵曲线C_2的直角坐标方程为$(x+1)^2+y^2=4$，∴它是以点$A(-1,0)$为圆心，半径为 2 的圆.

∵题设曲线C_1的方程为$y=k|x|+2$，

∴$f(-x)=f(x)$，且当$x=0$时，$y\equiv2$.

因此，曲线C_1是从点$B(0,2)$出发，关于y轴对称的两条射线.

如图 22.1 所示，由于点$B(0,2)$在曲线C_2（圆）的外侧，因此“两曲线有且仅有三个公共点”等价于“圆与一条射线相切，与另一条相割”.

如图所示，设右侧射线$y=-kx+2$与圆$(x+1)^2+y^2=4$相切，则由圆心$A(-1,0)$到直线的距离等于半径可得：$\dfrac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得：$k=0$或$k=-\dfrac{4}{3}$．故$y=-\dfrac{4}{3}|x|+2$即为曲线$C_1$的方程.

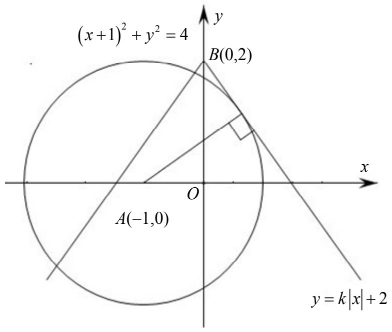


图 22.1

例 22.12　（甲 1822-2）在直角坐标系xOy中，曲线C的直角坐标方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$，直线$l$的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数）．若曲线$C$截直线$l$所得线段的中点坐标为$(1,2)$，求$l$的斜率.

解析：∵题设曲线C截直线l所得线段的中点坐标为$(1,2)$，且直线l：$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数）表示过点$(1,2)$的直线，

令$t=0$，则$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

∴将直线的参数方程代入曲线C的直角坐标方程可得关于参数t的一元二次方程：$(1+3\cos^2\alpha)t^2+4(2\cos\alpha+\sin\alpha)t-8=0$.

又∵直线参数方程$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\y=2+t\sin\alpha\end{cases}$中参数$t$的几何意义为直线上的点到点$(1,2)$的位移（向量），

∴两交点到中点的距离之和为 0，即$t_1+t_2=0$.

据此，利用一元二次方程的韦达定理可得：$t_1+t_2=\dfrac{4(2\cos\alpha+\sin\alpha)}{1+3\cos^2\alpha}=0$.

解得：$2\cos\alpha+\sin\alpha=0$，即$\tan\alpha=-2$．亦即直线的斜率为$k=-2$.

例 22.13　（丙 1822-1/72-1）在平面直角坐标系xOy中，$\odot O$的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），过点$(0,-\sqrt{2})$且倾斜角为$\alpha$的直线$l$与$\odot O$交于$A$，$B$两点．求$\alpha$的取值范围.

解析：设过点$(0,-\sqrt{2})$，且倾斜角为α的直线l的方程为$y+\sqrt{2}=\tan\alpha\cdot x$，即$\tan\alpha\cdot x-y-\sqrt{2}=0$.

又∵$\odot O$的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$，∴利用$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$可得：$x^2+y^2=1$，即圆心为$O(0,0)$，半径为$r=1$.

设圆心 $O(0,0)$ 到直线 $\tan\alpha\cdot x-y-\sqrt{2}=0$ 的距离为 d，则由点到直线的距离公式可得：$d=\frac{\left|0-0-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}$，代入直线与圆⊙$O$相交于两点的条件 $d<r$ 可得：$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}<1$，即 $\tan^2\alpha>1$．解得：$\tan\alpha<-1$ 或 $\tan\alpha>1$．

由正切函数为增函数可得：$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$．

∵倾斜角 $0\leqslant\alpha<\pi$，∴舍去 $\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$．

如图 22.2 所示，无论定点是 $M(0,-\sqrt{2})$ 或 $N(0,\sqrt{2})$，都需要舍去 $\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$，保留 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$．

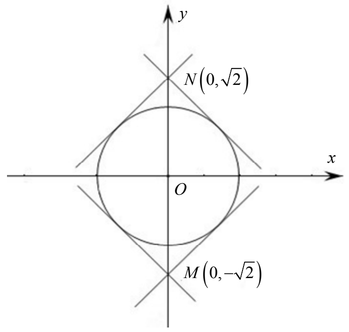


图 22.2

问题 5 求两条曲线的交点坐标

问题分析： 求两条曲线的交点坐标实际上就是求表示两条曲线的方程组的解，只是给定曲线方程的形式不同可能需要采用不同的方式来解方程组.

条件 5.1 给定两条相交曲线的参数方程

条件分析： 当给定两条相交曲线的参数方程时，既可以将两条相交曲线的参数方程同时化为直角坐标方程来解二元二次方程组；也可以将一条曲线的参数方程化为直角坐标方程，而将另一条曲线的参数方程代入直角坐标方程先解一元二次方程，再代回参数方程求解.

例 22.14 （乙 1722-1）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=a+4t\\y=1-t\end{cases}$（$t$ 为参数）．若 $a=-1$，求 C 与 l 的交点坐标.

解析 1：（将两条曲线的参数方程都化为普通方程进行求解）

∵曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），

∴为了利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，可将参数方程化为 $\begin{cases}\cos\theta=\frac{x}{3}\\\sin\theta=y\end{cases}$，然后代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 可得：$\frac{x^2}{9}+y^2=1$．

当 $a=-1$ 时，直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=a+4t\\y=1-t\end{cases}$ 化为 $\begin{cases}x=-1+4t\\y=1-t\end{cases}$，两式消去参数 t 可得：直线 l 的普通方程为 $x+4y-3=0$．由 $\begin{cases}x+4y-3=0\\\frac{x^2}{9}+y^2=1\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{21}{25}\\y=\frac{24}{25}\end{cases}$．

从而 C 与 l 的交点坐标为 $(3,0)$，$\left(-\frac{21}{25},\frac{24}{25}\right)$．

解析 2：（将一条曲线的参数方程化为普通方程进行求解）

∵曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），

∴为了利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，可将参数方程化为 $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{3}\\\sin\theta=y\end{cases}$，然后代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 可得：$\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$，当 $a=-1$ 时，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+4t\\y=1-t\end{cases}$，将上述参数方程代入 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ 可得：$(-1+4t)^2+9(1-t)^2=9$，化简可得：$25t^2-26t+1=0$，解得：$t_1=\dfrac{1}{25}$，$t_2=1$．代入 $\begin{cases}x=-1+4t\\y=1-t\end{cases}$ 可得：$\begin{cases}x_1=-\dfrac{21}{25}\\y_1=\dfrac{24}{25}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=3\\y_2=0\end{cases}$．

即 C 与 l 的交点坐标为 $(3,0)$，$\left(-\dfrac{21}{25},\dfrac{24}{25}\right)$．

条件 5.2　给定两条相交曲线的极坐标方程

条件分析：当给定两条相交曲线的极坐标方程时，理论上，既可以将两条相交曲线的极坐标方程同时化为直角坐标方程来解关于直角坐标的二元二次方程组；也可以先解关于极坐标的三角函数方程组，再将结果化为直角坐标形式．

例 22.15（甲 1523-1）在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=2\sin\theta$，C_3：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$，求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标．

分析：∵题设 C_2，C_3 都是极坐标方程，且目标是求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标．

∴既可以先将 C_2 与 C_3 的极坐标方程化为直角坐标方程，再解方程组来求交点的直角坐标，也可以先解极坐标方程组求交点的极坐标再化为直角坐标．

解析 1：（先化直角坐标方程再求交点坐标）

∵ C_2：$\rho=2\sin\theta$，∴ $\rho^2=2\rho\sin\theta$，将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$ 代入可得：$x^2+y^2-2y=0$．

同理可得 C_3：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$ 的直角坐标方程为：$x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0$，解方程组 $\begin{cases}x^2+y^2-2y=0\\x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0\end{cases}$，将两式相减（消去 x^2+y^2）可得：$y=\sqrt{3}x$．

获得两个未知数的一次函数关系

将 $y=\sqrt{3}x$ 代入其中一式，可解得：$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$．因此，曲线 C_2 与 C_3 交点的直角坐标为 $(0,0)$ 和 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$．

解析 2：（先求交点极坐标再化为直角坐标）∵ C_2：$\rho=2\sin\theta$，C_3：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$，∴解 $\begin{cases}\rho=2\sin\theta\\\rho=2\sqrt{3}\cos\theta\end{cases}$．

①利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 可得：$\left(\dfrac{\rho}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\rho}{2\sqrt{3}}\right)^2=1$，解得：$\rho=\sqrt{3}$，代入 $\rho=2\sin\theta$ 可得：$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$．

②利用$\begin{cases}\rho=2\sin\theta\\ \rho=2\sqrt{3}\cos\theta\end{cases}$可得：$2\sin\theta=2\sqrt{3}\cos\theta$，解得：$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$．再代入$\rho=2\sin\theta$可得：$\rho=\sqrt{3}$，将$\rho=\sqrt{3}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$代入$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$可得：$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$．即可得交点坐标为$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

又因为曲线C_2与C_3都经过极点，所以另一交点的直角坐标为$(0,0)$.

> **经验总结：**比较解析 1 与解析 2 可见，解析 2 不仅计算过程繁杂，而且漏掉了$\rho=0$，$\theta=0$时的交点坐标，从而导致计算结果不完整.

例 22.16（丙 1722-2）在直角坐标系xOy中，直线l_1的参数方程为$\begin{cases}x=2+t\\ y=kt\end{cases}$（$t$为参数），直线$l_2$的参数方程为$\begin{cases}x=-2+m\\ y=\dfrac{m}{k}\end{cases}$（$m$为参数）．设$l_1$与$l_2$的交点为$P$，当$k$变化时，$P$的轨迹为曲线$C$：$x^2-y^2=4(y\neq0)$．以坐标原点为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，设$l_3$：$\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，$M$为$l_3$与$C$的交点，求$M$的极径.

解析：∵ C的极坐标方程为$\rho^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=4$，$l_3$：$\rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0$，

∴联立$\begin{cases}\rho^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=4\\ \rho(\cos\theta+\sin\theta)-\sqrt{2}=0\end{cases}$，消去$\rho$可得：$\cos\theta-\sin\theta=2(\cos\theta+\sin\theta)$.

化简可得：$\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$，从而$\cos^2\theta=\dfrac{9}{10}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1}{10}$.

代入C的极坐标方程$\rho^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=4$可得：$\rho^2=5$，所以交点$M$的极径为$\sqrt{5}$.

条件 5.3　给定相交曲线的参数方程和极坐标方程

条件分析：当给定两条相交曲线的参数方程和极坐标方程时，既可以将两条相交曲线的极坐标方程同时化为直角坐标方程来解关于直角坐标的二元二次方程组；也可以先解关于极坐标的三角函数方程组，再将结果化为直角坐标形式.

例 22.17（乙 1323-2）已知曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4+5\cos t\\ y=5+5\sin t\end{cases}$（$t$为参数），以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_1$的极坐标方程可化为$\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta$，求$C_1$与$C_2$交点的极坐标（$\rho\geqslant0$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$）.

解析 1：（先求交点直角坐标，再化为极坐标）

第一步：将曲线方程都化为直角坐标方程.

∵曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4+5\cos t\\ y=5+5\sin t\end{cases}$，即$\begin{cases}\cos t=\dfrac{1}{5}(x-4)\\ \sin t=\dfrac{1}{5}(y-5)\end{cases}$，∴利用$\cos^2t+\sin^2t=1$可得曲线$C_1$的直角坐标方程为$(x-4)^2+(y-5)^2=5^2$，即$x^2+y^2-8x-10y+16=0$.

∵曲线C_2的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta$，∴曲线C_2的极坐标方程变形为$\rho^2=2\rho\sin\theta$.

因此，利用$x^2+y^2=\rho^2$和$y=\rho\sin\theta$可得曲线C_2的直角坐标方程为$x^2+y^2=2y$，

第二步：解直角坐标方程组.

解$\begin{cases}x^2+y^2-8x-10y+16=0\\x^2+y^2=2y\end{cases}$可得：$x+y-2=0$.　　消去或整体代换 x^2+y^2

再解$\begin{cases}x^2+y^2=2y\\x+y-2=0\end{cases}$可得：$\begin{cases}x_1=1\\y_1=1\end{cases}$和$\begin{cases}x_2=0\\y_2=2\end{cases}$.

第三步：将直角坐标化为极坐标，由 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ 可得：$\rho_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{2}$，$\rho_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=2$.

由 $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$ 可得：$\cot\theta_1=\dfrac{x_1}{y_1}=1$，$\cot\theta_2=\dfrac{x_2}{y_2}=0$. 所以曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为$\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$和$\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解析 2：（利用三角公式直接解极坐标方程获得交点的极坐标）

∵本题的目标是求 C_1 与 C_2 交点的极坐标，且题设曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.

∴将曲线 C_1 先化为直角坐标方程，再化为极坐标方程 $\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

解$\begin{cases}\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0\\\rho=2\sin\theta\end{cases}$可得：$4\sin^2\theta-16\sin\theta\cos\theta-20\sin^2\theta+16=0$，

即 $\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta=0$，亦即 $\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)=0$.

由 $\cos\theta=0$，且 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 可得：$\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$；由 $\cos\theta-\sin\theta=0$，且 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 可得：$\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$.

将 $\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$ 代入 $\rho=2\sin\theta$ 可得：$\rho_1=2$，$\rho_2=\sqrt{2}$.

所以曲线 C_1 与 C_2 交点的极坐标为$\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$和$\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

条件 5.4　给定曲线切线的垂线方程求切点坐标

条件分析：当给定曲线切线的垂线方程求切点坐标时，关键是利用平面几何里的切线定理：过切点的半径与切线垂直解题.

例 22.18（甲 1423-2）在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，半圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$，$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$C$ 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos t\\y=\sin t\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant\pi$）. 设点 D 在 C 上，C 在 D 处的切线与直线 l：$y=\sqrt{3}x+2$ 垂直，根据 C 的参数方程，确定点 D 的坐标.

解析：设切点 $D(1+\cos t,\sin t)$.　　用参数形式表示直角坐标

∵ C 是以点 $C(1,0)$ 为圆心，“1”为半径的圆的上半部分，

∴线段 CD 垂直过点 D 的切线.　　切线定理：过切点的半径与切线垂直

又∵题设 C 在 D 处的切线与直线 l：$y=\sqrt{3}x+2$ 垂直，

∴线段 CD 平行于直线 l，即 $k_{CD}=\sqrt{3}$.　①　　直线平行的充要条件

又∵ $C(1,0)$，$D(1+\cos t,\sin t)$，

∴由斜率的定义公式可得：$k_{CD}=\dfrac{\sin t}{\cos t}=\tan t$.　②

由①②列方程可得：$\tan t=\sqrt{3}$，解得：$t=\dfrac{\pi}{3}$. 故 D 的直角坐标为$\left(1+\cos\dfrac{\pi}{3},\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$，即$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

问题 6　求两点间距离

问题分析：两点间距离问题往往需要利用两点间距离公式、点到直线距离公式，以及直线参数方程中参数的几何意义进行求解.

条件 6.1 给定直线的参数方程和两条曲线的极坐标方程

条件分析：当给定直线的参数方程和两条曲线的极坐标方程时，关键是确定直线的斜率或倾斜角，进而求出直线与两条线的极坐标方程表示的曲线交点的极径.

例 22.19 （甲 1523-2）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，且 $t\neq 0$），其中 $0\leqslant\alpha<\pi$. 在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=2\sin\theta$，C_3：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$. 若 C_1 与 C_2 相交于点 A，C_1 与 C_3 相交于点 B，求 $|AB|$ 的最大值.

解析：∵ C_1 与 C_2 相交于点 A，C_1 与 C_3 相交于点 B，且曲线 C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，且 $t\neq 0$），

∴为了研究交点 A，B 的间距问题，需将参数方程化为直角坐标方程或极坐标方程.

①将 C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ 消去参数 t 可得：$y=x\tan\alpha$，即曲线 C_1 是过坐标原点且斜率为 $\tan\alpha$ 的直线；

②再将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入 $y=x\tan\alpha$ 可得：$\theta=\alpha$，即曲线 C_1 是过坐标原点且倾斜角为 α 的直线.

∵题设给出了曲线 C_2，C_3 的极坐标方程，∴用 C_1 的极坐标方程 $\theta=\alpha$，求与曲线 C_2 与曲线 C_3 的交点更为容易. 即将 $\theta=\alpha$ 分别代入曲线 C_2 与 C_3 的极坐标方程可得 A，B 两点的极坐标为 $A(2\sin\alpha,\alpha)$ 和 $B\left(2\sqrt{3}\cos\alpha,\alpha\right)$. 由于点 A，B 在同一条直线 $\theta=\alpha$ 上，因此 A，B 两点的距离等于两点的极径之差，即 $|AB|=\left|2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha\right|=4\left|\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right|=4\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right|\leqslant 4$.

故当 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{2}$ 时，$\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right|=1$，$|AB|$ 取得最大值 4.

解 $\alpha-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{2}$ 可得：$\alpha_1=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$，$\alpha_2=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{6}$.

∵题设 $0\leqslant\alpha<\pi$，∴舍去 $\alpha_2=-\frac{\pi}{6}$，取 $\alpha=\alpha_1=\frac{5\pi}{6}$. 即当 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$ 时，$|AB|$ 的最大值为 4.

条件 6.2 给定曲线参数方程求曲线上两点的中点到原点的距离

条件分析：当给定曲线参数方程求曲线上两点的中点到原点的距离时，关键是要利用给定参数方程的曲线上两点的坐标结合中点坐标公式和两点间距离公式进行求解.

例 22.20 （甲 1323-2）已知动点 P，Q 都在曲线 C：$\begin{cases}x=2\cos\beta\\ y=2\sin\beta\end{cases}$（$\beta$ 为参数）上，对应参数分别为 $\beta=\alpha$ 与 $\beta=2\alpha(0<\alpha<2\pi)$，$PQ$ 的中点 M 的轨迹参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\beta+\cos 2\beta\\ y=\sin\beta+\sin 2\beta\end{cases}$. 将点 M 到坐标原点的距离 d 表示为 α 的函数，并判断 M 的轨迹是否过坐标原点.

解析：∵ $M(\cos\alpha+\cos2\alpha,\sin\alpha+\sin2\alpha)$，∴由两点间距离公式可得：

点 M 到坐标原点的距离 $d=\sqrt{(\cos\alpha+\cos2\alpha)^2+(\sin\alpha+\sin2\alpha)^2}=\sqrt{2+2(\cos2\alpha\cos\alpha+\sin2\alpha\sin\alpha)}$

$=\sqrt{2+2\cos(2\alpha-\alpha)}=\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$.（题设 $0<\alpha<2\pi$）

当 $\alpha=\pi$ 时，$\cos\alpha=-1$，$d=0$，动点 M 到坐标原点的距离为 0，即 M 过坐标原点.

条件 6.3 给定曲线参数方程和直线极坐标方程求曲线上点到直线的最短距离

条件分析：当给定曲线参数方程和直线极坐标方程求曲线上点到直线的最短距离时，可以先将直线的

极坐标方程化为直角坐标方程，再利用表示曲线的参数方程建立曲线上点到直线的距离与参数的函数关系式，最后根据距离与参数的关系式求最短距离.

例 22.21（丙 1623-2）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$．设点 P 在 C_1 上，点 Q 在 C_2 上，求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

解析：∵由题设可得 C_1 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，C_2 的直角坐标方程为 $x+y-4=0$．

∴问题转化为求椭圆上的点 P 到直线上的点 Q 的最小距离及点 P 的坐标.

由此可见：化为直角坐标方程更容易理解问题，并为解决问题找到出路：当曲线与直线不相交时，利用点到直线的距离公式求曲线上点到直线的距离即为 $|PQ|$ 最小值．因此，理论上应该先判断曲线 C_1 与直线 C_2 是否相交．事实上画草图即可确定两曲线不相交，然后再进行下列计算.

∵曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），∴可设点 $P\left(\sqrt{3}\cos\alpha,\sin\alpha\right)$，则 $|PQ|$ 的最小值为点 $P\left(\sqrt{3}\cos\alpha,\sin\alpha\right)$ 到直线 $x+y-4=0$ 的距离 $D(\alpha)$，为 $D(\alpha)=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha-4\right|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-2\right|$.

建立距离 D 与参数 α 的函数关系式

当且仅当 $\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$ 时，$D(\alpha)$ 取得最小值 $\sqrt{2}$.

将 $\alpha=2k\pi+\dfrac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$ 代入曲线 C_1 的参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数）可得此时点 P 的直角坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

条件 6.4　给定曲线和直线的参数方程求两点间距离的最值

条件分析：当给定曲线和直线的参数方程求两点间距离的最值时，关键是要使用点到直线的距离公式，因此，需要将直线的参数方程先化为直角坐标方程，然后再结合其他题设条件进行求解.

例 22.22（乙 1423-2）已知曲线 C：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$，直线 l：$\begin{cases} x=2+t \\ y=2-2t \end{cases}$（$t$ 为参数），普通方程为 $2x+y-6=0$．过曲线 C 上任意一点 P 作与 l 夹角为 30°的直线，交 l 于点 A，如图 22.3 所示，求 $|PA|$ 的最大值与最小值.

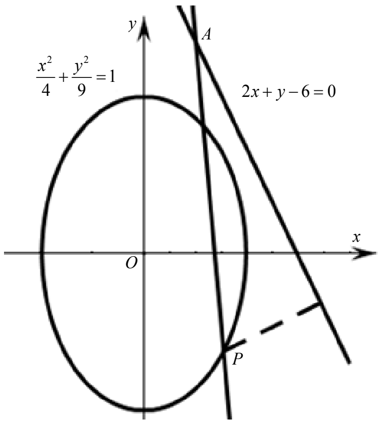


图 22.3

解析：在曲线 C 上任意取一点 $P(2\cos\theta,3\sin\theta)$ 或 $P'(2\sin\theta,3\cos\theta)$．则 P 到直线 l：$2x+y-6=0$ 的距离为 $d=\dfrac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$.

P' 到直线 l：$2x+y-6=0$ 的距离为 $d'=\dfrac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta+3\sin\theta-6|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\beta)-6|$.

∵ $|PA|=\dfrac{d}{\sin 30^\circ}=\dfrac{d'}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\alpha)-6|$，

利用正弦定义构造三角函数关系

$\therefore$当$\sin(\theta+\alpha)=-1$时，$|PA|$取得最大值，且最大值为$\dfrac{22\sqrt{5}}{5}$；

利用三角函数求最值

当$\sin(\theta+\alpha)=1$时，$|PA|$取得最小值，且最小值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

问题 7 求三角形面积

问题分析：根据三角形面积的计算公式可知，求三角形面积问题的关键是要找到三角形的底与高，或者找到三角形的两条边及其夹角.

条件 7.1　给定圆、直线和曲线方程求直线与曲线的两交点与圆心构成的三角形面积

条件分析：当给定圆、直线和曲线方程求直线与曲线的两交点与圆心构成的三角形面积时，关键是要求直线与圆相交的弦长和圆心到直线的距离.

例 22.23（乙 1523-2）在直角坐标系xOy中，已知圆C_2：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，以坐标原点为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，已求得C_2的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$. 若直线$C_3$的极坐标方程为$\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$，设$C_2$与$C_3$的交点为$M$，$N$，求$\triangle C_2MN$的面积.

解析：将C_3：$\theta=\dfrac{\pi}{4}$代入C_2的极坐标方程$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+4=0$可得：$\rho^2-3\sqrt{2}\rho+4=0$，解得：$\rho_1=2\sqrt{2}$，$\rho_2=\sqrt{2}$. 故$|MN|=\rho_1-\rho_2=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

$\because$圆C_2的半径为 1，弦长为$\sqrt{2}$，$\therefore$弦心距（即“高”）为$\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因此，$S_{\triangle C_2MN}=\dfrac{1}{2}|MN|\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

条件 7.2　给定圆及圆内定点求圆上动点与定点和坐标原点构成的三角形面积的最大值

条件分析：当给定圆及圆内定点求圆上动点与定点和坐标原点构成的三角形面积的最大值时，关键是要求圆上动点到定点与到原点所在直线的距离.

例 22.24（甲 1722-2）在直角坐标系xOy中，以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C_2的直角坐标方程$(x-2)^2+y^2=4(x\neq0)$. 设点A的极坐标为$\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$，点$B$在曲线$C_2$上，求$\triangle OAB$面积的最大值.

解析：$\because$题设点A的极坐标为$\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\therefore|OA|=\rho_A=2$.

又$\because$曲线C_2的直角坐标方程$(x-2)^2+y^2=4(x\neq0)$可化为$\rho=4\cos\theta$，且点B在曲线C_2上，

$\therefore$设点B的极坐标为$(\rho_B,\alpha)(\rho_B>0)$，即$\rho_B=4\cos\alpha$，于是$\triangle OAB$的面积为：

$$S=\frac{1}{2}|OA|\cdot\rho_B\cdot\sin\angle AOB=4\cos\alpha\cdot\left|\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right|=2\left|\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\leqslant2+\sqrt{3}.$$

当$\alpha=-\dfrac{\pi}{12}$时，S取得最大值$2+\sqrt{3}$，所以$\triangle OAB$面积的最大值为$2+\sqrt{3}$.

问题 8 求动点轨迹

问题分析：求动点轨迹问题就是求动点坐标所满足的条件，因此，首先要设动点坐标为 (x,y)，然后再根据其他题设条件进行运算.

条件 8.1 给定动点与极坐标方程上的点和坐标原点间的距离关系

条件分析：当给定动点与极坐标方程上的点和坐标原点间的距离关系时，关键是利用距离关系式列方程进行求解.

例 22.25 （甲 1722-1）在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$． M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足 $|OM|\cdot|OP|=16$，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程.

解析：设动点 M 的极坐标为 $(\rho_1,\theta)(\rho_1>0)$，点 P 的极坐标为 $(\rho,\theta)(\rho>0)$，

$\because$ 点 P 在线段 OM 上，$\therefore$ 可设两点极角相等

则 $|OP|=\rho$，$|OM|=\rho_1=\dfrac{4}{\cos\theta}$．

由题设 $|OM|\cdot|OP|=16$ 可得：曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta(\rho>0)$．

将极坐标方程两边同乘 ρ 可得：$\rho^2=4\rho\cos\theta$．

再利用 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入上式可得：$x^2+y^2=4x$．

化简可得：$(x-2)^2+y^2=4(x\neq0)$，

注意：不能遗漏 $x\neq0$，因为 $\rho>0$

即点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=4(x\neq0)$．

条件 8.2 给定参数方程曲线上的两点求中点轨迹

条件分析：当给定参数方程曲线上的两点求中点轨迹时，关键是利用中点坐标公式先求出中点轨迹的参数方程，也可以消去参数化为直角坐标方程求解.

例 22.26 （甲 1323-1）已知动点 P，Q 都在曲线 C：$\begin{cases}x=2\cos\beta\\y=2\sin\beta\end{cases}$（$\beta$ 为参数）上，对应参数分别为 $\beta=\alpha$ 与 $\beta=2\alpha(0<\alpha<2\pi)$，$M$ 为 PQ 的中点，求 M 的轨迹的参数方程.

解析：$\because P$，Q 两点对应的参数分别为 $\beta=\alpha$ 与 $\beta=2\alpha$，$\therefore P(2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，$Q(2\cos2\alpha,2\sin2\alpha)$．

$\because$ 题设 M 为 PQ 的中点，$\therefore$ 由中点公式可得：$M(\cos\alpha+\cos2\alpha,\sin\alpha+\sin2\alpha)$．

即中点 M 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha+\cos2\alpha\\y=\sin\alpha+\sin2\alpha\end{cases}$．

β 是曲线上点的参数，α 是曲线 $\beta=\alpha$ 及 $\beta=2\alpha$ 上两动点的中点的参数

$\because\beta=\alpha$，$\therefore$ 中点 M 的参数方程也可写为 $\begin{cases}x=\cos\beta+\cos2\beta\\y=\sin\beta+\sin2\beta\end{cases}$．

例 22.27 （丙 1822-2）在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），过点 $(0,-\sqrt{2})$ 且倾斜角为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 的直线 l 与 $\odot O$ 交于 A，B 两点．求 AB 的中点 P 的轨迹的参数方程.

解析：设直线 l 与 $\odot O$ 的交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且 AB 的中点为 $P(x,y)$，则由中点坐标公式可得：

$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_1}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$. 解 $\begin{cases} y=\tan\alpha\cdot x-\sqrt{2} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 可得：$\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2-2\sqrt{2}\tan\alpha\cdot x+2=0$.

由韦达定理可得：$x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}=\dfrac{2\sqrt{2}\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，代入 $y=\tan\alpha\cdot x-\sqrt{2}$ 可得：$y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\tan^2\alpha}$.

代入中点坐标公式可得点 $P(x,y)$ 轨迹的参数方程为 $\begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{2}\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\ y=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\tan^2\alpha} \end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right)$）

条件 8.3 给定两条直线含有待定系数的参数方程求交点坐标方程

例 22.28（丙 1722-1）在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+t \\ y=kt \end{cases}$（$t$ 为参数），直线 l_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+m \\ y=\dfrac{m}{k} \end{cases}$（$m$ 为参数）. 设 l_1 与 l_2 的交点为 P，当 k 变化时，P 的轨迹为曲线 C. 写出 C 的普通方程.

解析：消去参数 t 可得 l_1 的普通方程为 $y=k(x-2)$；消去参数 m 可得 l_2 的普通方程为 $y=\dfrac{1}{k}(x+2)$，设两直线的交点为 $P(x,y)$，则交点坐标应满足方程组 $\begin{cases} y=k(x-2) \\ y=\dfrac{1}{k}(x+2) \end{cases}$.

实际上，这已是交点轨迹的参数方程

两式相乘消去 k 可得：$y^2=(x-2)(x+2)$.

目标是消去参数 k 求出交点轨迹普通方程

即 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$，所以 C 的普通方程为 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$.

问题 9 求参数方程中的待定系数

问题分析：求参数方程中的待定系数问题时，关键是要将参数方程中的参数与需要确定的待定系数区别开来.

条件 9.1 给定曲线参数方程上的点到有待定系数的直线参数方程的最大距离

条件分析：当给定曲线参数方程上的点到有待定系数的直线参数方程的最大距离时，关键是先将直线的参数方程化为含有待定系数的直角坐标方程，然后利用点到直线的距离公式和题设条件列方程进行求解.

例 22.29（乙 1722-2）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} y=3\cos\theta \\ x=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=a+4t \\ y=1-t \end{cases}$（$t$ 为参数）. 若 C 上的点到 l 距离的最大值为 $\sqrt{17}$，求 a.

解析：∵曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} y=3\cos\theta \\ x=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），∴设曲线 C 上的点为 $(3\cos\theta,\sin\theta)$.

又∵直线 l 的普通方程为 $x+4y-a-4=0$，

∴曲线 C 上的点 $(3\cos\theta,\sin\theta)$ 到 l 的距离为 $d=\dfrac{|3\cos\theta+4\sin\theta-a-4|}{\sqrt{17}}$.

点到直线的距离公式

$\because$ 式中 $3\cos\theta+4\sin\theta=5\left(\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{4}{5}\sin\theta\right)=5\sin(\beta+\theta)$，$\sin\beta=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，

$\therefore d=\frac{|5\sin(\beta+\theta)-a-4|}{\sqrt{17}}$.

当 $a\geqslant -4$ 时，d 的最大值为 $\frac{a+9}{\sqrt{17}}$．由题设可得 $\frac{a+9}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$，解得：$a=8$；

当 $a<-4$ 时，d 的最大值为 $\frac{-a+1}{\sqrt{17}}$．由题设可得 $\frac{-a+1}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$，解得：$a=-16$.

综上，$a=8$ 或 $a=-16$.

条件 9.2　给定含有待定系数的曲线参数方程和另一极坐标方程曲线的交点在特定直线上

条件分析：当给定含有待定系数的曲线参数方程和另一极坐标方程曲线的交点在特定直线上时，实际上是“三线共点”.

例 22.30（乙 1623-2）在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=1+a\sin t\end{cases}$（$t$ 为参数，$a>0$）. 在以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线 C_2：$\rho=4\cos\theta$，直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta=\alpha_0$，其中 α_0 满足 $\tan\alpha_0=2$，若曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，求 a.

解析：$\because$ 曲线 C_1 的普通方程为 $x^2+(y-1)^2=a^2$，其极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0$，且曲线 C_1 与 C_2 的公共点都在 C_3 上，

$\therefore$ 解 $\begin{cases}\rho^2-2\rho\sin\theta+1-a^2=0\\ \rho=4\cos\theta\\ \theta=\alpha_0\end{cases}$ 可得：当 $\rho\neq 0$ 时，$16\cos^2\alpha_0-8\sin\alpha_0\cos\alpha_0+1-a^2=0$，

即 $\cos^2\alpha_0\left(16-8\frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0}\right)+1-a^2=0$，将题设 $\tan\alpha_0=2$ 代入上式可得：$1-a^2=0$，解得：$a=\pm1$.

$\because$ 题设 $a>0$，$\therefore$ 取 $a=1$．当 $\rho=0$，且 $a=1$ 时，极点也为 C_1 与 C_2 的公共点，且在 C_3 上.

综上所述，$a=1$.

第 23 题　不等式选讲背景

23

背景知识

不等式性质：

（1）同向合成（必要条件）：① $a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$；② $a>b,\ c>d \Rightarrow a+c>b+d$；③ $a>b>0,\ c>d>0 \Rightarrow ac>bd$；

（2）同解变形（充要条件）：① $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$；②当 $c>0$ 时，$a>b \Leftrightarrow ac>bc$；③ $a>b>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}>0 \Leftrightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}>0$.

绝对值不等式：

（1）$a>0,\ |x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$；$|x|>a \Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$；（2）$|a|>|b| \Leftrightarrow a^2>b^2$；（3）$|x+a|+|x+b|<c$ 零点分段讨论.

基本不等式：

（1）$a^2+b^2 \geqslant 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）；（2）若 $a>0,\ b>0$，则 $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）；（3）若 $a>0,\ b>0,\ c>0$，则 $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$（当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立）.

柯西不等式：

（1）$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqslant (ac+bd)^2$（当且仅当 $ad=bc$ 时等号成立）；

（2）推广：$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$（当且仅当向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与向量 $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 共线时等号成立）.

不等式证明方法：

（1）作差（比较）法；（2）作商（比较）法；（3）综合（由因导果）法；（4）分析（执果索因）法；（5）数学归纳法；（6）构造函数法；（7）反证法；（8）放缩法.

问题 1　绘制绝对值函数图像

问题分析：绘制绝对值函数的图像问题，关键是令每一个绝对值等于零，获得“零点”坐标，然后再依据“零点”进行分段讨论，分段作图.

条件 1.1　给定绝对值函数解析式

条件分析：对于给定绝对值函数解析式绘制函数图像的问题，可以先求出绝对值“零点”，然后根据绝对值“零点”的大小，将自变量的取值范围分为若干个区间，再根据自变量在不同区间各绝对值项取值的“正”与“负”写出解析式，最后依据所获得的绝对值函数的分段函数解析式作出函数图像.

例 23.1（乙 1624-1）已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$，画出 $y=f(x)$ 的图像.

解析：∵题设 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$，∴分别令 $|x+1|=0$ 和 $|2x-3|=0$.

解 $|x+1|=0$ 可得：$x=-1$，故 $|x+1|=\begin{cases}x+1, & x\geqslant -1\\ -(x+1), & x<-1\end{cases}$.

确定分段讨论的临界点

解 $|2x-3|=0$ 可得：$x=\dfrac{3}{2}$，故 $|2x-3|=\begin{cases}2x-3, & x\geqslant \dfrac{3}{2}\\ -(2x-3), & x<\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

确定分段讨论的临界点

因此，当 $x<-1<\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=-(x+1)+(2x-3)=x-4$；

两个绝对值都取“–”

当 $-1\leqslant x\leqslant \dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=(x+1)+(2x-3)=3x-2$；

当 $x>\dfrac{3}{2}>-1$ 时，$f(x)=(x+1)-(2x-3)=-x+4$.

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=\begin{cases}x-4, & x<-1\\ 3x-2, & -1\leqslant x\leqslant \dfrac{3}{2}\\ -x+4, & x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$，

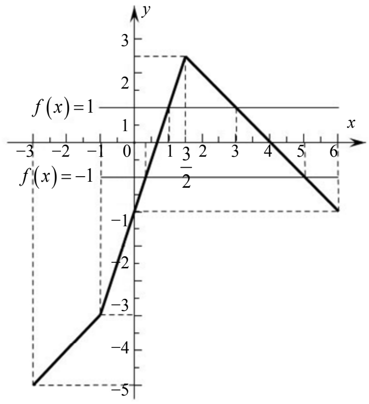


图 23.1

描点作图可画出 $y=f(x)$ 的图像如图 23.1 所示.

> **经验总结**：由于本题所给的绝对值函数包含两个绝对值项，因此，分别令每一个绝对值项等于零可获得两个绝对值“零点”. 值得注意的是必须按照从小到大的原则将 $(-\infty,+\infty)$ 区间分为三个区间，分别进行研究.

例 23.2（丙 1823-1）设函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$，画出 $y=f(x)$ 的图像.

解析：∵题设 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$，∴分别解 $|2x+1|=0$，$|x-1|=0$ 可得：$x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=1$.

因此，将 $(-\infty,+\infty)$ 分为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$，$\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$ 和 $(1,+\infty)$ 三个区间进行讨论.

①当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 时，∵ $2x+1<0$，$x-1<0$，

∴ $|2x+1|=-(2x+1)$，$|x-1|=-(x-1)$.

从而 $f(x)=|2x+1|+|x-1|=-(2x+1)-(x-1)=-3x$.

②当 $x\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$ 时，∵ $2x+1>0$，$x-1<0$，

∴ $|2x+1|=2x+1$，$|x-1|=-(x-1)$.

从而 $f(x)=|2x+1|+|x-1|=2x+1-(x-1)=x+2$.

③当 $x\in(1,+\infty)$ 时，∵ $2x+1>0$，$x-1>0$，

∴ $|2x+1|=2x+1$，$|x-1|=x-1$.

从而 $f(x)=|2x+1|+|x-1|=2x+1+x-1=3x$.

画出 $y=f(x)$ 的图像如图 23.2 所示.

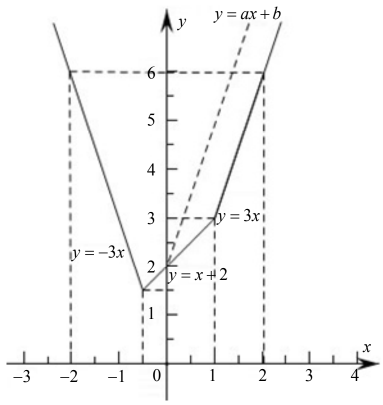


图 23.2

问题 2 求含有绝对值的函数不等式的解集

问题分析：求含有绝对值的函数不等式的解集，关键是令每一个绝对值等于零，获得“零点”坐标，然后再依据“零点”进行分段讨论.

条件 2.1 给定包含绝对值的函数不等式

条件分析：对于给定包含绝对值的函数不等式时，可以先求出绝对值的“零点”，然后根据绝对值“零点”的大小，将自变量的取值范围分为若干个区间，再根据自变量在不同区间各绝对值项取值的“正”与“负”写出各区间的函数不等式，最后分段求解函数不等式. 值得注意的是，在分段求解函数不等式时，要对所解得的结果与讨论的区间求“交集”.

例 23.3 （乙 1723-1）已知函数 $f(x)=-x^2+ax+4$，$g(x)=|x+1|+|x-1|$. 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集.

分析：将 $a=1$ 代入，不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 等价于 $x^2-x+|x+1|+|x-1|-4\leqslant 0$，对几个绝对值的“零点”，即对 x 按 $x<-1$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，$x>1$ 进行讨论，得出不等式的解集.

解析：当 $a=1$ 时，不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 等价于 $x^2-x+|x+1|+|x-1|-4\leqslant 0$. ①

解 $|x+1|=0$，$|x-1|=0$ 可得：$x_1=-1$，$x_2=1$. 确定分段讨论的临界点

当 $x<-1$ 时，①式化为 $x^2-3x-4\leqslant 0$，解得：$-1<x<4$，与 $x<-1$ 无交集，故无解；

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，①式化为 $x^2-x-2\leqslant 0$，解得：$-1\leqslant x\leqslant 2$，故交集为 $-1\leqslant x\leqslant 1$；

当 $x>1$ 时，①式化为 $x^2+x-4\leqslant 0$，解得：$\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$，故交集为 $1<x\leqslant\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

所以 $f(x)\geqslant g(x)$ 的解集为 $\left\{x\middle|-1\leqslant x\leqslant\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

例 23.4 （乙 1624-2）已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$，求不等式 $|f(x)|>1$ 的解.

解析 1：（数形结合思想，绝对值几何意义运用）

$\because$ 题设 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$，$\therefore$ 解 $|x+1|=0$，$|2x-3|=0$ 得：$x_1=-1$，$x_2=\dfrac{3}{2}$. 确定分段讨论的临界点

①当 $x<-1$ 时，$f(x)=-(x+1)+(2x-3)=x-4$；

②当 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=(x+1)+(2x-3)=3x-2$；

③当 $x>\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=(x+1)-(2x-3)=-x+4$.

综上所述，$f(x)=\begin{cases}x-4, & x<-1\\ 3x-2, & -1\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\\ -x+4, & x>\dfrac{3}{2}\end{cases}$，图像如图 23.3 所示.

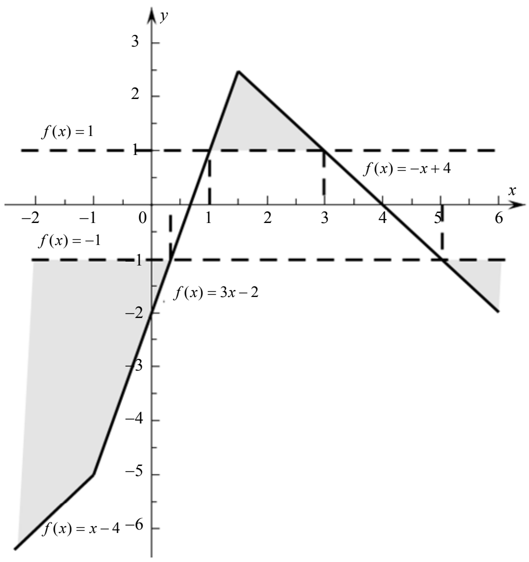


图 23.3

为了求解 $|f(x)|>1$，可在函数图像上分别作 $f(x)=1$ 和 $f(x)=-1$ 两条直线，解 $f(x)=1$ 可得：$x_1=1$ 和 $x_2=3$.

对照函数图像可见：$f(x)>1$ 的解集为 $(1,3)$.

解 $f(x)=-1$ 可得：$x_3=\dfrac{1}{3}$ 和 $x_4=5$.

对照函数图像可见：

$f(x)<-1$ 的解集为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(5,+\infty)$.

所以 $|f(x)|>1$ 的解集为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,3)\cup(5,+\infty)$.

解析 2：（分段讨论思想，零点知识运用）

∵题设 $f(x)=|x+1|-|2x-3|$，∴解 $|x+1|=0$，$|2x-3|=0$ 可得：$x_1=-1$，$x_2=\dfrac{3}{2}$.　确定分段的临界点

①当 $x<-1$ 时，$f(x)=-(x+1)+(2x-3)=x-4$，解 $|f(x)|>1$ 可得：$x-4<-1$ 或 $x-4>1$，即 $x<3$ 或 $x>5$，与 $x<-1$ 的交集为 $x<-1$；

②当 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=(x+1)+(2x-3)=3x-2$，解 $|f(x)|>1$ 可得：$3x-2<-1$ 或 $3x-2>1$，即 $x<\dfrac{1}{3}$ 或 $x>1$，与 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 的交集为 $-1\leqslant x<\dfrac{1}{3}$ 或 $1<x\leqslant\dfrac{3}{2}$；

③当 $x>\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)=(x+1)-(2x-3)=-x+4$，解 $|f(x)|>1$ 可得：$-x+4<-1$ 或 $-x+4>1$，即 $x<3$ 或 $x>5$，与 $x>\dfrac{3}{2}$ 的交集为 $\dfrac{3}{2}<x<3$ 或 $x>5$.

综上所述，满足 $|f(x)|>1$ 的解集为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup(1,3)\cup(5,+\infty)$.

经验总结： 绝对值不等式问题的解决有两个基本方法，一是基于分类讨论思想，运用零点分区间讨论；二是基于数形结合思想，利用绝对值的几何意义求解.

例 23.5（乙 1524-1）已知函数 $f(x)=|x+1|-2|x-a|$，$a>0$，当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集.

解析 1：（分段讨论法）

∵ $f(x)=|x+1|-2|x-a|$，∴当 $a=1$ 时，$f(x)=|x+1|-2|x-1|$.

由 $f(x)>1$ 可得：$|x+1|-2|x-1|-1>0$.

令 $|x+1|=0$，解得：$x_1=-1$；令 $|x-1|=0$，解得：$x_2=1$.　确定分段讨论的临界点

故分三段来研究：

①当 $x\leqslant-1$ 时，不等式化为 $x-4>0$，无解；

②当 $-1<x<1$ 时，不等式化为 $3x-2>0$，解得：$\dfrac{2}{3}<x<1$；

③当 $x\geqslant1$ 时，不等式化为 $-x+2>0$，解得：$1\leqslant x<2$.

综上所述，不等式 $f(x)>1$ 的解集为 $\left\{x\,|\,\dfrac{2}{3}<x<2\right\}$.

解析 2：（数形结合法）

∵ $f(x)=|x+1|-2|x-a|$，∴当 $a=1$ 时，$f(x)=|x+1|-2|x-1|$.

由 $f(x)>1$ 可得：$|x+1|-2|x-1|>1$，令 $y_1=|x+1|-2|x-1|$，$y_2=1$.

则当 $x\in(-\infty,-1]$ 时，$y_1=-(x+1)+2(x-1)=x-3$；

当 $x\in(-1,1]$ 时，$y_1=(x+1)+2(x-1)=3x-1$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$y_1=(x+1)-2(x-1)=-x+3$，

即 $y_1=\begin{cases}x-3，x\leqslant-1\\3x-1，-1<x\leqslant1\\-x+3，x>1\end{cases}$.

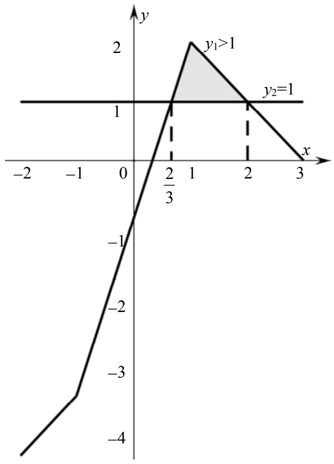


图 23.4

在平面直角坐标系上分别作出两函数图像如图 23.4 所示.

由图可见：当$\frac{2}{3}<x<2$时，$y_1>y_2$，即不等式$f(x)>1$的解集为$\left\{x\mid \frac{2}{3}<x<2\right\}$.

经验总结：形如$|x-a|+|x-b|\geqslant c$（或$\leqslant c$）的不等式主要有两种解法.

（1）分段讨论法：令每一个绝对值为零，将实数区间分为$(-\infty,a]$，$(a,b]$，$(b,+\infty)$（此处设$a<b$）三个部分，将每部分去掉绝对值符号并分别列出对应的不等式求解，然后取各个不等式解集的并集.

（2）数形结合法：作出函数$y_1=|x-a|+|x-b|$和$y_2=c$的图像，结合图像求解.

例 23.6 （乙 1324-1）已知函数$f(x)=|2x-1|+|2x+a|$，$g(x)=x+3$，当$a=-2$时，求不等式$f(x)<g(x)$的解集.

解析：∵当$a=-2$时，$f(x)=|2x-1|+|2x-2|$，

∴令$|2x-1|=0$，解得：$x_1=\frac{1}{2}$；令$|2x-2|=0$，解得：$x_2=1$.

确定分段讨论的临界点

故分$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$，$\left[\frac{1}{2},1\right]$，$(1,+\infty)$三段来研究：

当$x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$时，∵$2x-1<0$，$2x-2<0$，∴$f(x)=-(2x-1)-(2x-2)=-4x+3$；

当$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$时，∵$2x-1\geqslant 0$，$2x-2\leqslant 0$，∴$f(x)=(2x-1)-(2x-2)=1$；

当$x\in(1,+\infty)$时，∵$2x-1>0$，$2x-2>0$，∴$f(x)=(2x-1)+(2x-2)=4x-3$.

综上所述，$f(x)=\begin{cases}-4x+3, & x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\\ 1, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\\ 4x-3, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

转化思想：把绝对值函数转化为分段函数

为了求解$f(x)<g(x)$，即$f(x)-g(x)<0$，设$F(x)=f(x)-g(x)$，则$F(x)=\begin{cases}-5x, & x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\\ -x-2, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\\ 3x-6, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

在平面直角坐标系上，作出函数$F(x)$的图像，如图 23.5 所示，当$x\in(0,2)$时，$F(x)<0$，即$f(x)-g(x)<0$.

故$f(x)<g(x)$的解集为$\{x\mid 0<x<2\}$.

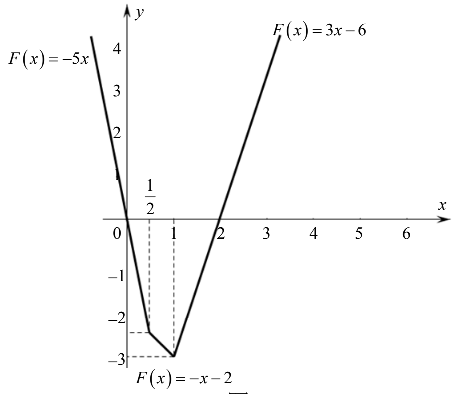


图 23.5

例 23.7 （甲 1624-1）已知函数$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$，$M$为不等式$f(x)<2$的解集，求$M$.

解析：∵题设$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$，

∴解$\left|x-\frac{1}{2}\right|=0$可得：$x_1=\frac{1}{2}$，

故 $\left|x-\dfrac{1}{2}\right|=\begin{cases}x-\dfrac{1}{2}，x\geqslant x_1\\-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)，x<x_1\end{cases}$.

确定分段讨论的临界点

解 $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=0$ 可得：$x_2=-\dfrac{1}{2}$，故 $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=\begin{cases}x+\dfrac{1}{2}，x\geqslant x_2\\-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)，x<x_2\end{cases}$.

确定分段讨论的临界点

即 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|=\begin{cases}-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=-2x，x<x_2<x_1\\x+\dfrac{1}{2}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=1，x_2\leqslant x<x_1\\x+\dfrac{1}{2}+x-\dfrac{1}{2}=2x，x_2<x_1<x\end{cases}$.

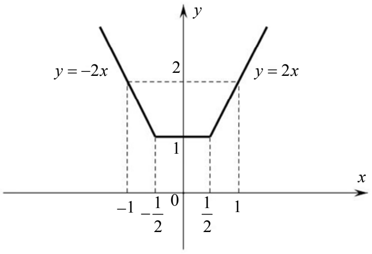


图 23.6

绘制上述函数图像，如图 23.6 所示.

不等式 $f(x)<2$ 的解集为 $M=\{x|-1<x<1\}$.

例 23.8（丙 1723-1）已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$，求不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集.

解析：∵函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$，

∴令 $|x+1|=0，|x-2|=0$ 可得：$x_1=-1，x_2=2$.

确定分段讨论的临界点

即函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$ 可以写成如下分段函数：

$f(x)=\begin{cases}-3，x<-1\\2x-1，-1\leqslant x\leqslant 2\\3，x>2\end{cases}$，显然需要分段讨论，并最终归纳解集.

① 当 $x<-1$ 时，∵ $f(x)\equiv -3<1$，∴ $f(x)\geqslant 1$ 无解；

② 当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，∵ $f(x)=2x-1$，∴解 $f(x)\geqslant 1$ 可得：$x\geqslant 1$，综合可得：$1\leqslant x\leqslant 2$.

③ 当 $x>2$ 时，∵ $f(x)\equiv 3>1$，∴ $x>2$ 是 $f(x)\geqslant 1$ 的解集之一.

综上所述，$f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $\{x\,|\,x\geqslant 1\}$ 或 $[1,+\infty)$.

例 23.9（丙 1624-1）已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$，当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant 6$ 的解集.

解析：∵题设 $f(x)=|2x-a|+a$，∴当 $a=2$ 时，$f(x)=|2x-2|+2=2|x-1|+2$.

解 $|x-1|=0$ 可得：$x=1$.

确定分段讨论的临界点

∵当 $x\geqslant 1$ 时，$|x-1|=x-1$，∴ $f(x)=2(x-1)+2=2x$；

又∵当 $x<1$ 时，$|x-1|=1-x$，∴ $f(x)=2(1-x)+2=4-2x$.

即 $f(x)=\begin{cases}2x，x\geqslant 1\\4-2x，x<1\end{cases}$.

解 $f(x)\leqslant 6$，即 $2|x-1|+2\leqslant 6$ 可得：$-1\leqslant x\leqslant 3$. 因此，不等式 $f(x)\leqslant 6$ 的解集为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$.

例 23.10（乙 1823-1）已知 $f(x)=|x+1|-|ax-1|$. 当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)>1$ 的解集.

解析：当 $a=1$ 时，$f(x)=|x+1|-|x-1|$.

令 $|x+1|=0$，解得 $x_1=-1$；令 $|x-1|=0$，解得 $x_2=1$. 所以需要分三段来进行讨论：

①当 $x\leqslant -1$ 时，$|x+1|=-(x+1)$，$|x-1|=-(x-1)$，$f(x)=-(x+1)+(x-1)=-2$；

②当 $-1<x<1$ 时，$|x+1|=x+1$，$|x-1|=-(x-1)$，$f(x)=x+1+(x-1)=2x$；

③当$x\geqslant 1$时，$|x+1|=x+1$，$|x-1|=x-1$，$f(x)=x+1-(x-1)=2$.

即$f(x)=\begin{cases}2, & x\leqslant -1\\ 2x, & -1<x<1\\ 2, & x\geqslant 1\end{cases}$，故不等式$f(x)>1$的解集为$\left\{x\middle|x>\dfrac{1}{2}\right\}$.

例 23.11 （甲 1823-1）设函数$f(x)=5-|x+a|-|x-2|$．当$a=1$时，求不等式$f(x)\geqslant 0$的解集.

解析：当$a=1$时，$f(x)=5-|x+1|-|x-2|$.

令$|x+1|=0$，解得$x=-1$；令$|x-2|=0$，解得$x=2$.

因此，将$(-\infty,+\infty)$ 区间分为$(-\infty,-1)$，$[-1,2]$ 和$(2,+\infty)$ 三个区间进行讨论.

①当$x\in(-\infty,-1)$时，$|x+1|=-(x+1)$，$|x-2|=-(x-2)$，$f(x)=5+(x+1)+(x-2)=2x+4$；

②当$x\in[-1,2]$时，$|x+1|=x+1$，$|x-2|=-(x-2)$，$f(x)=5-(x+1)+(x-2)=2$；

③当$x\in(2,+\infty)$时，$|x+1|=x+1$，$|x-2|=x-2$，$f(x)=5-(x+1)-(x-2)=-2x+6$.

即$f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<-1\\ 2, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ -2x+6, & x>2\end{cases}$，解$f(x)\geqslant 0$可得：$\begin{cases}2x+4\geqslant 0, & x<-1\\ 2\geqslant 0, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ -2x+6\geqslant 0, & x>2\end{cases}$，即$\begin{cases}-2\leqslant x<-1\\ -1\leqslant x\leqslant 2\\ 2<x\leqslant 3\end{cases}$.

综上可得：满足$f(x)\geqslant 0$的解集为$\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$.

问题 3 求含参绝对值函数的参数取值范围

问题分析：求解含参绝对值函数的参数范围问题，关键是要根据题设的含有绝对值函数的限定条件进行求解.

条件 3.1 给定含参绝对值函数值不等式

条件分析：对于给定含参绝对值函数值不等式时，可以将自变量的取值代入含参绝对值函数中，进而获得参数绝对值不等式，然后讨论关于参数的绝对值“零点”，最后依据参数“零点”对参数所有可能的取值范围进行分段讨论.

例 23.12 （甲 1424-2）设函数$f(x)=\left|x+\dfrac{1}{a}\right|+|x-a|(a>0)$，若$f(3)<5$，求$a$的取值范围.

解析：$\because f(3)=\left|3+\dfrac{1}{a}\right|+|3-a|$，$\therefore$当$a>3$时，$f(3)=\left|3+\dfrac{1}{a}\right|+|3-a|=3+\dfrac{1}{a}-(3-a)=\dfrac{1}{a}+a\geqslant 2$.

由$f(3)<5$可得：$\dfrac{1}{a}+a<5$，即$a^2-5a+1<0$，解得：$\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<3<a<\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$.

当$0<a\leqslant 3$时，$f(3)=6+\dfrac{1}{a}-a$，由$f(3)<5$可得：$6+\dfrac{1}{a}-a<5$，即$a^2-a-1>0$，解得：$a<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$或$a>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，综合$0<a\leqslant 3$可得：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<a\leqslant 3$.

综上所述，a的取值范围为$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$，即$\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

条件 3.2 给定含参绝对值函数不等式的解集

条件分析：对于给定包含绝对值函数不等式的解集时，可以利用解集区间的端点特殊值将含有参数的绝对值不等式转化为参数不等式，进而进行求解.

例 23.13 （乙 1723-2）已知函数$f(x)=-x^2+ax+4$，$g(x)=|x+1|+|x-1|$．若不等式$f(x)\geqslant g(x)$

的解集包含$[-1,1]$，求a的取值范围.

分析：当$x\in[-1,1]$时，$g(x)=2$．若$f(x)\geqslant g(x)$的解集包含$[-1,1]$，等价于当$x\in[-1,1]$时，$f(x)\geqslant 2$，则$f(x)$在$[-1,1]$上的最小值必为$f(-1)$与$f(1)$之一，所以$f(-1)\geqslant 2$且$f(1)\geqslant 2$，从而得$-1\leqslant a\leqslant 1$.

解析：当$x\in[-1,1]$时，$g(x)=2$.

所以$f(x)\geqslant g(x)$的解集包含$[-1,1]$，等价于当$x\in[-1,1]$时，$f(x)\geqslant 2$.

又∵$f(x)$在$[-1,1]$上的最小值必为$f(-1)$与$f(1)$之一，∴$f(-1)\geqslant 2$且$f(1)\geqslant 2$，解得：$-1\leqslant a\leqslant 1$.

所以a的取值范围为$[-1,1]$.

例 23.14　（乙 1324-2）已知函数$f(x)=|2x-1|+|2x+a|$，$g(x)=x+3$，设$a>-1$，且当$x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)$时，$f(x)\leqslant g(x)$，求$a$的取值范围.

解析：∵当$a>-1$时，$-\frac{a}{2}<\frac{1}{2}$，且当$x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)$时，$2x-1<0$，$2x+a\geqslant 0$，此时，$f(x)=-(2x-1)+(2x+a)=a+1$.

由题设$f(x)\leqslant g(x)$可得：$a+1\leqslant x+3$，即$x\geqslant a-2$必须对于$x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)$都成立，即$a-2\leqslant -\frac{a}{2}$，解得：$a\leqslant\frac{4}{3}$．∵题设$a>-1$，∴$a$的取值范围是$\left(-1,\frac{4}{3}\right]$.

例 23.15　（乙 1823-2）已知$f(x)=|x+1|-|ax-1|$．若$x\in(0,1)$时不等式$f(x)>x$成立，求a的取值范围.

解析：∵题设$x\in(0,1)$时不等式$f(x)>x$成立，即$|x+1|-|ax-1|>x$，亦即$x+1-|ax-1|>x$，化简可得：$|ax-1|<1$．解得：$-1<ax-1<1$，从而$0<ax<2$.

∴当$x\in(0,1)$时，由$ax>0$可得$a>0$，由$ax<2$可得$ax_{\max}<2$，解得$a\leqslant 2$.

综上所述，a的取值范围为$(0,2]$.

例 23.16　（甲 1823-2）设函数$f(x)=5-|x+a|-|x-2|$．若$f(x)\leqslant 1$，求a的取值范围.

解析：若$f(x)\leqslant 1$，则$5-|x+a|-|x-2|\leqslant 1$，即$|x+a|+|x-2|\geqslant 4$.

∵$|x+a|+|x-2|\geqslant|(x+a)-(x-2)|$，　基本不等式性质

∴$|x+a|+|x-2|\geqslant|a+2|$，且当$x=2$时等号成立.

因此，欲使$|x+a|+|x-2|\geqslant 4$，只要$|a+2|\geqslant 4$，解得：$a\leqslant -6$或$a\geqslant 2$.

所以，a的取值范围为$(-\infty,-6]\cup[2,+\infty)$.

条件 3.3　给定含参绝对值函数与坐标轴所围三角形面积的范围

条件分析：当给定含参绝对值函数与坐标轴所围三角形面积的范围时，可以利用面积范围建立参数不等式.

例 23.17　（乙 1524-2）已知函数$f(x)=|x+1|-2|x-a|$，$a>0$．若$f(x)$的图像与x轴围成的三角形面积大于 6，求a的取值范围.

解析：由题设可得$f(x)=\begin{cases}x-1-2a, & x<-1\\ 3x+1-2a, & -1\leqslant x\leqslant a\\ -x+1+2a, & x>a\end{cases}$，∵题设$a>0>-1$，

∴所以函数$f(x)$的图像与x轴围成的三角形由$f(x)=\begin{cases}3x+1-2a, & -1\leqslant x\leqslant a\\ -x+1+2a, & x>a\end{cases}$的图像与$x$轴相交而成.

令 $3x+1-2a=0$，解得 $A\left(\dfrac{2a-1}{3},0\right)$；令 $-x+1+2a=0$，解得 $B(1+2a,0)$.

∵ $f(x)=3x+1-2a$ 与 $f(x)=-x+1+2a$ 的交点必在 $x=a$ 处，

∴将 $x=a$ 代入上述任一函数即可求得交点的纵坐标 $y=a+1$，故 $C(a,a+1)$.

∵ $|AB|=1+2a-\dfrac{2a-1}{3}=\dfrac{4(a+1)}{3}$，且 $C(a,a+1)$，∴ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\times(a+1)=\dfrac{2}{3}(a+1)^2$，

由题设可得 $\dfrac{2}{3}(a+1)^2>6$，且 $a>0$，解得：$a>2$. 故所求 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

条件 3.4　给定含参绝对值函数不等式

条件分析：对于给定含参绝对值函数不等式时，当两个绝对值项中自变量 x 的系数相等时，可以利用“绝对值公式”将含参的绝对值函数不等式转化为参数绝对值不等式，再求解参数不等式.

例 23.18　（丙 1624-2）已知函数 $f(x)=|2x-a|+a$，设函数 $g(x)=|2x-1|$，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant 3$，求 a 的取值范围.

解析：当 $x\in\mathbf{R}$ 时，∵ $f(x)=|2x-a|+a$，$g(x)=|2x-1|=|1-2x|$，

∴ $f(x)+g(x)=|2x-a|+a+|1-2x|\geqslant|2x-a+1-2x|+a=|1-a|+a$.　当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，等号成立

所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x)+g(x)\geqslant 3$ 等价于 $|1-a|+a\geqslant 3$.

当 $a\leqslant 1$ 时，上式化为 $1-a+a\geqslant 3$，无解；当 $a>1$ 时，上式化为 $a-1+a\geqslant 3$，解得：$a\geqslant 2$.

所以 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

例 23.19　（丙 1723-2）已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-2|$，若不等式 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 的解集非空，求实数 m 的取值范围.

分析：由题意结合绝对值不等式的性质有 $|x+1|-|x-2|-x^2+x\leqslant\dfrac{5}{4}$，则 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{5}{4}\right]$.

解析：由 $f(x)\geqslant x^2-x+m$ 可得：$m\leqslant|x+1|-|x-2|-x^2+x$，　分离参数变量

令 $g(x)=|x+1|-|x-2|-x^2+x$，则 $m\leqslant g(x)$.　问题转化为求 $g_{\max}(x)$

而 $g(x)=|x+1|-|x-2|-x^2+x\leqslant|x|+1+|x|-2-x^2+|x|=-\left(|x|-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}\leqslant\dfrac{5}{4}$.

显然，当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$|x+1|-|x-2|-x^2+x=\dfrac{5}{4}$. 故 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{5}{4}\right]$.

经验总结：（丙 1624-2）利用 $|A|+|B|\geqslant|A+B|$；（丙 1723-2）利用 $|A|-|B|\leqslant|A-B|$.

问题 4　证明含参绝对值函数不等式

问题分析：证明含参绝对值函数不等式的关键是要使用参数的取值范围.

条件 4.1　给定含参绝对值函数的解析式及参数取值范围

条件分析：对于给定含参绝对值函数的解析式及参数范围时，可以综合利用绝对值不等式和基本不等式进行求证.

例 23.20　（甲 1424-1）设函数 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{a}\right|+|x-a|\,(a>0)$，证明：$f(x)\geqslant 2$.

证明：∵题设 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{a}\right|+|x-a|$，　　发现两个绝对值中 x 的系数都是"1"

∴ $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{a}\right|+|x-a|\geqslant\left|\left(x+\dfrac{1}{a}\right)-(x-a)\right|=\left|\dfrac{1}{a}+a\right|$.　　利用 $|A|+|B|\geqslant|A-B|$ 消去 x

又∵题设 $a>0$，

∴ $f(x)\geqslant\left|\dfrac{1}{a}+a\right|=\dfrac{1}{a}+a\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot a}=2$，　　∵ $a>0$，∴可以去绝对值并利用基本不等式化简

即 $f(x)\geqslant 2$.　　证毕

问题 5 多变量的不等式问题

问题分析：所谓多变量的不等式问题本质上是基本不等式的运用.

条件 5.1　给定多变量约束条件证明多变量不等式

条件分析：当给定多个变量的约束条件证明多个变量不等式时，关键是要充分利用约束条件求证.

例 23.21　（甲 1723-1）已知 $a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$．证明：$(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$．

分析：展开求证目标 $(a+b)(a^5+b^5)$，配方成 $(a^3+b^3)^2$ 即可证得结论.

证明：∵左式 $=a^6+ab^5+a^5b+b^6$　　从求证目标出发将左式展开

$=(a^3+b^3)^2-2a^3b^3+ab(a^4+b^4)$　　以题设条件为目标凑 a^3+b^3

$=4+ab(a^2-b^2)^2$　　因式分解化和差为乘积

$\geqslant 4$.

∴ $(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$.　　证毕

例 23.22　（甲 1723-2）已知 $a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$．证明：$a+b\leqslant 2$．

分析：∵题设 $a>0$，$b>0$，$a^3+b^3=2$，∴ $a+b\leqslant 2\Leftarrow(a+b)^3\leqslant 8$.　　发现证明的新目标

证明：∵ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　利用公式或 $(a+b)^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$ 将左式展开

$=2+3ab(a+b)$　　利用题设条件 $a^3+b^3=2$ 将结果尽量简化

$\leqslant 2+3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2(a+b)$　　利用基本不等式：$a^2+b^2\geqslant 2ab$

$=2+\dfrac{3}{4}(a+b)^3$，　　目标是将 ab 换成 $a+b$

即可得：$(a+b)^3\leqslant 2+\dfrac{3}{4}(a+b)^3$.　　构造关于 $(a+b)^3$ 的不等式

∴化简可得：$\dfrac{1}{4}(a+b)^3\leqslant 2$，即 $(a+b)^3\leqslant 8$，因此，$a+b\leqslant 2$.　　证毕

备注：∵ $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\geqslant 4ab$，　　利用基本不等式：$a^2+b^2\geqslant 2ab$

∴ $ab\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4}=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.　　结论：两个正数的乘积不超过这两个正数平均值的平方！

例 23.23　（甲 1324-1）设 a，b，c 均为正数，且 $a+b+c=1$，证明：$ab+bc+ac\leqslant\dfrac{1}{3}$.

证明：∵ $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ca$，

∴三式相加并除以 2 可得：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

∵ 题设 $a+b+c=1$，∴ 两边平方可得：$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$，即 $a^2+b^2+c^2=1-2ab-2bc-2ca$，代入 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ 可得：$3(ab+bc+ca)\leqslant 1$，即 $ab+bc+ac\leqslant\frac{1}{3}$.

例 23.24 （甲 1324-2）设 a，b，c 均为正数，且 $a+b+c=1$，证明：$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 1$.

证明：∵题设 a，b，c 均为正数，∴由基本不等式可得：

$\frac{a^2}{b}+b\geqslant 2a$，$\frac{b^2}{c}+c\geqslant 2b$，$\frac{c^2}{a}+a\geqslant 2c$.　　目的是构造求证目标的左端

三式相加可得：$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+(a+b+c)\geqslant 2(a+b+c)$，即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

又∵题设 $a+b+c=1$，∴代入上式可得：$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 1$.

例 23.25 （甲 1524-1）设 a，b，c，d 均为正数，且 $a+b=c+d$. 证明：若 $ab>cd$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

证明：∵ $a+b=c+d$，且 a，b，c，d 均为正数，

∴ $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2-2\sqrt{cd}$.　　利用题设条件之一凑出来的式子

即 $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2=2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd}$.　　关键式子：可直接将目标式子平方作差获得

又∵ $ab>cd>0$，∴ $\sqrt{ab}>\sqrt{cd}$，从而 $2\sqrt{ab}>2\sqrt{cd}$.　　利用题设条件之二证明结论

即 $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2>\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2$，亦即 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

> **经验总结：**根式不等式的证明问题，可以证明根式的平方不等式成立，将求证的目标进行转化. 一般可以将两端平方作差进行证明，事实上，先假设结论成立，然后不等式两边平方并利用两个题设条件即可发现证明思路.

例 23.26 （甲 1524-2）设 a，b，c，d 均为正数，且 $a+b=c+d$. 若 $ab>cd$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$. 证明：$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

证明：① 充分性：若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$，则 $|a-b|<|c-d|$.

∵ $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$，∴ $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2>\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)^2$，即 $a+b+2\sqrt{ab}>c+d+2\sqrt{cd}$.

又∵题设 $a+b=c+d$，∴ $ab>cd$.

又∵ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$，$(c-d)^2=(c+d)^2-4cd$，且 $a+b=c+d$，$ab>cd$，

∴ $(a-b)^2<(c-d)^2$，即 $|a-b|<|c-d|$.

② 必要性：若 $|a-b|<|c-d|$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

∵ $|a-b|<|c-d|$，∴ $(a-b)^2<(c-d)^2$，即 $(a+b)^2-4ab<(c+d)^2-4cd$.

又∵ $a+b=c+d$，∴ $ab>cd$，故由题设可得：$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$.

综上所证，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b|<|c-d|$ 的充要条件.

例 23.27 （甲 1624-2）已知函数 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$，$M$ 为不等式 $f(x)<2$ 的解集，证明：当 a，$b\in M$ 时，$|a+b|<|1+ab|$.

分析：（问题转化法）$|a+b|<|1+ab|\Leftarrow(a+b)^2<(1+ab)^2\Leftarrow(a+b)^2-(1+ab)^2<0$，

即 $a^2+2ab+b^2-\left(1+2ab+a^2b^2\right)<0$，亦即 $\left(a^2-1\right)\left(1-b^2\right)<0$.　　发现符合题设条件

证明：∵题设 a，$b\in M$，且 $M=\{x|-1<x<1\}$，故 $a^2<1$，$b^2<1$.　　详见（甲 1624-1）

$\therefore$构造$(a+b)^2-(1+ab)^2=(a^2-1)(1-b^2)<0$，即$(a+b)^2<(1+ab)^2$，从而$|a+b|<|1+ab|$.

经验总结: 绝对值不等式的证明问题，可以证明绝对值的平方不等式成立，将求证的目标进行转化.

条件 5.2　给定多变量约束条件求多变量表达式的最小值

条件分析： 给定多个变量的约束条件求多个变量表达式的最小值比证明多个变量不等式更困难，困难的原因在于没有求证的“目标”，因此只能从求解的表达式入手，充分利用基本不等式或基本公式.

例 23.28　（乙 1424-1）若$a>0$，$b>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，求$a^3+b^3$的最小值.

解析： $\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$，且题设$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，$\therefore \sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\sqrt{ab}}$，即$ab\geqslant 2$，且当$a=b=\sqrt{2}$时等号成立.

又$\because a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}$，且$ab\geqslant 2$，$\therefore a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}\geqslant 4\sqrt{2}$，且当$a=b=\sqrt{2}$时等号成立，即$a^3+b^3$的最小值为$4\sqrt{2}$.

例 23.29　（丙 1823-2）设函数$f(x)=|2x+1|+|x-1|$的图像如图 23.7 所示，若当$x\in[0,+\infty)$时，$f(x)\leqslant ax+b$，求$a+b$的最小值.

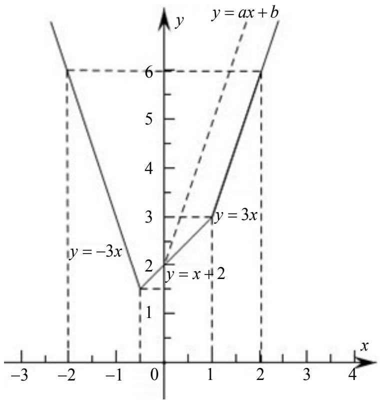


图 23.7

解析： 如图 23.7 所示，为确保当$x\in[0,+\infty)$时，$f(x)\leqslant ax+b$.

①将$x=0$代入$y=x+2$可得：$y=2$，即$b\geqslant 2$.

②为确保$f(x)\leqslant ax+b$，即$y=ax+b$与$y=f(x)$不会相交，必须使$a\geqslant\max\{1,3\}=3$.

综上所述$a_{\min}=3$，$b_{\min}=2$，故$(a+b)_{\min}=a_{\min}+b_{\min}=3+2=5$.

即$a+b$的最小值为 5.

条件 5.3　给定多变量约束条件论证多变量是否满足其他约束条件

条件分析： 当给定多个变量的约束条件论证多变量是否满足其他约束条件的问题时，可以假设满足需要论证的约束条件，然后推导出与题设条件一致或矛盾的结论，进而得出结论.

例 23.30　（乙 1424-2）若$a>0$，$b>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$，是否存在$a$，$b$，使得$2a+3b=6$？并说明理由.

解析： $\because 2a+3b\geqslant 2\sqrt{6ab}$，假设$2a+3b=6$，则$2\sqrt{6ab}\leqslant 6$，即$ab\leqslant\frac{3}{2}$.

又$\because$由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{ab}$可得：$ab\geqslant 2$，显然，两者矛盾.

因此，不存在a，b，使得$2a+3b=6$.

索 引

索引 A：2013—2015 年高考数学甲（Ⅱ）卷试题解析页码索引表

* 索引格式：题号（页码）

索引 B：2016—2018 年高考数学甲（Ⅱ）卷试题解析页码索引表

* 索引格式：题号（页码）

索引 C：2013—2015 年高考数学乙（Ⅰ）卷试题解析页码索引表

* 索引格式：题号（页码）

索引 D：2016—2018 年高考数学乙（Ⅰ）卷试题解析页码索引表

* 索引格式：题号（页码）

索引 E：2016—2018 年高考数学丙（Ⅲ）卷试题解析页码索引表

* 索引格式：题号（页码）